

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ CƠ BẢN

A. LÝ THUYẾT:

1. Định nghĩa

Bất phương trình mũ cơ bản có dạng: $a^x > b$ (hoặc $a^x \geq b, a^x < b, a^x \leq b$) với $a > 0, a \neq 1$.

2. Phương pháp giải: Xét bất phương trình có dạng: $a^x > b$.

- Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$, vì $a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

- Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$.

+ Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$.

+ Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.

Lưu ý: Các phương pháp giải bất phương trình mũ tương tự như giải phương trình mũ (đưa về cùng cơ số, đặt ẩn số phụ, logarit hóa và phương pháp hàm số)

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Bất phương trình $(\sqrt{3} - 1)^{x+1} < (\sqrt{3} - 1)^{2x-2}$ có tập nghiệm là

- A. $S = (-\infty; +\infty)$. B. $S = (-\infty; 3]$. C. $S = (3; +\infty)$. D. $S = (-\infty; 3)$.

Lời giải

Chọn D

Do $0 < \sqrt{3} - 1 < 1$ ta có $(\sqrt{3} - 1)^{x+1} < (\sqrt{3} - 1)^{2x-2} \Leftrightarrow x+1 > 2x-2 \Leftrightarrow x < 3$.

Câu 2

Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{5}{2}\right)^{3x-1} > \left(\frac{5}{2}\right)^{2x+2}$.

- A. $S = (-\infty; 3)$. B. $S = (3; +\infty)$. C. $S = (-\infty; -3)$. D. $S = (-3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Do $\frac{5}{2} > 1$ ta có $\left(\frac{5}{2}\right)^{3x-1} > \left(\frac{5}{2}\right)^{2x+2} \Leftrightarrow 3x-1 > 2x+2 \Leftrightarrow x > 3$.

Câu 3

Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2}$.

- A. $S = (-\infty; 3)$. B. $S = (3; +\infty)$. C. $S = (-\infty; -3)$. D. $S = \left(-\frac{1}{2}; 3\right)$.

Lời giải

Chọn D

Do $0 < \frac{1}{2} < 1$ ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} \Leftrightarrow 2x+1 > 3x-2 \Leftrightarrow x < 3$.

Câu 4

Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{3}{2}\right)^x > 3$ là

- A. $(-\infty; \log_3 \frac{3}{2})$. B. $(-\infty; \log_{\frac{3}{2}} 3)$. C. $(\log_3 \frac{3}{2}; +\infty)$. D. $(\log_{\frac{3}{2}} 3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Do $\frac{3}{2} > 1$ ta có $\left(\frac{3}{2}\right)^x > 3 \Leftrightarrow x > \log_{\frac{3}{2}} 3$.

Câu 5

Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^x > 5$ là

- A. $(-\infty; \log_5 \frac{2}{3})$. B. $(-\infty; \log_{\frac{2}{3}} 5)$. C. $(\log_5 \frac{2}{3}; +\infty)$. D. $(\log_{\frac{2}{3}} 5; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Do $0 < \frac{2}{3} < 1$ ta có $\left(\frac{2}{3}\right)^x > 5 \Leftrightarrow x < \log_{\frac{2}{3}} 5$.

Câu 6

Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 3^{x+1}$ là

- A. $(-\infty; \log_2 3]$. B. $(-\infty; \log_{\frac{2}{3}} 3)$. C. $\emptyset$. D. $(\log_{\frac{2}{3}} 3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^x > 3^{x+1} \Leftrightarrow 2^x > 3 \cdot 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > 3 \Leftrightarrow x < \log_{\frac{2}{3}} 3$.

Câu 7

Giải bất phương trình $\frac{1}{9} \cdot 3^{3x} > 1$.

- A. $x > \frac{2}{3}$. B. $x < \frac{2}{3}$. C. $x > \frac{3}{2}$. D. $x < \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\frac{1}{9} \cdot 3^{3x} > 1 \Leftrightarrow 3^{3x} > 3^2 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$.

Câu 8

Nghiệm của bất phương trình $3^{x+2} \geq \frac{1}{9}$ là:

- A. $x \geq -4$. B. $x < 0$. C. $x > 0$. D. $x < 4$.

Lời giải

Chọn A

$$3^{x+2} \geq \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{x+2} \geq 3^{-2} \Leftrightarrow x+2 \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -4.$$

Câu 9

Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} > 8$ là

- A. $(-\infty; -1)$ B. $(-\infty; 5)$ C. $(-1; +\infty)$ D. $(5; +\infty)$

Lời giải

Chọn A

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} > 8 \Leftrightarrow x-2 < \log_{\frac{1}{2}} 8 \Leftrightarrow x-2 < -3 \Leftrightarrow x < -1$$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $(-\infty; -1)$

Câu 10

Tập nghiệm của bất phương trình $(\sqrt[3]{5})^{x-1} < 5^{x+3}$ là

- A. $(-\infty; -5)$ B. $(-5; +\infty)$ C. $(0; +\infty)$ D. $(-\infty; 0)$

Lời giải

Chọn B

$$(\sqrt[3]{5})^{x-1} < 5^{x+3} \Leftrightarrow 5^{\frac{x-1}{3}} < 5^{x+3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{3} < x+3 \Leftrightarrow x > -5.$$

Câu 11

Giải bất phương trình $\left(\frac{1}{9}\right)^x > 3^{\frac{2x}{x+1}}$.

- A. $(-2; 0)$ B. $(-\infty; -2)$ C. $(0; +\infty)$ D. $(-\infty; -2) \cup (-1; 0)$

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x \neq -1$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{9}\right)^x > 3^{\frac{2x}{x+1}} &\Leftrightarrow 3^{-2x} > 3^{\frac{2x}{x+1}} \Leftrightarrow -2x > \frac{2x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} + 2x < 0 \Leftrightarrow 2x \left(\frac{1}{x+1} + 1\right) < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x(x+2)}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ -1 < x < 0 \end{cases} \text{ (thỏa điều kiện).} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -2) \cup (-1; 0)$.

Câu 12

Nghiệm của bất phương trình $(\sqrt{5} + 2)^{x-1} \geq (\sqrt{5} - 2)^{\frac{x-1}{x+1}}$ là.

- A. $-3 \leq x < -1$. B. $x \geq 1$. C. $-2 \leq x < -1$ hoặc $x \geq 1$. D. $-2 < x < 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\sqrt{5} - 2 = \frac{1}{\sqrt{5} + 2}$.

$$(\sqrt{5} + 2)^{x-1} \geq (\sqrt{5} + 2)^{\frac{1-x}{x+1}} \Leftrightarrow x-1 \geq \frac{1-x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x^2+x-2}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2; -1) \cup (1; +\infty).$$

Câu 13

Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+1} + 4^x > 2^x + 4^{x+1}$ là

- A. $(\log_{\frac{1}{2}} 3; +\infty)$. B. $(-\infty; -\log_2 3)$. C. $(-\log_{\frac{1}{2}} 3; +\infty)$. D. $(-\infty; \log_2 3)$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 2^{x+1} + 4^x > 2^x + 4^{x+1} &\Leftrightarrow 2 \cdot 2^x + 4^x > 2^x + 4 \cdot 4^x \Leftrightarrow 3 \cdot 4^x < 2^x \\ &\Leftrightarrow 2^x < \frac{1}{3} \Leftrightarrow x < \log_2 \frac{1}{3} \Leftrightarrow x < -\log_2 3. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -\log_2 3)$.

Câu 14

Số nghiệm nguyên của bất phương trình $(\sqrt{10} - 3)^{\frac{3-x}{x-1}} > (\sqrt{10} + 3)^{\frac{x+1}{x+3}}$ là.

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} (\sqrt{10} - 3)^{\frac{3-x}{x-1}} > (\sqrt{10} + 3)^{\frac{x+1}{x+3}} &\Leftrightarrow (\sqrt{10} + 3)^{\frac{x-3}{x-1}} > (\sqrt{10} + 3)^{\frac{x+1}{x+3}} \text{ ĐK: } \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -3 \end{cases} \\ \text{BPT} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} > \frac{x+1}{x+3} &\Leftrightarrow \frac{-8}{(x-1)(x+3)} > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1 \\ &\rightarrow x \in \{-2; -1; 0\}. \end{aligned}$$

Câu 15

Giải bất phương trình $3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}} \geq \frac{1}{3^x}$.

- A. $[1; 10]$. B. $(\frac{1}{2}; 5)$. C. $(5; +\infty)$. D. $(-2; 5)$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}} \geq \frac{1}{3^x} &\Leftrightarrow 3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}} \geq 3^{-x} \Leftrightarrow 2 - \sqrt{x^2+5x-6} \geq -x \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x-6} \leq x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x-6 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x^2+5x-6 \leq (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -6 \vee x \geq 1 \\ x \geq -2 \\ x \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 10 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [1; 10]$.

Câu 16

Tập nghiệm của bất phương trình $(2 - \sqrt{3})^x > (7 - 4\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^{x+1}$ là

- A. $(\frac{1}{2}; 2)$ B. $(-\infty; \frac{1}{2})$ C. $(\frac{1}{2}; +\infty)$ D. $(-2; \frac{1}{2})$

Lời giải

Chọn B

$$(2 - \sqrt{3})^x > (7 - 4\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^{x+1} \Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^{2-x} > (2 + \sqrt{3})^{x+1} \Leftrightarrow 2 - x > x + 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}.$$

Câu 17

Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x-10}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$.

A. 0.

B. 1.

C. 9.

D. 11.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x-10}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} &\Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x-10} < x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-10 \geq 0 \\ x-2 > 0 \\ x^2-3x-10 < (x-2)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 5 \\ x > 2 \\ x < 14 \end{cases} &\Leftrightarrow 5 \leq x < 14 \end{aligned}$$

Vì x nguyên nên $x \in \{5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13\}$, do đó số nghiệm nguyên là 9

Câu 18

Tập nghiệm của bất phương trình $(x^2 + 3)^{|x^2-5x+4|} \leq (x^2 + 3)^{x+4}$.

A. $[0; 6]$

B. $(-\infty, 0]$

C. $[6; +\infty)$

D. $[0; +\infty)$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Do } x^2 + 3 > 1 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (x^2 + 3)^{|x^2-5x+4|} \leq (x^2 + 3)^{x+4} \Leftrightarrow |x^2 - 5x + 4| \leq x + 4$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} x^2 - 5x + 4 < 0 \\ -x^2 + 5x - 4 \leq x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 4 \\ (x-2)^2 + 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 4 \quad (1)$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 4 \leq x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 4 \\ 0 \leq x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 4 \leq x \leq 6 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có, tập nghiệm của BPT là $[0; 6]$.

Câu 19

Tập nghiệm của bất phương trình $4^x - 2^x - 2 < 0$ là:

A. $(2; +\infty)$.

B. $(-\infty; 1)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $(-\infty; 2)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } t = 2^x, t > 0. \text{ Bất phương trình trở thành: } t^2 - t - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < t < 2 \Leftrightarrow 2^x < 2 \Leftrightarrow x < 1.$$

Câu 20

Nghiệm nguyên dương lớn nhất của bất phương trình: $4^{x-1} - 2^{x-2} \leq 3$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 4^{x-1} - 2^{x-2} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{4}4^x - \frac{1}{4}2^x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow 0 < 2^x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 2.$$

Vậy nghiệm nguyên dương lớn nhất của phương trình là $x = 2$.

Câu 21

Bất phương trình $3.\left(\frac{4}{9}\right)^x - 5.\left(\frac{3}{2}\right)^{-x} + 2 \leq 0$ có tập nghiệm $S = [a; b]$. Khi đó giá trị của $a^2 + b^2$ bằng

A. $\frac{13}{9}$.

B. $\frac{5}{3}$.

C. $\frac{13}{4}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} 3.\left(\frac{4}{9}\right)^x - 5.\left(\frac{2}{3}\right)^x + 2 \leq 0 &\Leftrightarrow 3.\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5.\left(\frac{2}{3}\right)^x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^x \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0 \quad \begin{matrix} 0 < a = \frac{2}{3} < 1 \\ \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1. \end{matrix} \end{aligned}$$

Câu 22

Biết $S = [a; b]$ là tập nghiệm của bất phương trình $3.9^x - 10.3^x + 3 \leq 0$. Tính $T = b - a$.

A. $T = 1$.

B. $T = \frac{8}{3}$.

C. $T = \frac{10}{3}$.

D. $T = 2$.

Lời giải

Đặt $t = 3^x > 0$, bất phương trình trở thành $3t^2 - 10t + 3 \leq 0$ và có tập nghiệm $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$.

Bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $[-1; 1]$.

Vậy $a = -1$, $b = 1$ nên $T = 2$.

Câu 23

Cho bất phương trình $4^x - 5.2^{x+1} + 16 \leq 0$ có tập nghiệm là đoạn $[a; b]$. Tính $a^2 + b^2$.

A. 5.

B. 10.

C. 26.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $4^x - 5.2^{x+1} + 16 \leq 0 \Leftrightarrow 4^x - 10.2^x + 16 \leq 0$.

Đặt $t = 2^x$ (với $t > 0$), ta có bất phương trình $t^2 - 10t + 16 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq t \leq 8$, suy ra $2 \leq 2^x \leq 8 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[1; 3]$.

Suy ra $a = 1$; $b = 3$ nên $a^2 + b^2 = 10$.

Câu 24

Số nghiệm nguyên trong khoảng $(-20; 20)$ của bất phương trình $16^x - 5.4^x + 4 \geq 0$ là

A. 39.

B. 40.

C. 19.

D. 20.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 4^x$ (với $t > 0$), ta có bất phương trình $t^2 - 5t + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 4 \\ t \leq 1 \end{cases}$

suy ra $\begin{cases} 4^x \geq 4 \\ 4^x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 0 \end{cases}$.

Mà $x \in (-20; 20)$ và $x \in \mathbb{Z}$ nên có 39 nghiệm x .

Câu 25

Tìm tổng T các nghiệm nguyên của bất phương trình $9^{x-1} - 36 \cdot 3^{x-3} + 3 \leq 0$.

- A. $T = 3$. B. $T = 0$. C. $T = 1$. D. $T = 4$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $9^{x-1} - 36 \cdot 3^{x-3} + 3 \leq 0 \Leftrightarrow 3^{2(x-1)} - 4 \cdot 3^{x-1} + 3 \leq 0$.

Đặt $t = 3^{x-1}$ (với $t > 0$), ta có bất phương trình $t^2 - 4t + 3 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 3$,

suy ra $1 \leq 3^{x-1} \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên có $x = 1; x = 2$.

Vậy $T = 3$.

Câu 26

Bất phương trình $(\sqrt{2} - 1)^x + (\sqrt{2} + 1)^x > 2\sqrt{2}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc $[-2019; 2020]$?

- A. 4036. B. 4037. C. 2020. D. 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1$.

Đặt $t = (\sqrt{2} + 1)^x$, điều kiện $t > 0$, khi đó $(\sqrt{2} - 1)^x = \frac{1}{t}$

Bất phương trình đã cho trở thành $\frac{1}{t} + t - 2\sqrt{2} > 0 \Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > \sqrt{2} + 1 \\ t < \sqrt{2} - 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2} + 1)^x > \sqrt{2} + 1 \\ (\sqrt{2} + 1)^x < \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ (\sqrt{2} + 1)^x < (\sqrt{2} + 1)^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$, $x \in [-2019; 2020]$ nên $x \in \mathbb{Z}$, $x \in [-2019; -1] \cup (1; 2020]$.

Ta có trên $[-2019; -1]$ có $-1 - (-2019) = 2018$ số nguyên và trên $(1; 2020]$ có $2020 - 1 = 2019$ số nguyên.

Vậy có $2018 + 2019 = 4037$ nghiệm nguyên thuộc $[-2019; 2020]$.

Câu 27

Bất phương trình $(5 + 2\sqrt{6})^x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x < 2$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc $[-2019; 2020]$?

- A. 2020. B. 4040. C. 4039. D. 2019.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $(5 + 2\sqrt{6})^x = [(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2]^x = [(\sqrt{3} + \sqrt{2})^x]^2$.

Đặt $t = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x$, ($t > 0$), bất phương trình đã cho trở thành $t^2 + t - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < t < 1$.

Kết hợp với điều kiện $t > 0$, ta được $0 < t < 1 \Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$.

Đề $x \in \mathbb{Z}$, $x \in [-2019; 2020]$ nên $x \in \mathbb{Z}$, $x \in [-2019; 0)$. Vậy có 2019 nghiệm nguyên thỏa mãn.

Câu 28

Tìm tập nghiệm của bất phương trình $5 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x - 7 \cdot 10^x \leq 0$.

A. $S = [1; 2]$.

B. $S = [0; 1]$.

C. $S = [0; \frac{5}{2}]$.

D. $S = [1; \frac{5}{2}]$.

Lời giải:

Chọn B

Ta có $5 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x - 7 \cdot 10^x \leq 0 \Leftrightarrow 5 + 2 \cdot (\frac{25}{4})^x - 7 (\frac{5}{2})^x \leq 0$

Đặt $t = (\frac{5}{2})^x$, ($t > 0$). Khi đó bất phương trình trở thành $5 + 2t^2 - 7t \leq 0$

$\Leftrightarrow 2t^2 - 7t + 5 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq t \leq \frac{5}{2}$, suy ra $1 \leq (\frac{5}{2})^x \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [0; 1]$.

Câu 29

Tập nghiệm S của bất phương trình $9^{\sqrt{x^2-2x}-x} - 7 \cdot 3^{\sqrt{x^2-2x}-x-1} \leq 2$ là

A. $S = [-\frac{1}{4}; 0]$.

B. $S = [-\frac{1}{4}; 0] \cup [2; +\infty)$.

C. $S = [2; +\infty)$.

D. $S = (-\frac{1}{4}; 0) \cup [2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$

Bất phương trình cho $3 \cdot 9^{\sqrt{x^2-2x}-x} - 7 \cdot 3^{\sqrt{x^2-2x}-x} \leq 6$.

Đặt $t = 3^{\sqrt{x^2-2x}-x}$, $t > 0$, ta có bất phương trình:

$3t^2 - 7t - 6 \leq 0 \Leftrightarrow 0 < t \leq 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x} - x \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x} \leq x + 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ x^2 - 2x \leq (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 2 \\ x \geq -1 \\ x \geq -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} \leq x \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Vậy, bất phương trình cho có nghiệm là $S = [-\frac{1}{4}; 0] \cup [2; +\infty)$.

Câu 30

Tập nghiệm S của bất phương trình $(7 + 4\sqrt{3})^x - 3(2 - \sqrt{3})^x + 2 \leq 0$ là

- A. $S = (-\infty; 0]$. B. $S = (-\infty; 1]$ C. $S = [0; +\infty)$. D. $S = (-\infty; 2 + \sqrt{3}]$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$, $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$ nên đặt

$t = (2 + \sqrt{3})^x$, $t > 0$ ta có bất phương trình:

$$t^2 - \frac{3}{t} + 2 \leq 0 \Leftrightarrow t^3 + 2t - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + t + 3) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < t \leq 1$$

$$\Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$$

Vậy, bất phương trình cho có nghiệm là $x \leq 0$.

Câu 31

Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{5^x}{5^x - 3^x} \leq \frac{5}{2}$ là

- A. $[0; 1]$. B. $[0; 1)$. C. $(0; 1]$. D. $(-\infty; 1]$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $5^x - 3^x \neq 0 \Leftrightarrow 5^x \neq 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$

$$\frac{5^x}{5^x - 3^x} \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^x} \leq \frac{5}{2}$$

Đặt $t = \left(\frac{3}{5}\right)^x$, $t > 0$. Bất phương trình trở thành $\frac{1}{1-t} \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{1-t} - \frac{5}{2} \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2-5(1-t)}{2(1-t)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5t-3}{2(1-t)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5} \leq t < 1$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5} \leq \left(\frac{3}{5}\right)^x < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

Câu 32

Bất phương trình $2^{2x+1} - 21\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geq 0$ có tập nghiệm là $(\log_a b; +\infty)$. Biết a là số nguyên tố.

Khi đó $(ab)^2$ bằng:

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Lời giải

Chọn B

Bất phương trình $2^{2x+1} - 21\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 2^{2x} - 21\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + 2 > 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{2x} - \frac{21}{8} \cdot 2^{-2x} + 2 > 0$$

Đặt: $t = 2^{2x}$, $t > 0$

$$\Leftrightarrow 2.t - \frac{21}{8t} + 2 > 0 \Leftrightarrow 16t^2 + 16t - 21 > 0$$

$$\Leftrightarrow t < -\frac{7}{4} \vee \frac{3}{4} < t. \text{ So với điều kiện } t = 2^{2x} > 0$$

$$\text{Ta chọn: } t > \frac{3}{4} \Leftrightarrow 2^{2x} > \frac{3}{4} \Leftrightarrow 2x > \log_2\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\Rightarrow x > \frac{1}{2} \log_2\left(\frac{3}{4}\right) \Rightarrow x > \log_2 \sqrt{\frac{3}{4}}$$

Câu 33

Bất phương trình $9.4^{-\frac{1}{x}} + 5.6^{-\frac{1}{x}} < 4.9^{-\frac{1}{x}}$ có tập nghiệm là $(a; b)$. Khi đó $\frac{b}{a}$ bằng:

A. 0.

B. 2.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

$$9.4^{-\frac{1}{x}} + 5.6^{-\frac{1}{x}} < 4.9^{-\frac{1}{x}}, \text{ điều kiện } x \neq 0$$

$$\text{Chia 2 vế cho } 9^{-\frac{1}{x}} > 0$$

$$\text{Bpt} \Leftrightarrow 9.\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{x}} + 5.\left(\frac{6}{9}\right)^{-\frac{1}{x}} < 4$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}} > 0$$

$$\Leftrightarrow 9.t^2 + 5t - 4 < 0 \Leftrightarrow -1 < t < \frac{4}{9}$$

$$\text{Vì điều kiện } t > 0 \text{ ta có: } 0 < t < \frac{4}{9}$$

$$\text{Vậy } \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}} < \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{x} > 2 \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x} < 0$$

$$\text{Xét dấu ta có: } -\frac{1}{2} < x < 0$$

Câu 34

Tập giá trị của m thỏa mãn bất phương trình $\frac{2.9^x - 3.6^x}{6^x - 4^x} \leq 2 (x \in \mathbb{R})$ là $(-\infty; a) \cup (b; c)$.

Khi đó $a + b + c$ bằng:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \frac{2.9^x - 3.6^x}{6^x - 4^x} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{2.9^x - 5.6^x + 2.4^x}{6^x - 4^x} \leq 0$$

Chia cả tử và mẫu của vế trái cho $4^x > 0$, bất phương trình tương đương với

$$\frac{2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 5 \left(\frac{3}{2}\right)^x + 2}{\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1} \leq 0. \text{ Đặt } t = \left(\frac{3}{2}\right)^x, t > 0 \text{ bất phương trình trở thành}$$

$$\frac{2t^2 - 5t + 2}{t - 1} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq \frac{1}{2} \\ 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{Với } t \leq \frac{1}{2} \text{ ta có } \left(\frac{3}{2}\right)^x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq \log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq -\log_{\frac{3}{2}} 2$$

$$\text{Với } 1 < t \leq 2 \text{ ta có } 1 < \left(\frac{3}{2}\right)^x \leq 2 \Leftrightarrow 0 < x \leq \log_{\frac{3}{2}} 2$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là } S = \left(-\infty; -\log_{\frac{3}{2}} 2\right] \cup \left(0; \log_{\frac{3}{2}} 2\right]$$

Câu 35

Tìm tổng T các nghiệm nguyên của bất phương trình $\frac{2 \cdot 3^x - 2^{x+2}}{3^x - 2^x} \leq 1$.

A. $T = 3$.

B. $T = 0$.

C. $T = 1$.

D. $T = 4$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \frac{2 \cdot 3^x - 2^{x+2}}{3^x - 2^x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot 3^x - 4 \cdot 2^x}{3^x - 2^x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 4}{\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 4}{\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x - 3}{\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1} \leq 0$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{3}{2}\right)^x \text{ (với } t > 0), \text{ ta có bất phương trình } \frac{t-3}{t-1} \leq 0 \Leftrightarrow 1 < t \leq 3,$$

$$\text{suy ra } 1 < \left(\frac{3}{2}\right)^x \leq 3 \Leftrightarrow 0 < x \leq \log_{\frac{3}{2}} 3.$$

$$\text{Mà } x \in \mathbb{Z} \text{ nên có } x = 1; x = 2.$$

$$\text{Vậy } T = 3.$$

Câu 36

Số nghiệm nguyên của bất phương trình $(3 - \sqrt{5})^{2x-x^2} + (3 + \sqrt{5})^{2x-x^2} \leq 2^{1-x^2+2x}$ là

A. 5.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } (3 - \sqrt{5})^{2x-x^2} + (3 + \sqrt{5})^{2x-x^2} \leq 2^{1-x^2+2x} \Leftrightarrow \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2x-x^2} + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2x-x^2} \leq 2.$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2x-x^2} \text{ với } t > 0, \text{ khi đó } \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2x-x^2} = \frac{1}{t},$$

$$\text{nên ta có bất phương trình } t + \frac{1}{t} \leq 2 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow t = 1,$$

$$\text{suy ra } \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2x-x^2} = 1 \Leftrightarrow 2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Câu 37

Tập nghiệm của bất phương trình $49.49^x + 28.4^x \leq 351.14^x$ có dạng là $S = [a; b]$. Giá trị $b - 2a$ bằng

- A. 1. B. 10. C. 5. D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 49.49^x + 28.4^x \leq 351.14^x \Leftrightarrow 49.\left(\frac{49}{14}\right)^x + 28.\left(\frac{4}{14}\right)^x \leq 351$$

$$\Leftrightarrow 49.\left(\frac{7}{2}\right)^x + 28.\left(\frac{2}{7}\right)^x \leq 351 \Leftrightarrow 49.\left(\frac{7}{2}\right)^x + 28.\frac{1}{\left(\frac{7}{2}\right)^x} \leq 351.$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{7}{2}\right)^x \text{ (với } t > 0), \text{ thì bất phương trình trở thành } 49t + \frac{28}{t} \leq 351 \Leftrightarrow \frac{4}{49} \leq t \leq \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{49} \leq \left(\frac{7}{2}\right)^x \leq \frac{7}{2} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1, \text{ khi đó } S = [-2; 1], \text{ nên } a = -2; b = 1.$$

Vậy giá trị $b - 2a = 5$.

Câu 38

Tập nghiệm của bất phương trình $2.7^{x+2} + 7.2^{x+2} \leq 351.\sqrt{14^x}$ có dạng là đoạn $S = [a; b]$. Giá trị $b - 2a$ thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $(3; \sqrt{10})$. B. $(-4; 2)$. C. $(\sqrt{7}; 4\sqrt{10})$. D. $\left(\frac{2}{9}; \frac{49}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn C

$$2.7^{x+2} + 7.2^{x+2} \leq 351.\sqrt{14^x} \Leftrightarrow 98.7^x + 28.2^x \leq 351.\sqrt{14^x} \Leftrightarrow 49.\sqrt{\frac{7^{2x}}{14^x}} + 28.\sqrt{\frac{2^{2x}}{14^x}} \leq 351$$

$$\Leftrightarrow 49.\sqrt{\frac{7^x}{2^x}} + 28.\sqrt{\frac{2^x}{7^x}} \leq 351. \text{ Đặt } t = \sqrt{\frac{7^x}{2^x}}, t > 0 \text{ thì bpt trở thành } 49t + \frac{28}{t} \leq 351$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{49} \leq t \leq \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{4}{49} \leq \sqrt{\frac{7^x}{2^x}} \leq \frac{7}{2} \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 2, \text{ khi đó } S = [-4; 2].$$

$$\text{Giá trị } b - 2a = 10 \in (\sqrt{7}; 4\sqrt{10}).$$

Câu 39

Số nghiệm nguyên nhỏ hơn 10 của bất phương trình $4.5^x - 10^x - 25.2^x + 100 < 0$ là:

- A. 8. B. 6. C. 7. D. 5

Lời giải

Chọn C

$$4.5^x - 10^x - 25.2^x + 100 < 0 \Leftrightarrow (5^x + 25)(4 - 2^x) < 0 \Leftrightarrow 4 - 2^x < 0 \Leftrightarrow 2^x > 4 \Leftrightarrow x > 2.$$

Vậy số nghiệm nguyên nhỏ hơn 10 của bất phương trình là 7.

Câu 40

Nghiệm của bất phương trình $6^x - 2^x + 3^x - 1 > 0$ là:

- A. $x > 0$. B. $x > 1$. C. $x < 0$. D. $x < 1$.

Lời giải

Chọn A

$$6^x - 2^x + 3^x - 1 > 0 \Leftrightarrow (2^x + 1)(3^x - 1) > 0 \Leftrightarrow 3^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Câu 41

Tập nghiệm của bất phương trình $8 \cdot 3^x + 3 \cdot 2^x > 24 + 6^x$ là:

- A. $(3; 8)$. B. $(1; 3)$. C. $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. D. $(-\infty; 3) \cup (8; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

♦ $8 \cdot 3^x + 3 \cdot 2^x > 24 + 6^x \Leftrightarrow 8 \cdot 3^x + 3 \cdot 2^x - 24 - 3^x \cdot 2^x > 0$.

♦ Đặt $a = 3^x, b = 2^x$ ($a, b > 0$).

♦ Bất phương trình đã cho trở thành: $8a + 3b - 24 - ab > 0$

$$\Leftrightarrow 8(a - 3) - b(a - 3) > 0 \Leftrightarrow (a - 3)(8 - b) > 0.$$

♦ TH1: $\begin{cases} a - 3 > 0 \\ 8 - b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 3 \\ b < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x > 3 \\ 2^x < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 3.$

♦ TH2: $\begin{cases} a - 3 < 0 \\ 8 - b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 3 \\ b > 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x < 3 \\ 2^x > 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 3 \end{cases}$ (vô nghiệm).

♦ Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = (1; 3)$.

Câu 42

Tập nghiệm của bất phương trình $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$

- A. $[0; 2]$. B. $(0; 2)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

♦ $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25 \Leftrightarrow 25 \cdot 2^x - 2^x \cdot 5^x + 5^x - 25 > 0$.

♦ Đặt $a = 2^x, b = 5^x$ ($a, b > 0$).

♦ Bất phương trình đã cho trở thành: $25a - ab + b - 25 > 0$

$$\Leftrightarrow 25(a - 1) - b(a - 1) > 0 \Leftrightarrow (a - 1)(25 - b) > 0.$$

♦ TH1: $\begin{cases} a - 1 > 0 \\ 25 - b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x > 1 \\ 5^x < 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 2.$

♦ TH2: $\begin{cases} a - 1 < 0 \\ 25 - b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x < 1 \\ 5^x > 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 2 \end{cases}$ (vô nghiệm).

♦ Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = (0; 2)$.

Câu 43

Tập nghiệm của bất phương trình $9^x - 2(x+5) \cdot 3^x + 9(2x+1) \geq 0$ là

- A. $[0; 1] \cup [2; +\infty)$. B. $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$. C. $[1; 2]$. D. $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $3^x = t, t > 0$.

Xét phương trình: $t^2 - 2(x+5)t + 9(2x+1) = 0$ (1).

Ta có $\Delta' = (x+5)^2 - 9(2x+1) = x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$ nên phương trình (1) luôn có nghiệm.

Nếu $x = 4 \Rightarrow \Delta' = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $t = x + 5$.

Do đó bất phương trình đã cho trở thành $3^x \geq x + 5$ (luôn đúng khi $x = 4$).

Nếu $x \neq 4 \Rightarrow \Delta' > 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} t = 2x + 1 \\ t = 9 \end{cases}$.

Xét các phương trình $3^x = 9 \Leftrightarrow x = 2$ (1) và $3^x = 2x + 1 \Leftrightarrow 3^x - 2x - 1 = 0$ (2).

Đặt $f(x) = 3^x - 2x - 1$; ta có $f'(x) = 3^x \ln 3 - 2$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lại có $f(0) = f(1) = 0$ và $f'(0) < 0, f'(1) > 0$ nên $f'(x)$ đổi dấu một lần duy nhất trong khoảng $[0; 1]$.

Vậy phương trình (2) có đúng hai nghiệm $x = 0, x = 1$.

Lập bảng xét dấu cho (1) và (2) ta được tập nghiệm của bất phương trình là: $S = [0; 1] \cup [2; +\infty)$.

Câu 44

Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8}{2^{x+1} - 1} \geq 0$ có dạng là $S = (a; b] \cup (c; +\infty)$. Giá trị $\frac{a+b+c}{3}$ thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; -1)$. B. $(-1; 0)$. C. $(0; 1)$. D. $(1; 4)$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \frac{4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8}{2^{x+1} - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 \geq 0 \\ 2^{x+1} - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 \geq 0 \\ 2 \cdot 2^x > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \leq 2 \\ 2^x \geq 4 \\ 2^x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq 2^x \leq 4 \\ 2^x < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (VN) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < 2^x \leq 2 \\ 2^x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = (-1; 1] \cup (2; +\infty)$.

$$\Rightarrow a = -1; b = 1; c = 2 \Rightarrow \frac{a+b+c}{3} = \frac{2}{3} \in (0; 1).$$

Câu 45

Tìm tập nghiệm của bất phương trình $7^x \geq 10 - 3x$.

- A. $(-\infty; 1]$ B. $(1; +\infty)$ C. $[1; +\infty)$ D. $\emptyset$

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = 7^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = 10 - 3x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình $7^x = 10 - 3x$ có nghiệm duy nhất $x = 1$

Bên cạnh $7^x > 10 - 3x, \forall x > 1$. Vậy tập nghiệm bất phương trình là

Câu 46

Giải bất phương trình $3^x + 4^x > 5^x$.

Lời giải

- Ta có $3^x + 4^x > 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1 \quad (*)$
- Nhận thấy hàm số $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- Ta có $(*) \Leftrightarrow f(x) > f(2) \Leftrightarrow x < 2$. Vậy, $S = (-\infty; 2)$.

Câu 47

Giải bất phương trình $2^x + 3^x + 5^x \geq 38$.

Lời giải

- Nhận thấy hàm số $f(x) = 2^x + 3^x + 5^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Bất phương trình đã cho tương đương với $f(x) \geq f(2) \Leftrightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow S = [2; +\infty)$.

Câu 48

Giải bất phương trình $(\sqrt{2} - 1)^{\ln x} + (\sqrt{3} - 1)^{\ln x} \geq 2$.

Lời giải

- Điều kiện $x > 0$.
 - Xét hàm số $f(x) = (\sqrt{2} - 1)^{\ln x} + (\sqrt{3} - 1)^{\ln x}, x > 0$. Ta có

$$f'(x) = \frac{1}{x}(\sqrt{2} - 1)^{\ln x} \ln(\sqrt{2} - 1) + \frac{1}{x}(\sqrt{3} - 1)^{\ln x} \ln(\sqrt{3} - 1).$$
 Vì $\begin{cases} \ln(\sqrt{2} - 1) < 0 \\ \ln(\sqrt{3} - 1) < 0 \end{cases}$ nên $f'(x) < 0, \forall x > 0$. Tức là $f(x)$ giảm trên $(0; +\infty)$.
 - Ta có $(\sqrt{2} - 1)^{\ln x} + (\sqrt{3} - 1)^{\ln x} \geq 2 \Leftrightarrow f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$.
- Vậy, $S = (0; 1]$.

Câu 49

Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{2x^2-15x+100} - 2^{x^2+10x-50} + x^2 - 25x + 150 < 0$.

A. 5.

B. 3.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Đặt: $\begin{cases} u = 2x^2 - 15x + 100 \\ v = x^2 + 10x - 50 \end{cases} \Rightarrow u - v = x^2 - 25x + 150$.

$$2^{2x^2-15x+100} - 2^{x^2+10x-50} + x^2 - 25x + 150 < 0 \Leftrightarrow 2^u - 2^v + u - v < 0 \Leftrightarrow 2^u + u < 2^v + v.$$

Xét hàm $f(u) = 2^u + u \Rightarrow f'(u) = 2^u \cdot \ln 2 + 1 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm $f(u)$ là hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$.

Tương tự ta có hàm $f(v)$ là hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$.

Mà $f(u) < f(v)$ nên $u < v$.

$$\text{Suy ra } 2x^2 - 15x + 100 < x^2 + 10x - 50 \Leftrightarrow x^2 - 25x + 150 < 0 \Leftrightarrow 10 < x < 15.$$

$$\text{Vì } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{11, 12, 13, 14\}$$

Câu 50

Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $3^y - x < 27^x - \frac{y}{3}$ và $0 \leq x, y \leq 3$.

A. 10.

B. 9.

C. 11.

D. 12.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } 3^y - x < 27^x - \frac{y}{3} \Leftrightarrow 3 \cdot 3^y + y < 3 \cdot 27^x + 3x \Leftrightarrow 3^{y+1} + (y+1) < 3^{3x+1} + (3x+1). (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t + 3^t$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f'(t) = 1 + 3^t \cdot \ln 3 > 0, \forall t \Rightarrow \text{hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } (-\infty; +\infty).$$

$$\text{Mà } (*) \Leftrightarrow f(y+1) < f(3x+1) \Leftrightarrow y+1 < 3x+1 \Leftrightarrow y < 3x.$$

$$\text{Với } 0 \leq x; y \leq 3.$$

$$\text{Mà } x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow S =$$

$$\{(1; 0); (2; 0); (3; 0); (1; 1); (2; 1); (3; 1); (1; 2); (2; 2); (3; 2); (2; 3); (3; 3)\}.$$

Vậy có 11 cặp $(x; y)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 51

Cho bất phương trình $2^{x^2+x} + 2x \leq 2^{3-x} - x^2 + 3$ có tập nghiệm là $[a; b]$. Giá trị của $T = 2a + b$ là

A. $T = 1$.

B. $T = -5$.

C. $T = 3$.

D. $T = -2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{x^2+x} + 2x \leq 2^{3-x} - x^2 + 3 \Leftrightarrow 2^{x^2+x} + x^2 + x \leq 2^{3-x} + 3 - x$ (1).

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$, có $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(1) \Leftrightarrow f(x^2 + x) \leq f(3 - x) \Leftrightarrow x^2 + x \leq 3 - x \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1 \Rightarrow x \in [-3; 1].$$

$$\Rightarrow a = -3, b = 1 \Rightarrow T = 2a + b = -5.$$

Câu 52

Tất cả giá trị của tham số thực m sao cho bất phương trình $9^x - 2(m+1) \cdot 3^x - 3 - 2m > 0$ nghiệm đúng với mọi số thực x là

- A. $m \leq -\frac{3}{2}$. B. $m \neq 2$. C. $m < -\frac{3}{2}$. D. $m \in \emptyset$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } 9^x - 2(m+1) \cdot 3^x - 3 - 2m > 0$$

$$\Leftrightarrow (3^x)^2 - 2 \cdot 3^x - 3 > (3^x + 1) \cdot 2m$$

$$\Leftrightarrow (3^x + 1)(3^x - 3) > (3^x + 1) \cdot 2m$$

$$\Leftrightarrow 3^x - 3 > 2m \Leftrightarrow 3^x > 3 + 2m$$

$$\text{Vậy, để } 9^x - 2(m+1) \cdot 3^x - 3 - 2m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ khi } 3 + 2m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{2}.$$

Câu 53

Tìm m để bất phương trình $15^x + 4 \cdot 3^x - m \cdot 5^x > 4m$ luôn đúng trên $[3; 5]$?

- A. $m > 0$. B. $m < 243$. C. $m < 3$. D. $m < 27$.

Lời giải

Chọn D

$$15^x + 4 \cdot 3^x - m \cdot 5^x > 4m \Leftrightarrow (5^x \cdot 3^x + 4 \cdot 3^x) - (m \cdot 5^x + 4m) > 0 \Leftrightarrow 3^x(5^x + 4) - m(5^x + 4) > 0$$

$$\Leftrightarrow (5^x + 4)(3^x - m) > 0 \Leftrightarrow 3^x - m > 0$$

$$\text{Xét } f(x) = 3^x - m, f'(x) = 3^x \ln 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	3	5	$+\infty$
y'		+		
y		$27 - m$	$243 - m$	$+\infty$

$$\text{Để bất phương trình đã cho luôn đúng trên } [3; 5] \text{ thì } 27 - m > 0 \Leftrightarrow m < 27.$$

Câu 54

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $5 \cdot 4^x + m \cdot 25^x - 7 \cdot 10^x \leq 0$ có nghiệm. Số phần tử của S là

- A. 2. B. 3. C. Vô số. D. 1.

Lời giải

Chọn A

$$\diamond 5 \cdot 4^x + m \cdot 25^x - 7 \cdot 10^x \leq 0 \Leftrightarrow 5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 7 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x + m \leq 0.$$

Đặt $t = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ ($t > 0$), ta có bất phương trình: $5t^2 - 7t + m \leq 0$ có nghiệm $t \in (0; +\infty)$

$$\diamond m \leq -5t^2 + 7t \text{ với } t \in (0; +\infty).$$

$$\text{Xét } f(t) = -5t^2 + 7t \Rightarrow f'(t) = -10t + 7.$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7}{10} \Rightarrow \max_{(0; +\infty)} f(t) = f\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{49}{20}.$$

$$\diamond 5 \cdot t^2 - 7 \cdot t + m \leq 0 \text{ có nghiệm } t \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \leq \max_{(0; +\infty)} f(t) \Leftrightarrow m \leq \frac{49}{20}$$

Mà $m \in \mathbb{Z}_+^* \Rightarrow m \in \{1; 2\}$. Vậy số phần tử của S là 2.

Câu 55

Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để bất phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 3 - 2m \leq 0$ có nghiệm thực.

- A. $m \geq 2$. B. $m \leq 3$. C. $m \leq 5$. D. $m \geq 1$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } 4^x - m \cdot 2^{x+1} + 3 - 2m \leq 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2m \cdot 2^x + 3 - 2m \leq 0$$

$$\text{Đặt } 2^x = t \quad (t > 0).$$

$$\text{Ta có bất phương trình tương đương với } t^2 - 2m \cdot t + 3 - 2m \leq 0 \Leftrightarrow \frac{t^2+3}{2t+2} \leq m$$

$$\text{Xét } f(t) = \frac{t^2+3}{2t+2} \text{ trên } (0; +\infty).$$

$$f'(t) = \frac{2t^2+4t-6}{(2t+2)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$\frac{3}{2}$	1	$+\infty$

Vậy để bất phương trình có nghiệm thực thì $m \geq 1$.

Câu 56

Số các giá trị nguyên dương để bất phương trình $3^{\cos^2 x} + 2^{\sin^2 x} \geq m \cdot 3^{\sin^2 x}$ có nghiệm là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

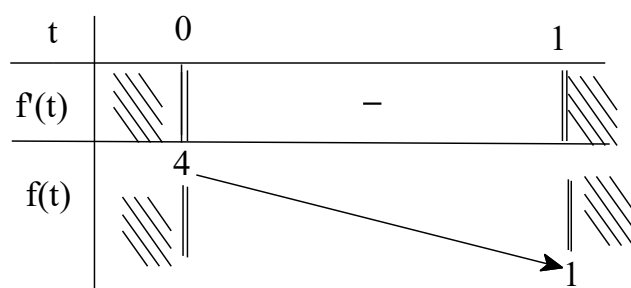
Chọn A

Đặt $\sin^2 x = t (0 \leq t \leq 1)$.

$$3^{\cos^2 x} + 2^{\sin^2 x} \geq m \cdot 3^{\sin^2 x} \Leftrightarrow 3^{(1-t)} + 2^t \geq 3^t \Leftrightarrow \frac{3}{3^t} + 2^t \geq m \cdot 3^t \Leftrightarrow \frac{3}{(3^t)^2} + \left(\frac{2}{3}\right)^t \geq m.$$

Đặt: $y = \frac{3}{9^t} + \left(\frac{2}{3}\right)^t; (0 \leq t \leq 1)$.

$$y' = 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^t \cdot \ln \frac{1}{9} + \left(\frac{2}{3}\right)^t \cdot \ln \frac{2}{3} < 0 \Rightarrow \text{Hàm số luôn nghịch biến.}$$



Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m \leq 1$ thì phương trình có nghiệm.

Suy ra các giá trị nguyên dương cần tìm $m = 1$.

Câu 57

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\left(\frac{e}{2}\right)^{x^2+2mx+1} \leq \left(\frac{e}{2}\right)^{2x-3m}$ nghiệm đúng với mọi x .

A. $m \in (-5; 0)$.

B. $m \in [-5; 0]$.

C. $m \in (-\infty; -5) \cup (0; +\infty)$.

D. $m \in (-\infty; -5] \cup [0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Bất phương trình} \Leftrightarrow \left(\frac{e}{2}\right)^{-x^2-2mx-1} \leq \left(\frac{e}{2}\right)^{2x-3m} \Leftrightarrow -x^2 - 2mx - 1 \leq 2x - 3m$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2(m+1)x - 3m + 1 \geq 0.$$

$$\text{Ycbt} \Leftrightarrow x^2 + 2(m+1)x - 3m + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ ((m+1)^2 + 3m - 1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 5m \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq m \leq 0.$$

Câu 58

Bất phương trình $4^x - (m+1)2^{x+1} + m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \geq 0$. Tập tất cả các giá trị của m là

A. $(-\infty; 12)$.

B. $(-\infty; -1]$.

C. $(-\infty; 0]$.

D. $(-1; 16]$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 2^x (t \geq 1)$.

$$\begin{aligned} \text{BPT} &\Leftrightarrow t^2 - 2(m+1)t + m \geq 0 \Leftrightarrow (2t-1)m \leq t^2 - 2t \Leftrightarrow m \leq \frac{t^2-2t}{2t-1} = g(t) \\ &\Leftrightarrow m \leq \min g(t) \end{aligned}$$

Ta có: $g'(t) = \frac{2t^2-2t+2}{(2t-1)^2} > 0, \forall t \geq 1 \Rightarrow \min g(x) = g(1) = -1 \Rightarrow m \in (-\infty; -1]$.

Câu 59

Tập các giá trị của m để phương trình $4.(\sqrt{5}+2)^x + (\sqrt{5}-2)^x - m + 3 = 0$ có đúng hai nghiệm âm phân biệt là:

- A. $(-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$. B. $(7; 8)$. C. $(-\infty; 3)$. D. $(7; 9)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = (\sqrt{5}+2)^x, t > 0$, khi đó: $x = \log_{\sqrt{5}+2} t$ và mỗi $t \in (0; 1)$ cho ta đúng một nghiệm $x < 0$.

Phương trình đã cho được viết lại $4t + \frac{1}{t} + 3 = m(*)$.

Suy ra, bài toán trở thành tìm m để phương trình $(*)$ có đúng hai nghiệm $t \in (0; 1)$.

Xét hàm số $f(t) = 4t + \frac{1}{t} + 3$ với $t \in (0; 1)$.

$$\text{Có: } f'(t) = 4 - \frac{1}{t^2} = \frac{4t^2-1}{t^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{4t^2-1}{t^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \in (0; 1) \\ t = -\frac{1}{2} \notin (0; 1) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$+\infty$	7	8

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $7 < m < 8$.

Câu 60

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm thực phân biệt $m.3^{x^2-7x+12} + 3^{2x-x^2} = 9.3^{10-5x} + m$. Tìm số phần tử của S .

- A.3. B. Vô số. C.1. D.2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $m \cdot 3^{x^2-7x+12} + 3^{2x-x^2} = 9 \cdot 3^{10-5x} + m \Leftrightarrow m(3^{x^2-7x+12} - 1) = 3^{12-5x} - 3^{2x-x^2}$

$$m(3^{x^2-7x+12} - 1) = 3^{2x-x^2}(3^{x^2-7x+12} - 1) \Leftrightarrow (3^{2x-x^2} - m)(3^{x^2-7x+12} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2-7x+12} - 1 = 0 \\ 3^{2x-x^2} - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 12 = 0 \\ 2x - x^2 = \log_3 m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4; x = 3 \\ 2x - x^2 = \log_3 m(1) \end{cases}$$

Để phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

TH1: phương trình (1) có nghiệm duy nhất khác 4 và 3 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - \log_3 m = 0 \\ \log_3 m \neq -3 \\ \log_3 m \neq -8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$

TH2: phương trình (1) có nghiệm $x = 4$ và nghiệm còn lại khác 4 và 3.

Thay $x = 4$ vào (1), ta được $\log_3 m = -8 \Leftrightarrow m = 3^{-8}$.

Khi đó (1) trở thành $-x^2 + 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}$.

TH3: phương trình (1) có nghiệm $x = 3$ và nghiệm còn lại khác 4 và 3.

Thay $x = 3$ vào (1), ta được $\log_3 m = -3 \Leftrightarrow m = \frac{1}{27}$.

Khi đó (1) trở thành $-x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Vậy có 3 giá trị m thỏa mãn.

Câu 61

Cho bất phương trình $m \cdot 3^{x+1} + (3m + 2) \cdot (4 - \sqrt{7})^x + (4 + \sqrt{7})^x > 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty; 0]$.

Lời giải

Ta có $m \cdot 3^{x+1} + (3m + 2) \cdot (4 - \sqrt{7})^x + (4 + \sqrt{7})^x > 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x + (3m + 2) \left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^x + 3m > 0. \text{ Đặt } t = \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x, \text{ do } x \leq 0 \text{ nên } 0 < t \leq 1.$$

Tìm tham số m sao cho $t^2 + 3mt + 3m + 2 > 0$, đúng với mọi $0 < t \leq 1$.

$$m > \frac{-t^2-2}{3t+3} \Leftrightarrow m > \max_{(0;1]} \frac{-t^2-2}{3t+3}. \text{ Ta tìm GTLN của hàm số } f(t) = -\frac{t^2+2}{3t+2} \text{ trên } 0 < t \leq 1.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{t^2+2t-2}{(t+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 - \sqrt{3} \\ t = -1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên ta được

t	0	$-1 + \sqrt{3}$	1
$f'(t)$	+	0	-
f	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{1}{2}$

$$\text{Vậy } \max_{(0;1]} \frac{-t^2-2}{3t+3} = f(-1 + \sqrt{3}) = \frac{2-2\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 62

Cho bất phương trình $m \cdot 9^{2x^2-x} - (2m+1) \cdot 6^{2x^2-x} + m \cdot 4^{2x^2-x} \leq 0$. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng $\forall x \geq \frac{1}{2}$.

A. $m < \frac{3}{2}$.

B. $m \leq \frac{3}{2}$.

C. $m \leq 0$.

D. $m < 0$.

Lời giải

Chọn C

Chia cả hai vế của bất phương trình cho 4^{2x^2-x} ta được:

$$m \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{2x^2-x} - (2m+1) \left(\frac{3}{2}\right)^{2x^2-x} + m \leq 0. \text{ Với } x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 2x^2 - x \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x^2-x} \geq 1.$$

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x^2-x}$, $t \geq 1$. Khi đó bài toán trở thành tìm m để bất phương trình

$$m \cdot t^2 - (2m+1) \cdot t + m \leq 0 \forall t \geq 1.$$

-Với $t = 1 \Rightarrow 0 \leq 1$ (Luôn đúng).

-Với $t > 1 \Rightarrow m \leq \frac{t}{t^2-2t+1} \forall t > 1$. Xét $f(t) = \frac{t}{t^2-2t+1} \forall t > 1$; $f'(t) = \frac{-t^2+1}{(t^2-2t+1)^2} < 0, \forall t > 1$.

Khi đó $m \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

Vậy $m \leq 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 63

Số giá trị nguyên dương của m để bất phương trình $(2^{x+2} - \sqrt{2})(2^x - m) < 0$ có tập nghiệm chứa không quá 6 số nguyên là:

A. 62.

B. 33.

C. 32.

D. 31.

Lời giải

Chọn C

Ta có: bất phương trình $(2^{x+2} - \sqrt{2})(2^x - m) < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x+2} - \sqrt{2} > 0 \\ 2^x - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x+2} > \sqrt{2} \\ 2^x < m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 > \frac{1}{2} \\ x < \log_2 m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x < \log_2 m \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < \log_2 m. \quad (*)$$

(Vì $m \geq 1 \Rightarrow \log_2 m \geq 0$ nên $(*)$ vô nghiệm).

Bất phương trình đã cho có tập nghiệm chứa không quá 6 số nguyên

$$\Leftrightarrow \log_2 m \leq 5 \Leftrightarrow m \leq 2^5 \Leftrightarrow m \leq 32$$

Mà m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 3; \dots; 32\}$.

Vậy có 32 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 64

Tìm tất cả các giá trị tham số m để phương trình 1 có 2 nghiệm thực phân biệt.

A. $m > 1$ hoặc $m < \frac{1}{2}$.

B. $\frac{3-\sqrt{6}}{2} < m < \frac{3+\sqrt{6}}{2}$.

C. $\frac{1}{2} < m < 1$.

D. $m > \frac{3+\sqrt{6}}{2}$ hoặc $m < \frac{3-\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$9 \cdot 9^{x^2-2x} - (2m+1)15^{x^2-2x+1} + (4m-2)5^{2x^2-4x+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 9^{(x-1)^2} - (2m+1)15^{(x-1)^2} + (4m-2)25^{(x-1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{2(x-1)^2} - (2m+1)\left(\frac{3}{5}\right)^{(x-1)^2} + 4m-2 = 0.$$

Đặt $t = \left(\frac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}$. Do $(x-1)^2 \geq 0$ nên $0 < t \leq 1$.

Phương trình có dạng: $t^2 - (2m+1)t + 4m-2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 2m-1 \end{cases}$

Do $0 < t \leq 1$ nên $t = 2m-1$.

Để phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt thì $0 < 2m-1 < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < 1$.

Câu 65

Tìm số giá trị nguyên của m để phương trình $4^{x+1} + 4^{1-x} = (m+1)(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 16 - 8m$ có nghiệm trên $[0; 1]$?

A. 2.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} 4^{x+1} + 4^{1-x} &= (m+1)(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 16 - 8m \Leftrightarrow 4(4^x + 4^{-x}) \\ &= 4(m+1)(2^x - 2^{-x}) + 16 - 8m \end{aligned}$$

Đặt $t = u(x) = 2^x - 2^{-x}$, $x \in [0; 1]$, ta có:

$$u'(x) = 2^x + 2^{-x} > 0, \forall x \in [0; 1]. \text{ Suy ra } u(0) \leq t \leq u(1) \text{ hay } t \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$$

$$\Rightarrow t^2 = 4^x + 4^{-x} - 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} \Rightarrow 4^x + 4^{-x} = t^2 + 2$$

Phương trình trở thành:

$$4(t^2 + 2) = 4t(m+1) + 16 - 8m \Leftrightarrow t^2 + 2 = t(m+1) + 4 - 2m$$

$$\Leftrightarrow t^2 - t(m+1) + 2m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m(t-2) = t^2 - t - 2 \Leftrightarrow m(t-2) = (t-2)(t+1) \Leftrightarrow m = t+1 \quad \left(t \in \left[0; \frac{3}{2}\right]\right) \Leftrightarrow t = m-1$$

Để phương trình đã cho có nghiệm trên $[0; 1]$ thì phương trình $t = m-1$ phải có nghiệm $t \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$.

Suy ra $m-1 \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$, hay $m \in \left[1; \frac{5}{2}\right]$.

Câu 66

Phương trình $4^x - 2(m+1) \cdot 2^x + 3m - 8 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi $m \in (a; b)$. Giá trị của $P = b - a$ là

A. $P = \frac{8}{3}$.

B. $P = \frac{19}{3}$.

C. $P = \frac{15}{3}$.

D. $P = \frac{35}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 2^x$, ta có phương trình $t^2 - 2(m+1)t + 3m - 8 = 0$ (1).

Với $x_1 < 0 < x_2$ thì $0 < 2^{x_1} < 1 < 2^{x_2}$, nên phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu x_1, x_2 khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm $0 < t_1 < 1 < t_2$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow t^2 - 2t - 8 = m(2t - 3)$ (2).

Vì $t = \frac{3}{2}$ không là nghiệm phương trình (2) nên: (2) $\Leftrightarrow \frac{t^2 - 2t - 8}{2t - 3} = m$ (3).

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - 2t - 8}{2t - 3}$, với $0 < t \neq \frac{3}{2}$.

Ta có $f'(t) = \frac{2t^2 - 6t + 22}{(2t - 3)^2} > 0$ với $0 < t \neq \frac{3}{2}$.

Bảng biến thiên:

t	0	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(t)$		+		+
$f(t)$	$\frac{8}{3}$	9	$+\infty$	$+\infty$
			$-\infty$	

Phương trình (1) có hai nghiệm $0 < t_1 < 1 < t_2$ khi và chỉ khi phương trình (3) có hai nghiệm

$0 < t_1 < 1 < t_2$. Từ bảng biến thiên ta suy ra giá trị cần tìm của m là $\frac{8}{3} < m < 9$.

Như vậy $a = \frac{8}{3}$, $b = 9$. Do đó $P = b - a = 9 - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$.

Câu 67

Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $5^{x+2y} + \frac{3}{3^{xy}} + x + 1 = \frac{5^{xy}}{5} + 3^{-x-2y} + y(x-2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x + y$.

A. $T_{\min} = 2 + 3\sqrt{2}$.

B. $T_{\min} = 3 + 2\sqrt{3}$.

C. $T_{\min} = 1 + \sqrt{5}$.

D. $T_{\min} = 5 + 3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Theo đề ra ta có

$$5^{x+2y} + \frac{3}{3^{xy}} + x + 1 = \frac{5^{xy}}{5} + 3^{-x-2y} + y(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 5^{x+2y} - \frac{1}{3^{x+2y}} + x + 2y = 5^{xy-1} - \frac{1}{3^{xy-1}} + xy - 1$$

Xét $f(t) = 5^t - \frac{1}{3^t} + t \Rightarrow f'(t) = 5^t \ln 5 + 3^{-t} \ln 3 + 1 > 0$

$\Rightarrow x + 2y = xy - 1 \Rightarrow y = \frac{x+1}{x-2}$. Do $y > 0, x > 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x-2} > 0 \Rightarrow x > 2$

Ta có: $T = x + y = x + \frac{x+1}{x-2} = \frac{x^2 - x + 1}{x-2}$

$$T' = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \in (2; +\infty) \\ x = 2 - \sqrt{3} \notin (2; +\infty) \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	2	$2 + \sqrt{3}$	$+\infty$
T'	-	0	+
T	$+\infty$	$3 + 2\sqrt{3}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $T_{\min} = 3 + 2\sqrt{3}$ tại $x = 2 + \sqrt{3}$.