

§3 HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC

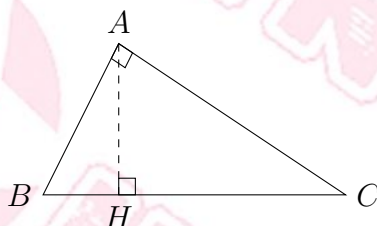
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cho tam giác ABC , ta quy ước các kí hiệu sau.

- $BC = a, CA = b, AB = c$.
- $p = \frac{a+b+c}{2}$ gọi là nửa chu vi của tam giác ABC .
- m_a, m_b, m_c là độ dài đường trung tuyến tương ứng kẻ từ đỉnh A, B, C của tam giác ABC .
- h_a, h_b, h_c là độ dài đường cao tương ứng kẻ từ đỉnh A, B, C của tam giác ABC .
- l_a, l_b, l_c là độ dài đường phân giác tương ứng kẻ từ đỉnh A, B, C của tam giác ABC .
- R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

1 HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH .



- Định lí Pitago:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

- Nếu biết 2 cạnh góc vuông thì có thể tính được đường cao AH bởi công thức:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

- Tích 2 cạnh góc vuông bằng tích cạnh huyền với đường cao tương ứng:

$$AB \cdot AC = BC \cdot AH$$

- Nếu biết 1 cạnh góc vuông và cạnh huyền thì có thể tính được hình chiếu của cạnh góc vuông đó lên cạnh huyền nhờ công thức:

$$AB^2 = BH \cdot BC; \quad AC^2 = CH \cdot BC$$

2 ĐỊNH LÝ HÀM SỐ COSIN, CÔNG THỨC TRUNG TUYẾN.

Định lý hàm số cosin được phát minh bởi nhà toán học Al Kashi (1380 - 1429). Đây là một mở rộng của định lý Pythagore. Định lý hàm số cosin đưa ra một phương pháp giúp ta tìm được một cạnh của tam giác bất kì khi biết độ dài hai cạnh còn lại và số đo của góc xen giữa hai cạnh đó, từ đó cũng cho chúng ta tính được số đo của các góc còn lại của tam giác. Định lý được phát biểu như sau:

Định lý 1. Trong một tam giác bất kỳ, bình phương một cạnh bằng tổng bình phương của hai cạnh còn lại trừ đi hai lần tích của chúng với cosin của góc xen giữa hai cạnh đó.

Nếu ký hiệu a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC thì ta có:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases}$$

Từ định lý hàm số cosin ta cũng suy ra công thức tính cosin các góc của tam giác theo độ dài các cạnh của tam giác như sau:

$$\begin{cases} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases}$$

Mặt khác, sử dụng định lý hàm số cosin có thể giúp ta tìm được độ dài các đường trung tuyến theo ba cạnh của một tam giác. Cụ thể, nếu ký hiệu m_a, m_b, m_c là độ dài các đường trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C thì:

$$\begin{cases} m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \\ m_b^2 = \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4} \\ m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} \end{cases}$$

3 ĐỊNH LÝ SIN

Định lý 2. Cho tam giác ABC , gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Đặt $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

4 CÁC CÔNG THỨC DIỆN TÍCH TAM GIÁC

Diện tích S của tam giác ABC được tính bởi một trong các công thức

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c \\ &= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C \\ &= \frac{abc}{4R} \\ &= pr \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned}$$

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Một số bài tập giúp nắm vững lý thuyết

Mục này đưa ra một số bài tập mà việc giải quyết chỉ dùng đến các kiến thức về tích vô hướng của hai véc-tơ ở bài trước, chưa dùng đến các công thức về hệ thức lượng ở bài 3. Kết quả của các bài tập này sẽ dùng vào việc giới thiệu các công thức mới về hệ thức lượng trong tam giác.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 1 ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC

- Tính $\overrightarrow{BC}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
- Tính $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC}$ từ đó tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo độ dài các cạnh của tam giác.
- Chứng minh rằng $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$.

Lời giải.

- $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.
- $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Từ đó suy ra

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}.$$

- Theo câu trên ta có

$$\begin{aligned} AB \cdot AC \cdot \cos A &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} \\ \Leftrightarrow \cos A &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến.

- Tính $\overrightarrow{BC}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
- Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo độ dài các cạnh của tam giác.
- Tính $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
- Chứng minh $AM^2 = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}$.

Lời giải.

- Như bài trên.
- Như bài trên.
- $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$
- Ta có

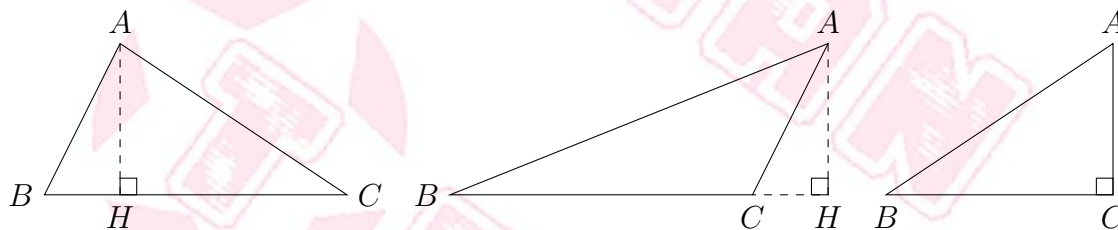
$$\begin{aligned} AM^2 &= \frac{AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{4} \\ &= \frac{AB^2 + AC^2 + AB^2 + AC^2 - BC^2}{4} \\ &= \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4} \end{aligned}$$

□

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC , đặt $AB = c$, $CA = b$, $BC = a$. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài các đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC .

- a) Chứng minh rằng $h_a = b \sin C = c \sin B$; $h_b = c \sin A = a \sin C$; $h_c = a \sin B = b \sin A$.
b) Gọi S là diện tích tam giác ABC , chứng minh rằng

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B$$



Lời giải.

- a) Trong cả ba trường hợp $\widehat{C}$ nhọn, vuông, tù, ta đều có $\sin B = \frac{h_a}{AB}$. Suy ra $h_a = c \sin B$. Tương tự ta cũng có $h_a = b \sin C$. Thay đổi vai trò A, B, C ta được

$$h_a = b \sin C = c \sin B; h_b = c \sin A = a \sin C; h_c = a \sin B = b \sin A$$

- b) Ta có $S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}a \cdot b \sin C$, còn lại tương tự.

□

Ví dụ 4. Chứng minh rằng diện tích tam giác ABC được tính bởi công thức $S = \frac{abc}{4R}$.

Lời giải.

Theo định lý sin, ta có $\frac{c}{\sin C} = 2R$. Suy ra $\sin C = \frac{c}{2R}$. Từ đó

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$

□

Ví dụ 5. Cho đường tròn tâm I bán kính r nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA của tam giác tại K, L, M . Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC . Chứng minh rằng $S = p \cdot r$.

Lời giải.

Ta có $r = IK = IM = IL$.

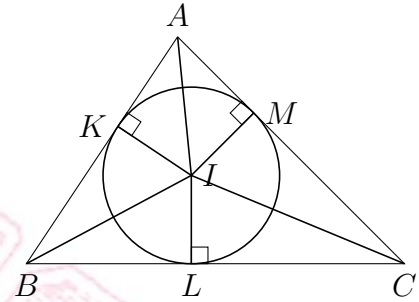
Theo tính chất hai tiếp tuyến cùng xuất phát tại một điểm ta có $AM = AK$, $BK = BL$, $CL = CM$. Chu vi tam giác là

$$2p = AM + AK + BK + BL + CL + CM = 2(AK + BL + CK)$$

Suy ra $p = AK + BL + CM$.

Diện tích tam giác ABC là

$$\begin{aligned} S &= 2(S_{AKI} + S_{BLI} + S_{CMI}) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}AK.r + \frac{1}{2}BL.r + \frac{1}{2}CM.r\right) \\ &= (AK + BL + CM).r \\ &= pr \end{aligned}$$



Ví dụ 6. Cho tam giác ABC diện tích S . Chứng minh rằng

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A \\ &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \cdot AC}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} \end{aligned}$$

Ví dụ 7. Chứng minh công thức tính diện tích sau (công thức Hê-rông)

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

với p là nửa chu vi tam giác, $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ là độ dài các cạnh.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}.$$

Dùng kết quả bài trên, ta có

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{b^2 c^2 - \frac{1}{4} (b^2 + c^2 - a^2)^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} [(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]} \\
 &= \sqrt{\frac{b+c+a}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2}} \\
 &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}
 \end{aligned}$$

□

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho hai véc-tơ $a = (a_1; a_2)$, $b = (b_1; b_2)$. Chứng minh rằng

$$Q = \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 Q^2 &= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \\
 &= a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 b_2 a_2 b_1 \\
 &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2
 \end{aligned}$$

Suy ra $Q = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$.

□

Ví dụ 9. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. Chứng minh rằng diện tích tam giác ABC là

$$S = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} (x_B - x_A) & (x_C - x_A) \\ (y_B - y_A) & (y_C - y_A) \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)|$$

trong đó, người ta đặt $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ (định thức cấp 2).

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB} &= (x_B - x_A; y_B - y_A) \\
 \overrightarrow{AC} &= (x_C - x_A; y_C - y_A)
 \end{aligned}$$

Ta đã biết $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$. Kết quả tính toán về toạ độ của bài trên ta được

$$S = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)|.$$

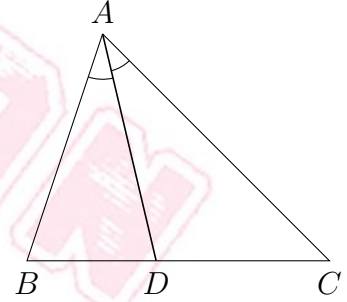
□

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC , gọi l_a là độ dài đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC . Chứng minh rằng $l_a = \frac{bc \sin A}{(b+c) \sin \frac{A}{2}}$.

Lời giải.

Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC . Ta có $l_a = AD$. Ta có

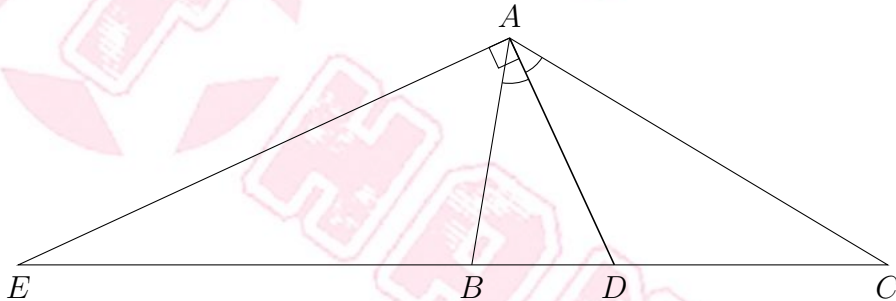
$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{ABD} + S_{ACD} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A &= \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin \frac{A}{2} \\ \Leftrightarrow cb \sin A &= l_a (c+b) \sin \frac{A}{2} \\ \Leftrightarrow l_a &= \frac{bc \sin A}{(b+c) \sin \frac{A}{2}} \end{aligned}$$



□

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC có $AB < AC$ (hay $c < b$), gọi l'_a là độ dài đường phân ngoài kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC . Chứng minh rằng $l'_a = \frac{bc \sin A}{(b-c) \cos \frac{A}{2}}$.

Lời giải.



Gọi E là chân đường phân giác ngoài kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC . Ta có $l'_a = AE$. Ta có

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{ACE} - S_{ABE} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A &= \frac{1}{2} AC \cdot AE \cdot \sin \left(90^\circ + \frac{A}{2} \right) - \frac{1}{2} AB \cdot AE \cdot \sin \left(90^\circ - \frac{A}{2} \right) \\ \Leftrightarrow cb \sin A &= l'_a (b-c) \cos \frac{A}{2} \\ \Leftrightarrow l'_a &= \frac{bc \sin A}{(b-c) \cos \frac{A}{2}} \end{aligned}$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho tam giác ABC có $AB = 1$, $AC = \sqrt{3}$, $\hat{A} = 60^\circ$.

- a) Tính $\overrightarrow{BC}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
b) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

- c) Tính độ dài BC .

Lời giải.

- a) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
c) $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 + 3 - \sqrt{3}$. Suy ra $BC = \sqrt{4 - \sqrt{3}}$.

□

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $AD = 2a$ và $\widehat{DAB} = 60^\circ$.

- a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ c) Tính AC
b) Tính $\overrightarrow{AC}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$. d) Tính BD

Lời giải.



- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \cdot AD \cdot \cos \widehat{DAB} = a \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} = a^2$.
b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
c) $AC^2 = AB^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a^2 + 4a^2 + 2a^2 = 7a^2$. Suy ra $AC = a\sqrt{7}$.
d) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$. Suy ra $BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 3a^2$. Suy ra $BD = a\sqrt{3}$.

□

Bài 3. Chứng minh rằng tổng bình phương các đường chéo của hình bình hành bằng tổng bình phương các cạnh.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Suy ra $AC^2 = AB^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
Tương tự $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$. Suy ra $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
Từ đó suy ra $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2) = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.

□

Bài 4. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 5$, $BC = 4$. Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

$$\bullet \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = \frac{4 + 25 - 16}{2} = \frac{13}{2}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= -\frac{5}{2} \\ \bullet \quad \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= \frac{37}{2} \end{aligned}$$

□

Bài 5. Cho tam giác ABC có trọng tâm G , M là điểm bất kì. Chứng minh rằng

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Lời giải.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} &MA^2 + MB^2 + MC^2 \\ &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \end{aligned}$$

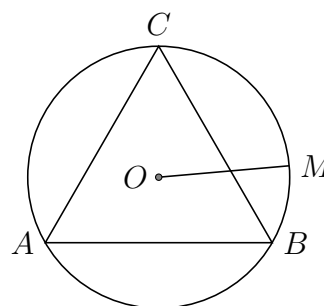
□

Bài 6. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O , M là một điểm thay đổi trên đường tròn. Chứng minh rằng $MA^2 + MB^2 + MC^2$ không đổi.

Lời giải.

Gọi R là bán kính của đường tròn. Áp dụng bài trên ta có

$$\begin{aligned} &MA^2 + MB^2 + MC^2 \\ &= 3MO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 \\ &= 3R^2 + R^2 + R^2 + R^2 \\ &= 6R^2 \end{aligned}$$



□

Dạng 2. Xác định các yếu tố còn lại của một tam giác khi biết một số yếu tố về cạnh và góc của tam giác đó

Ở dạng toán này, chúng ta áp dụng trực tiếp định lý hàm số cosin hoặc hệ quả của định lý hàm số cosin để tìm các yếu tố còn lại của tam giác đã cho.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 2 ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $b = 5, c = 7$ và $\cos A = \frac{3}{5}$. Tính cạnh a và cosin các góc còn lại của tam giác đó.

Lời giải.

Ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 25 + 49 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \frac{3}{5} = 32 \Rightarrow a = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{32 + 49 - 25}{56\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{32 + 25 - 49}{40\sqrt{2}} = \frac{8}{40\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

□

Ví dụ 2. Một người đứng trên ngọn hải đăng A ở bờ biển quan sát hai chiếc tàu ở hai điểm B và C . Khoảng cách từ người đó tới chiếc tàu ở điểm B và C lần lượt là 5km và 6km. Góc tạo bởi hai hướng nhìn AB và AC là 60° . Tính khoảng cách d giữa hai chiếc tàu.

Lời giải.

Xét tam giác ABC với $AC = 6$ km, $AB = 5$ km, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Áp dụng định lí cos ta có

$$BC^2 = AB^2 + CA^2 - 2 \cdot CA \cdot AB \cdot \cos \widehat{BAC}$$

Từ đó suy ra $BC^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 31 \Rightarrow BC = \sqrt{31}$.

Vậy khoảng cách giữa hai chiếc tàu là $d = \sqrt{31}$ km.

□

Ví dụ 3. Cho x là số thực lớn hơn 1 và $\begin{cases} a = x^2 + x + 1 \\ b = 2x + 1 \\ c = x^2 - 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và tính số đo của góc đối diện với cạnh a .

Lời giải.

Do $x > 1$ nên dễ dàng chứng minh được: $\begin{cases} a + b > c \\ b + c > a, \\ c + a > b \end{cases}$ từ đó suy ra a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Gọi A là góc đối diện với cạnh a , khi đó: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$\text{Ta có } \begin{cases} a^2 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \\ b^2 = 4x^2 + 4x + 1 \\ c^2 = x^4 - 2x^2 + 1 \\ bc = 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \end{cases}$$

Từ đó suy ra $b^2 + c^2 - a^2 = -bc \Rightarrow \cos A = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = 120^\circ$.

□

Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC$ có các cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Biết rằng tồn tại số tự nhiên $n > 2$ sao cho $a^n = b^n + c^n$. Chứng minh rằng A là góc có số đo lớn nhất của tam giác, từ đó suy ra

$\triangle ABC$ có 3 góc nhọn.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $\begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases}$, do đó $\begin{cases} A > B \\ A > C \end{cases}$. Vậy A là góc lớn nhất của $\triangle ABC$.

Ta có $a^n = b^n + c^n \Leftrightarrow a^2 = b^2 \left(\frac{b}{a}\right)^{n-2} + c^2 \left(\frac{c}{a}\right)^{n-2}$.

Do $\begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases}$ nên $\begin{cases} \frac{b}{a} < 1 \\ \frac{c}{a} < 1 \end{cases}$. Từ đó suy ra $a^2 < b^2 + c^2$ hay $b^2 + c^2 - a^2 > 0$.

Mà $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ nên suy ra $\cos A > 0$ hay A là góc nhọn, do đó B, C cũng là các góc nhọn.

□

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có $m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}c$. Chứng minh rằng:

$$m_a + m_b + m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c).$$

Lời giải.

Ta có $m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}c \Rightarrow m_c^2 = \frac{3}{4}c^2 \Rightarrow \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} = \frac{3}{4}c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 2c^2$.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2(b^2 + c^2) - a^2 = 3b^2 \\ 2(c^2 + a^2) - b^2 = 3a^2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 4m_a^2 = 3b^2 \\ 4m_b^2 = 3a^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} m_a = \frac{\sqrt{3}}{2}b \\ m_b = \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{cases} \\ &\Rightarrow m_a + m_b + m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c) \end{aligned}$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho tam giác ABC có $AC = 10$ cm, $BC = 16$ cm và $C = 120^\circ$, tính độ dài cạnh AB .

Lời giải.

Áp dụng định lý hàm số cosin ta có $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cos C$ ta suy ra $AB = \sqrt{516}$ cm □

Bài 2. Cho tam giác ABC có $BC = 3$, $CA = 4$ và $AB = 6$, Tính cosin của góc có số đo lớn nhất của tam giác đã cho.

Lời giải.

Do $AB > AC > BC$ nên $C > B > A$.

Áp dụng định lý hàm số cosin ta có $\cos C = -\frac{11}{24}$.

□

Bài 3. Cho a^2, b^2, c^2 là độ dài các cạnh của một tam giác nào đó và a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác ABC . Chứng minh rằng tam giác ABC có ba góc nhọn.

Lời giải.

Do a^2, b^2, c^2 là độ dài các cạnh của một tam giác nên

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - c^2 > 0 \\ b^2 + c^2 - a^2 > 0 \\ c^2 + a^2 - b^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \cos A, \cos B, \cos C > 0.$$

□

Bài 4. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có $AB = CD = a$, $AD = b$, $BC = c$. Chứng minh rằng $\cos A = \frac{b-c}{2a}$.

Lời giải.

Áp dụng định lý hàm số cosin cho hai tam giác BAD, BCD và chú ý $\widehat{BAD} + \widehat{BCD}$ ta suy ra điều phải chứng minh. □

Bài 5. Cho tam giác ABC có $m_a = 15, m_b = 18, m_c = 27$.

- Tính diện tích của tam giác ABC .
- Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC .

Lời giải.

- Gọi G là trọng tâm ΔABC ; A', B', C' lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB và D là điểm đối xứng của A qua G . Khi đó ta có $BGCD$ là hình bình hành.

$$S_{\Delta ABC} = 3S_{\Delta GBC} = \frac{1}{2}S_{\Delta BGCD} = S_{\Delta BGD}.$$

Tam giác BGD có độ dài các cạnh lần lượt là 10, 12, 18 nên $S_{\Delta BGD} = \sqrt{20 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 2} = 40\sqrt{2}$.

$$\text{Vậy } S_{\Delta ABC} = 120\sqrt{2}.$$

- Áp dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến ta tính được $a = 2\sqrt{209}, b = 8\sqrt{11}, c = 2\sqrt{41}$.

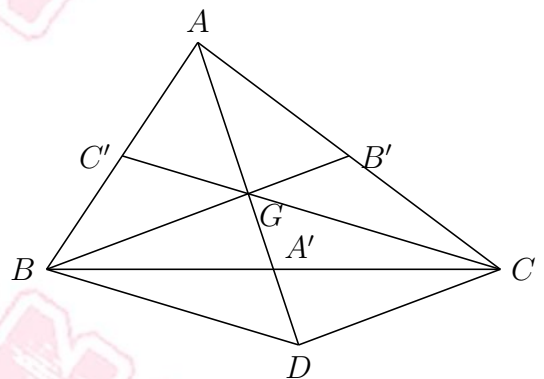
□

Bài 6. Cho ΔABC có các cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$ thỏa mãn hệ thức

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}.$$

Chứng minh rằng $B = 60^\circ$.

Lời giải.



Ta có:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} &= \frac{3}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{b+c} = 3 \\
 &\Leftrightarrow 1 + \frac{c}{a+b} + 1 + \frac{a}{b+c} = 3 \\
 &\Leftrightarrow \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} = 1 \\
 &\Leftrightarrow c(b+c) + a(a+b) = (a+b)(b+c) \\
 &\Leftrightarrow c^2 + bc + a^2 + ab = ab + b^2 + ac + bc \\
 &\Leftrightarrow c^2 + a^2 - b^2 = ac \\
 &\Leftrightarrow \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow \cos B = \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow B = 60^\circ.
 \end{aligned}$$

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 7. Cho tam giác ABC có $BC = 10$. I là điểm trên cạnh BC sao cho $2IB = 3IC$. Đường tròn tâm I bán kính 3 tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại các điểm M, N . Tính độ dài các cạnh AB, AC .

Lời giải.

Trước hết ta có
$$\begin{cases} \sin B = \frac{IM}{BI} = \frac{1}{2} \\ \sin C = \frac{IN}{CI} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Từ đó suy ra
$$\begin{cases} \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos C = \frac{\sqrt{7}}{4} \end{cases} \quad (\text{Do } B, C \text{ là các góc nhọn}).$$

Đặt $AB = c$, $AC = b$. Do AI là phân giác góc A nên $\frac{c}{b} = \frac{6}{4} \Rightarrow 2c = 3b$.

Mặt khác, theo định lý cosin trong tam giác ABC ta có

$$\begin{cases} c^2 = b^2 + BC^2 - 2b \cdot BC \cdot \cos C \\ b^2 = c^2 + BC^2 - 2c \cdot BC \cdot \cos B \end{cases}$$

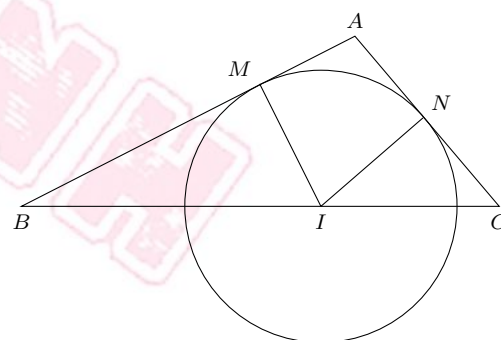
Thay số vào ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 2c = 3b \\ c^2 = b^2 + 100 - 5\sqrt{7} \cdot b \\ b^2 = c^2 + 100 - 10\sqrt{3} \cdot c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2(3\sqrt{3} - \sqrt{7}) \\ c = 3(3\sqrt{3} - \sqrt{7}) \end{cases}$$

□

Bài 8. Cho $\triangle ABC$ có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và có diện tích S . Chứng minh rằng:

a) $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$.



- b) Nếu $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1$ thì $\cot B + \cot C = 2 \cot A$, ở đó m_b, m_c là độ dài các trung tuyến xuất phát từ B, C .

Lời giải.

- a) Theo định lý hàm số cosin ta có: $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A$.

Mặt khác, $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ nên ta có

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} = \frac{2bc \cos A}{2bc \sin A} = \cot A$$

- b) Ta có $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1 \Leftrightarrow \frac{c^2}{b^2} = \frac{m_b^2}{m_c^2} = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

Từ đó suy ra $2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 - b^4 \Rightarrow 2a^2(c^2 - b^2) = c^4 - b^4 = (c^2 + b^2)(c^2 - b^2)$.

Do $b \neq c$ nên $c^2 - b^2 \neq 0$, do đó $b^2 + c^2 = 2a^2$.

$$\text{Từ } \begin{cases} \cot B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4S} \\ \cot C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} \end{cases} \Rightarrow \cot B + \cot C = \frac{2a^2}{4S}. \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } 2 \cot A = 2 \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} = \frac{2a^2}{4S}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra điều phải chứng minh. □

Dạng 3. Diện tích tam giác

Dạng này thường sử dụng các công thức về diện tích sau

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c \\ &= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C \\ &= \frac{abc}{4R} \\ &= pr \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned}$$

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 3 ❖❖❖

Bài 1. Cho $A(1, 5); B(4, -1); C(-4, -5)$. Tính diện tích của tam giác ABC .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3, -6); \overrightarrow{BC} = (-8, -4)$, nên tam giác ABC vuông tại B .

Do đó, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{1}{2}.3\sqrt{5}.4\sqrt{5} = 30(\text{đvdt})$. □

Bài 2. Tính diện tích tam giác ABC , biết chu vi tam giác bằng $2p$, các góc $\hat{A} = \alpha^\circ, \hat{B} = \beta^\circ$.

Lời giải.

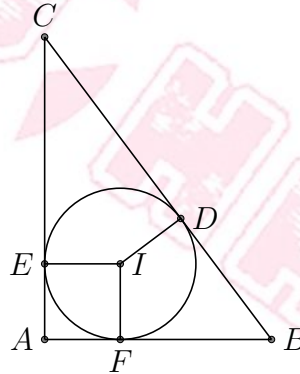
Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}$. Theo định lý hàm sin ta có $abc = 8R^3 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$, suy ra $S = 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$.

và $R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{2p}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\pi - \alpha - \beta)}$. Vậy $S =$

$$2 \left(\frac{2p}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\pi - \alpha - \beta)} \right)^2 \cdot (\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin(\pi - \alpha - \beta)) \quad \square$$

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 90^\circ$, bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = 7$ và bán kính đường tròn nội tiếp là $r = 3$. Tính diện tích S của tam giác.

Lời giải.



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle ABC$.

Gọi tiếp điểm của đường tròn nội tiếp (I) với các cạnh BC, CA, AB lần lượt là D, E, F .

Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên $BC = 2R = 14$ và $AE = AF = r = 3$.

$$\text{Ta có } p = \frac{AB + AC + BC}{2} = AE + BC = 14 + 3 = 17$$

$$\text{Vậy } S = pr = 17 \times 3 = 51$$

□

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn $(O, 3)$. Biết rằng $\hat{A} = \hat{B} = 30^\circ$. Tính diện tích S của $\triangle ABC$

Lời giải.

Áp dụng định lý sin trong $\triangle ABC$ ta có:

$$BC = 2R \sin A = 6 \sin 30^\circ = 3 \text{ và } AC = 2R \sin B = 6 \sin 30^\circ = 3$$

$$\text{Ta có } \hat{C} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{A} = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ.$$

$$\text{Vậy } S = \frac{1}{2} BC \cdot AC \cdot \sin \hat{C} = \frac{3^2}{2} \sin 120^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

□

Bài 5. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{2Rr}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2Rr} = \frac{1}{2 \cdot \frac{abc}{4s} \cdot \frac{S}{p}} = \frac{2p}{abc} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}$$

$$\text{Bất đẳng thức ban đầu} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}$$

Ta thấy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right) \\ &\geq \sqrt{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2}} + \sqrt{\frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^2}} + \sqrt{\frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{a^2}} \\ &= \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} \end{aligned}$$

□

Bài 6. Cho hình vuông $MNPQ$ nội tiếp trong tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$S_{ABC} \geq 2S_{MNPQ}.$$

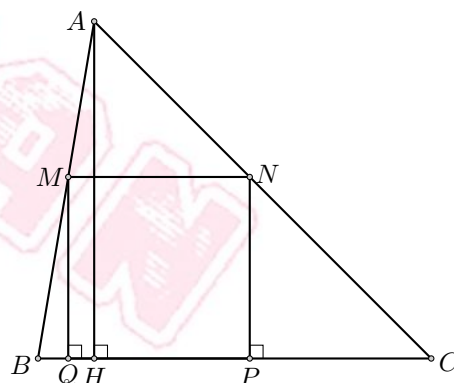
Lời giải.

Ta thấy:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &\geq 2S_{MNPQ} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} BC \cdot AH &\geq 2MN \cdot PQ \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} &\geq \frac{MN}{BC} \cdot \frac{MQ}{AH} \end{aligned}$$

Mà

$$\begin{aligned} \frac{MN}{BC} \cdot \frac{MQ}{AH} &= \frac{AM}{AB} \cdot \frac{BM}{AB} = \frac{1}{AB^2} \cdot AM \cdot BM \\ &\leq \frac{1}{AB^2} \left(\frac{AM + BM}{2} \right)^2 = \frac{1}{AB^2} \cdot \frac{AB^2}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



□

► Dạng 4. Chứng minh hệ thức liên quan giữa các yếu tố trong tam giác

- Dùng các hệ thức cơ bản để biến đổi vế này thành vế kia hoặc chứng minh cả hai vế cũng bằng một hệ thức đã biết là đúng.
- Khi chứng minh cần khai thác các giả thiết và kết luận để tìm đúng các hệ thức thích hợp làm trung gian cho quá trình biến đổi.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 4 ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. p là nửa chu vi tam giác. Chứng minh rằng:

$$abc \cdot (\cos A + \cos B + \cos C) = a^2(p - a) + b^2(p - b) + c^2(p - c).$$

Lời giải.

Áp dụng định lý cos trong $\triangle ABC$, ta có:

$$\begin{aligned} VT &= abc \cdot \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) \\ &= a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + b \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} + c \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \\ &= \frac{a^2}{2}(b + c - a) + \frac{b^2}{2}(a + c - b) + \frac{c^2}{2}(a + b - c) \\ &= a^2(p - a) + b^2(p - b) + c^2(p - c) = VP. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

□

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AM , $\widehat{AMB} = \alpha$, $AC = b$, $AB = c$, S là diện tích $\triangle ABC$.
Với $0 < \alpha < 90^\circ$. Chứng minh: $\cot \alpha = \frac{b^2 - c^2}{4S}$.

Lời giải.

Đặt $BC = a$.

Gọi H là chân đường cao kẻ từ A đến BC .

$$\text{Có } \triangle AHM \text{ vuông} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{HM}{AH} = \frac{MB - BH}{AH} = \frac{BC}{2AH} - \frac{BH}{AH}.$$

$$\text{Hay } \cot \alpha = \frac{a}{2AH} - \frac{BH}{AH} \quad (1)$$

Mặt khác, áp dụng định lý cos và công thức tính diện tích:

$$\begin{aligned} \frac{b^2 - c^2}{4S} &= \frac{(a^2 + c^2 - 2ac \cos B) - c^2}{2AH \cdot a} \\ &= \frac{a^2 - 2ac \cos B}{2AH \cdot a} = \frac{a}{2AH} - \frac{c \cdot \cos B}{AH}. \end{aligned}$$

$$\text{Hay } \frac{b^2 - c^2}{4S} = \frac{a}{2AH} - \frac{BH}{AH} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \cot \alpha = \frac{b^2 - c^2}{4S}.$$

□

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G và $\widehat{GAB} = \alpha$, $\widehat{GBC} = \beta$, $\widehat{GCA} = \gamma$. Đặt $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ và S là diện tích $\triangle ABC$. Chứng minh:

$$\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4S}.$$

Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC . Kẻ $MH \perp AB$.

$$\triangle AMH \text{ vuông} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{AH}{AM}.$$

$$\triangle BHM \text{ vuông} \Rightarrow \cos B = \frac{BH}{MB} = \frac{2BH}{a}.$$

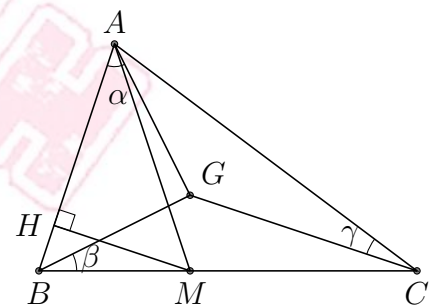
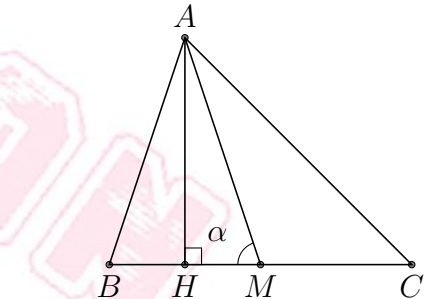
$$\text{Ta có } AB = HA + HB \Rightarrow c = AM \cdot \cos \alpha + \frac{a}{2} \cdot \cos B$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{AM} \left(c - \frac{a}{2} \cos B \right) \quad (1)$$

Mặt khác, áp dụng định lý hàm số sin cho $\triangle AMB$:

$$\frac{MB}{\sin \alpha} = \frac{MA}{\sin B} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{AM} \cdot MB \sin B = \frac{a}{2AM} \sin B \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được:



$$\cot \alpha = \frac{c - \frac{a}{2} \cos B}{\frac{a}{2} \sin B} = \frac{2c - a \cos B}{a \cdot \frac{b}{2R}} = \frac{R(4c - 2a \cos B)}{ab} = \frac{4c^2 - 2ac \cos B}{\frac{abc}{R}} = \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{4S}.$$

$$\text{Tương tự: } \cot \beta = \frac{3a^2 + c^2 - b^2}{4S}; \cot \gamma = \frac{3b^2 + a^2 - c^2}{4S}.$$

$$\text{Do đó, } \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{4S} + \frac{3a^2 + c^2 - b^2}{4S} + \frac{3b^2 + a^2 - c^2}{4S} = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4S}. \quad \square$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. R là độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Chứng minh rằng: $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} R$.

Lời giải.

Áp dụng định lý cos và sin, ta được:

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2) R}{abc}.$$

Tương tự với $\cot B$ và $\cot C$, cộng vế theo vế được đpcm. $\square$

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G , R là độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác. Chứng minh rằng:

$$3 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) = \frac{3}{4R^2} (GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

Lời giải.

Áp dụng công thức trung tuyến, ta được $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Áp dụng định lý sin: $a = 2R \sin A$; $b = 2R \sin B$; $c = 2R \sin C$.

$$\text{Suy ra } m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 3R^2 (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) = 3R^2 (3 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C) \quad (1)$$

$$\text{Theo tính chất trọng tâm, có } m_a = \frac{3}{2}GA, m_b = \frac{3}{2}GB, m_c = \frac{3}{2}GC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) thu được đẳng thức cần chứng minh. $\square$

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ có h_a , h_b , h_c lần lượt là độ dài đường cao xuất phát từ A , B , C ; p là nửa chu vi. R , r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng:

$$p^2 = \frac{R}{2r^2} h_a h_b h_c$$

Lời giải.

$$\text{Ta có } ah_a = bh_b = ch_c = 2S \Rightarrow h_a h_b h_c = \frac{2S}{abc}.$$

$$\text{Lại có } S = pr \Rightarrow \frac{2p^2 r^2}{h_a h_b h_c} = \frac{abc}{4S} = R. \quad \square$$

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ có $\sin^2 B + \sin^2 C = 2 \sin^2 A$. Chứng minh $\cos A \geq \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Áp dụng định lý sin, có:

$$\sin^2 B + \sin^2 C = 2 \sin^2 A \Leftrightarrow \frac{b^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2} = 2 \frac{a^2}{4R^2} \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 2a^2.$$

Áp dụng định lý cos, có:

$$b^2 + c^2 = 2(b^2 + c^2 - 2bc \cos A) \Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2}{4bc}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si: $b^2 + c^2 \geq 2bc$. Suy ra $\cos A \geq \frac{1}{2}$. □

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$; l_a , l_b , l_c lần lượt là độ dài đường phân giác xuất phát từ A , B , C . Chứng minh: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c}$.

Lời giải.

Gọi D là chân đường phân giác kẻ từ A . Ta có:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} \Leftrightarrow \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}b.l_a \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2}c.l_a \sin \frac{A}{2} \Leftrightarrow l_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}.$$

Vì $0^\circ < \hat{A} < 180^\circ$ nên $0 < \cos \frac{A}{2} < 1$.

$$\text{Suy ra } l_a < \frac{2bc}{b+c} \Leftrightarrow \frac{1}{l_a} > \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}.$$

Tương tự với l_b và l_c . Cộng vế theo vế ta được đpcm. □

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ diện tích S có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$.

Lời giải.

Theo công thức Hê-rông: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

$$\text{Ta có } \sqrt{(p-a)(p-b)} \leq \frac{p-a+p-b}{2} = \frac{c}{2}. \text{ Tương tự có } \sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{a}{2}; \sqrt{(p-a)(p-c)} \leq \frac{b}{2}.$$

$$\text{Do đó } S^2 \leq p \cdot \frac{abc}{8} = \frac{(a+b+c)abc}{16}.$$

$$\text{Lại có } (a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 3abc(a+b+c) \geq 3 \cdot 16 \cdot S^2.$$

Suy ra đpcm. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$; trọng tâm G và tâm đường tròn nội tiếp I . Biết GI vuông góc với đường phân giác trong của $\widehat{BCA}$. Chứng minh: $\frac{a+b+c}{3} = \frac{2ab}{a+b}$.

Lời giải.

Vẽ $GH \perp AC$, $GK \perp BC$, $ID \perp AC$.

Gọi L và N lần lượt là giao điểm của IG với AC và BC .

$$\text{Ta có: } S_{\triangle CLN} = 2S_{\triangle LIC} = ID \cdot IC = r \cdot LC \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } S_{\triangle CLN} = S_{\triangle GLC} + S_{\triangle GCN} = \frac{1}{2}(GH \cdot LC + GK \cdot CN) \quad (2)$$

Do $\triangle CLN$ cân nên $LC = CN$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $r.LC = \frac{1}{2}.LC(GH + GK) \Leftrightarrow 2r = GH + GK$.

Gọi h_a, h_b lần lượt là độ dài đường cao của $\triangle ABC$ xuất phát từ A và B .

Ta có: $\frac{GK}{h_a} = \frac{MG}{MA} = \frac{1}{3}; \frac{GH}{h_b} = \frac{1}{3}$. Do đó $2r = \frac{1}{3}(h_a + h_b)$.

Mà $S_{\triangle ABC} = pr = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b \Rightarrow h_a = \frac{2pr}{a}; h_b = \frac{2pr}{b}$.

Suy ra $2r = \frac{2}{3}pr \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{3}p \left(\frac{a+b}{ab} \right) \Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} = \frac{a+b+c}{3}$. □

Bài 8. Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp với $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$ và p là nửa chu vi, S là diện tích tứ giác. Chứng minh rằng:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \frac{B+D}{2}}.$$

Lời giải.

Áp dụng định lý hàm số cos trong các tam giác ABD, CBD ta có:

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C.$$

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C.$$

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2ad \cos A - 2bc \cos C. (1)$$

Bình phương hai vế của (1) ta có:

$$(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4(ad \cos A - 2bc \cos C)^2. (2)$$

Ta có:

$$S = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}ad \sin A + \frac{1}{2}bc \sin C.$$

$$16S^2 = 4(ad \sin A + bc \sin C)^2. (3)$$

Cộng từng vế (2), (3) ta được:

$$\begin{aligned} (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 + 16S^2 &= 4[a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd(\cos A \cos C - \sin A \sin C)] \\ &= 4[a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd(\cos(A+C))] \\ &= 4\left[a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd\left(2\frac{\cos^2(A+C)}{2} - 1\right)\right] \\ &= 4\left[(ad+bc)^2 - 4abcd\frac{\cos^2(A+C)}{2}\right]. (4) \end{aligned}$$

Từ (4) suy ra

$$\begin{aligned} 16S^2 &= 4(ad+bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 16abcd\frac{\cos^2(A+C)}{2} \\ &= (2ad+2bc+a^2+d^2-b^2-c^2)(2ad+2bc-a^2-d^2+b^2+c^2) - 16abcd\frac{\cos^2(A+C)}{2} \\ &= [(a+d)^2 - (b-c)^2][(b+c)^2 - (a-d)^2] - 16abcd\frac{\cos^2(A+C)}{2} \\ &= (2p-2c)(2p-2b)(2p-2d)(2p-2a) - 16abcd\frac{\cos^2(A+C)}{2}. (5) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} + \frac{\widehat{B} + \widehat{D}}{2} = 180^\circ \Rightarrow \cos^2 \frac{B + D}{2} = \cos^2 \frac{A + C}{2}$$

nên từ (5) suy ra

$$S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd \cos^2 \frac{B + D}{2}.$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd \cos^2 \frac{B + D}{2}}.$$

□

Dạng 5. Nhận dạng tam giác vuông

Sử dụng các phép biến đổi tương đương hoặc hệ quả để biến đổi “Điều kiện cho trước” đến một đẳng thức mà từ đó ta dễ dàng kết luận được tính chất của tam giác.

✎✎✎ BÀI TẬP DẠNG 5 ✎✎✎

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện

$$\sin 2A + \sin 2B = \frac{\sin 2A \sin 2B}{\cos A \cos B}.$$

Chứng minh tam giác ABC vuông.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \sin 2A + \sin 2B &= \frac{\sin 2A \sin 2B}{\cos A \cos B} \\ \Leftrightarrow 2 \sin A \cos A + 2 \sin B \cos B &= \frac{2 \sin A \cos A \cdot 2 \sin B \cos B}{\cos A \cos B} \\ \Leftrightarrow \sin A \cos A + \sin B \cos B &= 2 \sin A \sin B \\ \Leftrightarrow \sin 2A + \sin 2B &= 4 \sin A \sin B \\ \Leftrightarrow 2 \sin(A + B) \cos(A - B) &= 2[\cos(A - B) - \cos(A + B)] \\ \Leftrightarrow \sin C \cdot \cos(A - B) &= \cos(A - B) + \cos C \\ \Leftrightarrow \cos(A - B) \cdot \cos C(1 - \sin C) + \cos^2 C &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos(A - B) \cdot \cos C(1 - \sin C) + 1 - \sin^2 C &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 - \sin C)(\cos(A - B) \cos C + 1 + \sin C) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - \sin C &= 0 \\ \Leftrightarrow C &= \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow \triangle ABC &\text{ vuông tại } C. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có $\sin 2A \cos 2A + \sin 2B \cos 2B + \sin 2C \cos 2C = 0$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
 & \sin 2A \cos 2A + \sin 2B \cos 2B + 2 \sin 2C \cos 2C \\
 &= \sin 4A + \sin 4B + 2 \sin 2C \cos 2C \\
 &= 2 \sin 2(A+B) \cos 2(A-B) + 2 \sin 2C \cos 2C \\
 &= -2 \sin 2C \cos 2(A-B) + 2 \sin 2C \cos 2(A+B) \\
 &= -2 \sin 2C [\cos 2(A-B) - \cos 2(A+B)] \\
 &= -4 \sin 2C \sin 2A \sin 2B.
 \end{aligned}$$

Do đó $\sin 2A \cos 2A + \sin 2B \cos 2B + \sin 2C \cos 2C = 0 \Leftrightarrow -4 \sin 2A \sin 2B \sin 2C = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2A = 0 \\ \sin 2B = 0 \\ \sin 2C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A = \pi \\ 2B = \pi \\ 2C = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{\pi}{2} \\ B = \frac{\pi}{2} \\ C = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông.}$$

□

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ có $\sin^2 A + \sin^2 B = \sqrt[2017]{\sin C}$ và các góc A, B nhọn. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Lời giải.

Ta có: $\sin C \in [0, 1] \Rightarrow \sqrt[2017]{\sin C} = \sin^{2017} C \geq \sin^2 C \Rightarrow \sin^2 A + \sin^2 B \geq \sin^2 C$

$$\Leftrightarrow 4R^2[\sin^2 A + \sin^2 B] \geq 4R^2 \sin^2 C \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 \geq 0.$$

Theo định lý hàm số cosin ta có: $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \geq 0$.

Ta thấy:

$$\begin{aligned}
 \sin^2 A + \sin^2 B &= \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} \\
 &= 1 - \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} \\
 &= 1 - \cos(A+B) \cos(A-B) \\
 &= 1 + \cos C \cos(A-B) \geq 1.
 \end{aligned}$$

Mặt khác: $\sqrt[2017]{\sin C} \leq \sqrt[2017]{1} = 1$.

Do đó: $\sin^2 A + \sin^2 B = \sqrt[2017]{\sin C}$ khi $\begin{cases} \cos C \cos(A-B) = 0 \\ \sin C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông.}$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho A, B là hai góc nhọn của tam giác ABC thỏa mãn:

$$\sin^2 A + \sin^2 B = 1.$$

Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại C.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
& \sin^2 A + \sin^2 B = 1 \\
& \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} = 1 \\
& \Leftrightarrow \cos(A + B) \cos(A - B) = 0 \\
& \Leftrightarrow \cos C \cos(A - B) = 0.
\end{aligned}$$

Mà A, B là hai góc nhọn nên $\cos(A - B) \neq 0$.

Do đó $\cos C \cdot \cos(A - B) = 0 \Leftrightarrow \cos C = 0 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại C . □

Bài 2. Cho tam giác ABC có các góc thỏa mãn đẳng thức :

$$\sin C = \sin A \cos B.$$

Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A .

Lời giải.

$$\begin{aligned}
\sin C &= \sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A + B) + \sin(A - B)] \\
\Rightarrow 2 \sin C &= \sin C + \sin(A - B) \\
\Rightarrow \sin C &= \sin(A - B) \\
\Rightarrow \sin(A + B) &= \sin(A - B) \\
\Rightarrow \sin A \cos B + \sin B \cos A &= \sin A \cos B - \sin B \cos A \\
\Rightarrow \sin B \cos A &= 0 \\
\Rightarrow \cos A &= 0 \Rightarrow A = \frac{\pi}{2} \\
\Rightarrow \triangle ABC &\text{ vuông tại } A.
\end{aligned}$$
□

Bài 3. Cho tam giác ABC có $C < B$ và b, c là các cạnh của tam giác. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông nếu có:

$$\frac{\sin(B - C)}{\sin(B + C)} = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}.$$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(B - C)}{\sin(B + C)} &= \frac{\sin B \cos C - \sin C \cos B}{\sin B \sin C + \sin B \sin C} \\
&= \frac{\frac{b}{2R} \cos C - \frac{c}{2R} \cos B}{\frac{b}{2R} \cos C + \frac{c}{2R} \cos B} \\
&= \frac{2ab \cos C - 2ac \cos B}{2ab \cos C + 2ac \cos B} \\
&= \frac{(a^2 + b^2 - c^2) - (a^2 + c^2 - b^2)}{(a^2 + b^2 - c^2) + (a^2 + c^2 - b^2)} \\
&= \frac{b^2 - c^2}{a^2}.
\end{aligned}$$

$$\text{Mà } \frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)} = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}.$$

$$\text{Do đó: } \frac{b^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông tại } A. \quad \square$$

Bài 4. Cho tam giác ABC có: $5(\sin A + 3 \cos B) + 9(\sin B + 3 \cos A) = 20$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} & 4(\sin A + 3 \cos B) + 3(\cos A + 3 \sin B) \\ &= (3 \cos A + 4 \sin A) + (9 \sin B + 12 \cos B) \\ &\leq \sqrt{(4^2 + 3^2)(\sin^2 A + \cos^2 A)} + \sqrt{(9^2 + 12^2)(\sin^2 B + \cos^2 B)} \\ &= 5 + 15 = 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dấu bằng xảy ra} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{3}{4} \\ \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{9}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \tan A = \cot B = \frac{3}{4} \\ &\Rightarrow \tan A = \tan\left(\frac{\pi}{2} - B\right) \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2} - B \Leftrightarrow A + B = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông tại } C. \quad \square \end{aligned}$$

Dạng 6. Nhận dạng tam giác cân

Sử dụng các phép biến đổi tương đương hoặc hệ quả để biến đổi “Điều kiện cho trước” đến một đẳng thức mà từ đó ta dễ dàng kết luận được tính chất của tam giác.

BÀI TẬP DẠNG 6

Ví dụ 1. Chứng tỏ rằng tam giác ABC cân nếu $\tan B + \tan C = 2 \tan \frac{B+C}{2}$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} & \tan B + \tan C = 2 \tan \frac{B+C}{2} \\ &\Leftrightarrow \tan B - \tan \frac{B+C}{2} + \tan C - \tan \frac{B+C}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin \frac{B-C}{2}}{\cos B \cos \frac{B+C}{2}} + \frac{\sin \frac{C-B}{2}}{\cos C \cos \frac{B+C}{2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin \frac{B-C}{2} \left(\frac{1}{\cos B \cos \frac{B+C}{2}} - \frac{1}{\cos C \cos \frac{B+C}{2}} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin \frac{B-C}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{B-C}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow B = C \Rightarrow \triangle ABC \text{ cân tại } A. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ thỏa mãn hệ thức: $\sin \frac{B}{2} \cos^3 \frac{C}{2} = \sin \frac{C}{2} \cos^3 \frac{B}{2}$. Chứng minh tam giác ABC cân.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \sin \frac{B}{2} \cos^3 \frac{C}{2} &= \sin \frac{C}{2} \cos^3 \frac{B}{2} \\ \Leftrightarrow \tan \frac{B}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{B}{2}} &= \tan \frac{C}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{C}{2}} \\ \Leftrightarrow \tan \frac{B}{2} (1 + \tan^2 \frac{B}{2}) &= \tan \frac{C}{2} (1 + \tan^2 \frac{C}{2}). \end{aligned}$$

Đặt $x = \tan \frac{B}{2}$; $y = \tan \frac{C}{2}$ khi đó ta có:

$$\begin{aligned} x(1 + x^2) &= y(1 + y^2) \\ \Leftrightarrow x^3 - y^3 + x - y &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - y = 0 &\Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

Do đó ta có: $\tan \frac{B}{2} = \tan \frac{C}{2} \Rightarrow \frac{B}{2} = \frac{C}{2} \Leftrightarrow B = C \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại A .

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ thỏa mãn: $\frac{c}{b \sin A} = 2 \tan A$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ cân.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b \sin A} &= 2 \tan A \\ \Leftrightarrow \frac{\sin C}{\sin B} &= 2 \cos A \\ \Leftrightarrow \sin C &= 2 \sin B \cos A \\ \Leftrightarrow \sin C &= \sin(B + A) + \sin(B - A) \\ \Leftrightarrow \sin C &= \sin C + \sin(B - A) \\ \Leftrightarrow \sin(B - A) &= 0 \Rightarrow B - A = 0 \Leftrightarrow B = A \Rightarrow \triangle ABC \text{ cân tại } C. \end{aligned}$$

□

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ có đường cao $AH = h_a$ thỏa mãn hệ thức: $h_a^2 = bc \cos^2 \frac{A}{2}$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ cân.

Lời giải.

Ta có: $h_a = c \sin B = b \sin C \Rightarrow h_a^2 = bc \sin B \sin C$.

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned} \sin B \sin C &= \cos^2 \frac{A}{2} \\ \Leftrightarrow \cos(B - C) - \cos(B + C) &= 1 + \cos A \\ \Leftrightarrow \cos(B - C) + \cos A &= 1 + \cos A \\ \Leftrightarrow \cos(B - C) &= 1 \\ \Rightarrow B - C &= 0 \\ \Leftrightarrow B = C &\Rightarrow \triangle ABC \text{ cân.} \end{aligned}$$

□

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ thỏa mãn hệ thức:

$$\frac{4 - 2 \sin^2 B - 2 \sin^2 C}{\sin^2 B + \sin^2 C} = (\cot B + \cot C)^2 - 2 \cot B \cdot \cot C.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \frac{4 - 2 \sin^2 B - 2 \sin^2 C}{\sin^2 B + \sin^2 C} &= (\cot B + \cot C)^2 - 2 \cot B \cdot \cot C \\ \Leftrightarrow \frac{4}{\sin^2 B + \sin^2 C} - 2 &= \cot^2 B + \cot^2 C \\ \Leftrightarrow \frac{4}{\sin^2 B + \sin^2 C} - 2 &= \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} - 2 \\ \Leftrightarrow (\sin^2 B + \sin^2 C) \left(\frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} \right) &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C} + \frac{\sin^2 C}{\sin^2 B} - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\sin B}{\sin C} - \frac{\sin C}{\sin B} \right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin B &= \sin C \\ \Leftrightarrow B = C &\Rightarrow \triangle ABC \text{ cân.} \end{aligned}$$

□

Bài 4. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức: $\sin \frac{B}{2} = \frac{b}{2\sqrt{ac}}$. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

Lời giải.

$$\sin^2 \frac{B}{2} = \frac{1 - \cos B}{2} = \frac{1 - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}{2} = \frac{b^2 - (a - c)^2}{4ac}.$$

$$\text{Mà: } \sin^2 \frac{B}{2} = \frac{b^2}{4ac}.$$

$$\text{Do đó: } \frac{b^2 - (a - c)^2}{4ac} = \frac{b^2}{4ac} \Leftrightarrow b^2 - (a - c)^2 = b^2 \Leftrightarrow a - c = 0 \Leftrightarrow a = c \Rightarrow \triangle ABC \text{ cân.}$$

□

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ có: $\frac{1 + \cos A}{\sin A} = \frac{2b + c}{\sqrt{4b^2 - c^2}}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos A}{\sin A} &= \frac{2b + c}{\sqrt{4b^2 - c^2}} \\ \Leftrightarrow \frac{(1 + \cos A)^2}{\sin^2 A} &= \frac{(2b + c)^2}{4b^2 - c^2} \\ \Leftrightarrow \frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} &= \frac{2b + c}{2b - c} \\ \Leftrightarrow \frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} &= \frac{2 \sin B + \sin C}{2 \sin B - \sin C} \\ \Leftrightarrow 2 \sin B + 2 \cos A \sin B - \sin C - \cos A \sin C &= 2 \sin B - 2 \sin B \cos A + \sin C - \sin C \cos A \\ \Leftrightarrow 4 \sin A \cos B - 2 \sin C &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin(A + B) + \sin(A - C) &= \sin C \\ \Leftrightarrow \sin C + \sin(A - B) &= \sin C \\ \Leftrightarrow \sin(A - B) &= 0 \\ \Leftrightarrow A - B &= 0 \\ \Leftrightarrow A = B &\Rightarrow \triangle ABC \text{ cân.} \end{aligned}$$

□

Dạng 7. Nhận dạng tam giác đều

Sử dụng các phép biến đổi tương đương hoặc hệ quả để biến đổi “Điều kiện cho trước” đến một đẳng thức mà từ đó ta dễ dàng kết luận được tính chất của tam giác. Ngoài ra đối với các bất đẳng thức đối xứng với ba góc A, B, C hoặc ba cạnh a, b, c đều xảy ra dấu bằng tại trạng thái $A = B = C = 60^\circ$ hoặc $a = b = c$ để chứng minh tam giác ABC đều.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 7 ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có:

$$\begin{cases} \sin B \sin C = \frac{3}{4} \\ a^2 = \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} \end{cases}$$

Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
 a^2 &= \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} \\
 \Leftrightarrow a^2(a - b - c) &= a^3 - b^3 - c^3 \\
 \Leftrightarrow a^2(b + c) &= (b + c)(b^2 - bc + c^2) \\
 \Leftrightarrow a^2 &= b^2 - bc + c^2 \\
 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 &= bc \\
 \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} &= \frac{1}{2} \\
 \Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow A = \frac{\pi}{3}. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Ta lại có:

$$\begin{aligned}
 \sin B \sin C &= \frac{3}{4} \\
 \Leftrightarrow \cos(B - C) - \cos(B + C) &= \frac{3}{2} \\
 \Leftrightarrow \cos(B - C) + \cos A &= \frac{3}{2} \\
 \Leftrightarrow \cos(B - C) &= 1 \\
 \Rightarrow B - C = 0 &\Leftrightarrow B = C \Rightarrow \triangle ABC \text{ cân.} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle ABC$ đều. □

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có: $\cot^2 \frac{A}{2} + \cot^2 \frac{B}{2} + \cot^2 \frac{C}{2} = 9$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ đều.

Lời giải.

Theo định lý hàm số cos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \geq 2bc - 2bc \cos A = 4bc \cdot \sin^2 \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} \geq \frac{4bc}{a^2} \Rightarrow \cot^2 \frac{A}{2} \geq \frac{4bc}{a^2} - 1.$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có: } \cot^2 \frac{B}{2} \geq \frac{4ac}{b^2} - 1; \cot^2 \frac{C}{2} \geq \frac{4bc}{c^2} - 1.$$

$$\text{Do đó: } \cot^2 \frac{A}{2} + \cot^2 \frac{B}{2} + \cot^2 \frac{C}{2} \geq \frac{4bc}{a^2} + \frac{4ac}{b^2} + \frac{4ab}{c^2} - 3 \geq 3 \sqrt[3]{\frac{4bc}{a^2} \cdot \frac{4ac}{b^2} \cdot \frac{4ab}{c^2}} - 3 = 9.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \triangle ABC$ đều. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ có:

$$\begin{cases} \sin B + \sin C = 2 \sin A \\ \cos B + \cos C = 2 \cos A \end{cases}$$

Chứng minh tam giác ABC đều.

Lời giải.

Ta có: $(\sin B + \sin C)^2 + (\cos B + \cos C)^2 = (2 \sin A)^2 + (2 \cos A)^2$

$$\Leftrightarrow 2(\sin B \sin C + \cos B \cos C) + 2 = 4 \Leftrightarrow \cos(B - C) = 1 \Leftrightarrow B - C = 0 \Leftrightarrow B = C$$

Khi đó: $\begin{cases} B = C \\ 2 \cos B = 2 \cos A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = C \\ B = A \end{cases} \Rightarrow A = B = C \Rightarrow \triangle ABC \text{ đều.}$

□

Bài 2. Cho tam giác ABC có:

$$\frac{a^2 \cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2}} + \frac{b^2 \cos \frac{C-A}{2}}{2 \sin \frac{B}{2}} + \frac{c^2 \cos \frac{A-B}{2}}{2 \sin \frac{C}{2}} = a^2 + b^2 + c^2.$$

Chứng minh rằng $\triangle ABC$ đều.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 \cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2}} &= \frac{a(2R \sin A) \cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2}} \\ &= 2aR \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} \\ &= 2aR \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} \\ &= aR (\sin B + \sin C) = \frac{a(b+c)}{2} \end{aligned}$$

Tương tự và suy ra ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 \cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2}} + \frac{b^2 \cos \frac{C-A}{2}}{2 \sin \frac{B}{2}} + \frac{c^2 \cos \frac{A-B}{2}}{2 \sin \frac{C}{2}} &= \frac{a(b+c)}{2} + \frac{b(c+a)}{2} + \frac{c(a+b)}{2} = ab + bc + ca \\ &\leq \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{c^2 + a^2}{2} = a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c \Leftrightarrow \triangle ABC$ đều.

□

Dạng 8. Ứng dụng giải tam giác vào đo đạc

Sử dụng định lý sin và định lý cos để giải.

BÀI TẬP DẠNG 8

Ví dụ 1. Tính khoảng cách từ một điểm trên bờ sông đến một gốc cây trên một cù lao giữa sông.

Lời giải.

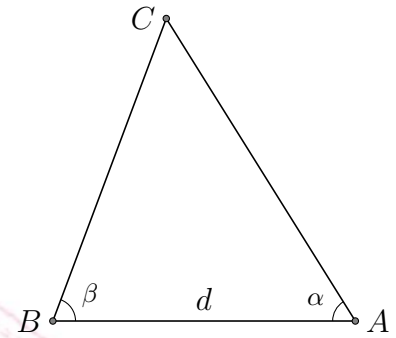
Để đo khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến gốc cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C . Ta đo khoảng cách $AB = d$, góc $\widehat{CAB} = \alpha$ và $\widehat{CBA} = \beta$.

Khi đó, khoảng cách AC được tính như sau:

Áp dụng định lý sin vào tam giác ABC , ta có

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\text{Vì } \sin C = \sin(\alpha + \beta) \text{ nên } AC = \frac{AB \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$



Ví dụ 2. Trong một buổi gặp nhau cuối tuần nghệ sĩ hài Xuân Bắc đặt ra một tình huống đối với giáo sư Cù Trọng Xoay như sau: “Một người có chiều cao từ chân đến mắt là lm . Với hai dụng cụ đo là thước dây và giác kế, người đó muốn đo chiều cao của một cái cây cao. Vậy làm thế nào để đo được chiều cao của cây”.

Nếu được ở vị trí của giáo sư Cù Trọng Xoay em làm cách nào để đo được chiều cao của cây? Hãy minh họa bằng một kết quả cụ thể.

Lời giải.

Chọn vị trí đứng là điểm C , gọi A là vị trí mắt người đó đứng tại C , O là vị trí gốc cây, B là vị trí đỉnh cây.

Các yếu tố có thể đo được bằng thước dây và giác kế là $\widehat{CAB}$, $\widehat{AOB}$, CO .

Dùng thước dây đo độ dài $CO = d$, áp dụng vào tam giác AOC để tính AO và góc $\widehat{AOC}$.

Dùng giác kế đo được góc BAO , từ đó áp dụng định lý sin để tính BO .

Ta có: $AO = \sqrt{AC^2 + CO^2} = \sqrt{l^2 + d^2}$ và $\cos \widehat{AOC} = \frac{OC}{OA}$, suy ra được góc $\widehat{AOC}$.

Để thấy $\beta = 90^\circ - \widehat{AOC}$. Áp dụng định lý sin cho tam giác ABO ta có:

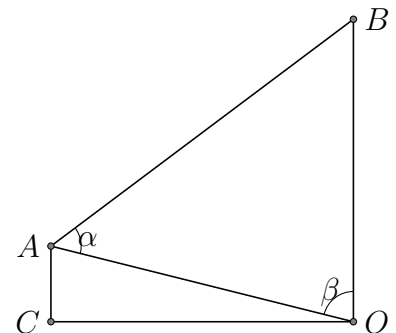
$$\frac{OB}{\sin \alpha} = \frac{OA}{\sin \widehat{ABO}} \Rightarrow OB = \frac{OA \sin \alpha}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{\sqrt{l^2 + d^2} \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Giả sử người đó cao 1,6m, đứng cách cây 10m và nhìn ngọn cây và gốc cây một góc 30° .

$$\text{Ta có: } OA = \sqrt{1,6^2 + 10^2} = \frac{2\sqrt{641}}{5} \text{ và } \cos \widehat{AOC} = \frac{OC}{OA} = \frac{50}{2\sqrt{641}} \Rightarrow \widehat{AOC} \approx 9,1^\circ.$$

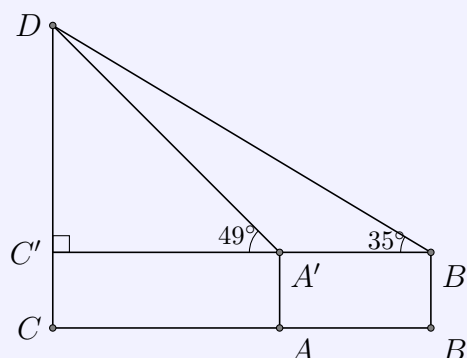
$$\text{Suy ra } \beta = 90 - 9,1 = 80,9^\circ.$$

$$\text{Khi đó chiều cao của cây là: } OB = \frac{\sqrt{1,6^2 + 10^2} \sin 30^\circ}{\sin(30^\circ + 80,9^\circ)} \approx 5,42\text{m}$$



Ví dụ 3.

Muốn đo chiều cao của tháp Chàm Por Klong Garai ở Ninh Thuận người ta lấy hai điểm A, B trên mặt đất có khoảng cách $AB = 12\text{m}$ cùng thẳng hàng với chân C của tháp để đặt hai giác kế. Chân của giác kế có chiều cao $h = 1,3\text{m}$. Gọi D là đỉnh tháp và hai điểm A', B' cùng thẳng hàng với điểm C' thuộc chiều cao CD của tháp. Người ta đo được góc $\widehat{DA'C'} = 49^\circ$ và góc $\widehat{DB'C'} = 35^\circ$. Hãy tính chiều cao $CD = C'D + C'C$ của tháp đó.



Lời giải.

Ta có $CC' = 1,3\text{m}$.

Áp dụng định lý sin trong $\triangle A'B'D$ ta được $\frac{B'D}{\sin(180^\circ - \widehat{C'A'D})} = \frac{A'B'}{\sin(180^\circ - \widehat{C'A'D} - 35^\circ)} \Leftrightarrow \frac{B'D}{\sin 131^\circ} = \frac{12}{\sin 14^\circ} \Leftrightarrow B'D = \frac{12 \cdot \sin 131^\circ}{\sin 14^\circ}$.

Xét $\triangle B'C'D$ có $C'D = B'D \cos 35^\circ = \frac{12 \cdot \sin 131^\circ \cdot \cos 35^\circ}{\sin 14^\circ} \approx 30,7\text{m}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 1. Bạn Tèo chỉ có dụng cụ là thước thẳng dài và bạn ấy muốn đo bán kính của đường tròn lớn của tượng đài ở công viên Sông Ray (tâm của đường tròn lớn này bị che khuất bởi tượng cây đuốc). Bạn Tèo đang loay hoay không biết làm cách nào để đo được bán kính của đường tròn này. Hãy tìm cách giúp bạn Tèo hoàn thành công việc.

Lời giải.

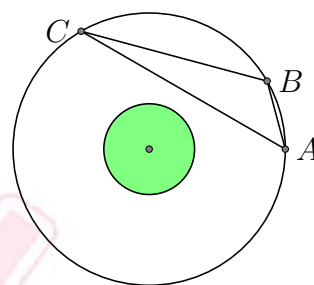
Lấy ba điểm A, B, C khác nhau thuộc đường tròn.

Đo độ dài các đoạn thẳng $BC = a, AC = b, AB = c$.

Áp dụng công thức Hê-rông tính diện tích tam giác ABC :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ với } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Suy ra bán kính của đường tròn là: $R = \frac{abc}{4S}$. □



Bài 2. Một ô tô đi từ A đến C nhưng ở giữa A và C là một ngọn núi cao nên ô tô phải chạy thành hai đoạn đường từ A đến B và từ B đến C , các đoạn đường này tạo thành tam giác ABC có $AB = 14\text{km}$, $BC = 18\text{km}$ và góc $\widehat{B} = 100^\circ$, biết rằng cứ 1km đường ô tô phải tốn $0,1$ lít xăng.

- Tính số xăng mà xe tiêu thụ khi chạy đoạn đường từ A đến C mà phải qua B .
- Giả sử không có ngọn núi và có con đường thẳng từ A đến C thì ô tô chạy hết con đường này tốn bao nhiêu lít xăng?

Lời giải.

- a) Tính số xăng mà xe tiêu thụ khi chạy đoạn đường từ A đến C mà phải qua B .

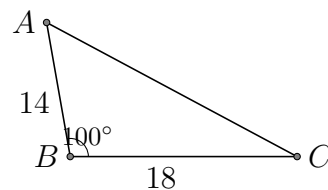
Tổng đoạn đường xe đi từ A đến C là $AB + BC = 14 + 18 = 32\text{km}$.

Do đó số xăng mà xe tiêu thụ là $32 \cdot 0,1 = 3,2\text{lit}$.

- b) Áp dụng định lý cosin ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos(\widehat{ABC}) = 14^2 + 18^2 - 2 \cdot 14 \cdot 18 \cdot \cos 100^\circ =$$

□



Bài 3. Người ta dự định xây một cây cầu bắc qua một con sông tương đối rộng và chảy xiết. Trong một đợt khảo sát người ta muốn đo khoảng cách giữa hai điểm A và B ở hai bên bờ sông. Khó khăn là người ta không thể qua sông bằng bất kì phương tiện gì. Em hãy đặt mình vào vị trí của người khảo sát để giải quyết tình huống này. Biết rằng em có dụng cụ ngắm đo góc và thước dây.

Lời giải.

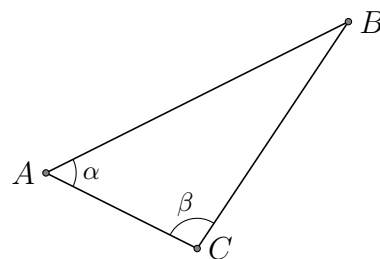
Để tính được chiều dài đoạn AB ta sẽ tạo một tam giác mà có AB là một cạnh. Ta chọn một điểm C nằm trên bờ (có thể cùng phía với A hoặc với B) và ta xem trong tam giác này ba yếu tố nào ta đo được bằng các dụng cụ đã có.

Giả sử điểm C nằm cùng bờ với điểm A như hình vẽ. Các yếu tố đo được là cạnh AC và hai góc $\widehat{BAC} = \alpha$ và $\widehat{ACB} = \beta$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC , ta có:

$$\frac{AB}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin(\alpha + \beta)} \Leftrightarrow AB = \frac{AC \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

□



Bài 4. Một cây cột điện cao 20m được đóng trên một triền dốc thẳng nghiêng hợp với phương nằm ngang một góc 17° . Người ta nối một dây cáp từ đỉnh cột điện đến cuối dốc. Tìm chiều dài của dây cáp biết rằng đoạn đường từ đáy cột đến cuối dốc bằng 72m.

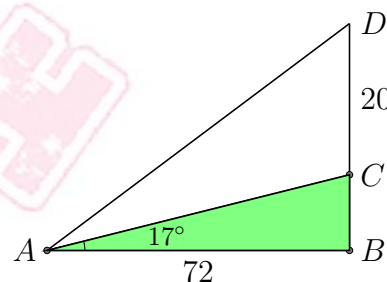
Lời giải.

Ta có $\widehat{ACD} = 180^\circ - (90^\circ - 17^\circ) = 107^\circ$.

Trong tam giác ABC vuông tại B có $AC = \frac{AB}{\cos 17^\circ} \approx 75,3\text{m}$.

Áp dụng định lý cos trong tam giác ACD , ta có:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2 \cdot AC \cdot CD \cdot \cos \widehat{ACD} = 75,3^2 + 20^2 - 2 \cdot 75,3 \cdot 20 \cdot \cos 107^\circ \approx 6950,7 \Rightarrow AD \approx 83,4\text{m}.$$



□

Bài 5. Hai chiếc tàu thủy P và Q cách nhau 300m. Từ P và Q thẳng hàng với chân A của tháp hải đăng AB ở trên bờ biển người ta nhìn chiều cao AB của tháp dưới các góc $\widehat{BPA} = 35^\circ$, $\widehat{BQA} = 48^\circ$. Tính chiều cao của tháp.

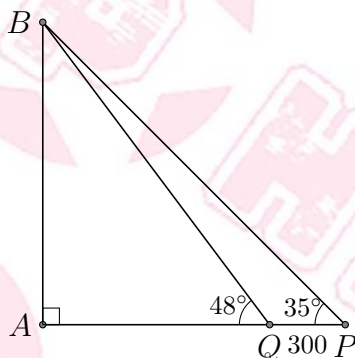
Lời giải.

Ta có: $AQ = AB \cot 48^\circ$.

$AP = AB \cot 35^\circ$.

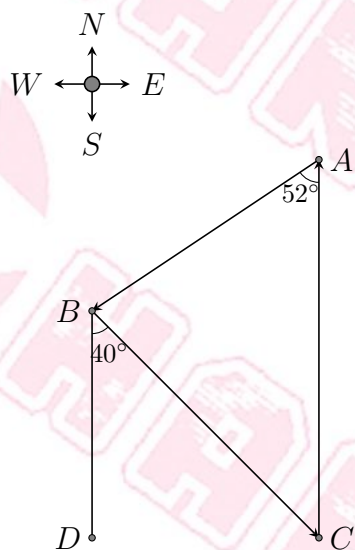
$$PQ = AP - AQ = AB (\cot 35^\circ - \cot 48^\circ)$$

$$\Rightarrow AB = \frac{PQ}{\cot 35^\circ - \cot 48^\circ} \approx 568,5 \text{m.}$$



□

Bài 6. Một cuộc đua thuyền xuất phát từ điểm A như hình vẽ bên và di chuyển theo hướng tây nam một góc 52° tới điểm B , sau đó di chuyển theo hướng đông nam 40° tới điểm C , cuối cùng quay trở lại điểm A . Điểm C cách điểm A một khoảng 8km . Tính gần đúng tổng khoảng cách của đường đua.



Lời giải.

Vì đường thẳng BD và AC song song, suy ra $\widehat{BCA} = \widehat{CBD} = 40^\circ$. Do đó, $\widehat{ABC} = 180^\circ - (52^\circ + 40^\circ) = 88^\circ$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC , ta được: $\frac{a}{\sin 52^\circ} = \frac{b}{\sin 88^\circ} = \frac{c}{\sin 40^\circ}$.

Vì $b = 8$ theo đề, nên: $a = \frac{8 \sin 52^\circ}{\sin 88^\circ} \approx 6,308\text{km}$ và $c = \frac{8 \sin 40^\circ}{\sin 88^\circ} \approx 5,145\text{km}$.

Tổng khoảng cách của đường đua là: $8 + 6,308 + 5,145 = 19,453\text{km}$. □

Bài 7. Hai lực $\vec{f}_1$ và $\vec{f}_2$ cho trước cùng tác dụng lên một vật và tạo thành góc nhọn $(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = \alpha$. Hãy lập công thức tính cường độ của hợp lực $\vec{s}$.

Lời giải.

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{f}_1$, $\overrightarrow{AD} = \vec{f}_2$ và vẽ hình bình hành $ABCD$.

Khi đó $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{s}$.

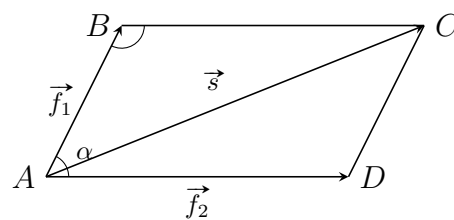
Vậy $|\vec{s}| = |\overrightarrow{AC}| = |\vec{f}_1 + \vec{f}_2|$.

Theo định lí cosin đối với tam giác ABC , ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B, \text{ hay } |\vec{s}|^2 = |\vec{f}_1|^2 + |\vec{f}_2|^2 -$$

$$2 |\vec{f}_1| \cdot |\vec{f}_2| \cdot \cos(180^\circ - \alpha).$$

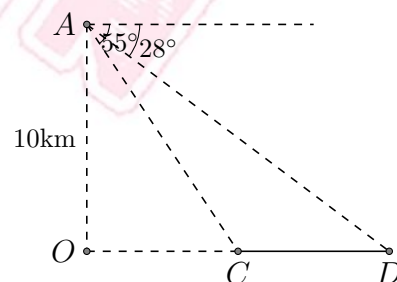
$$\text{Do đó: } |\vec{s}| = \sqrt{|\vec{f}_1|^2 + |\vec{f}_2|^2 + 2 |\vec{f}_1| \cdot |\vec{f}_2| \cdot \cos \alpha}.$$



□

Bài 8.

Một hành khách ngồi trong một máy bay, bay ở độ cao 10km nhìn xuống hai thị trấn dưới mặt đất. Góc hợp bởi phương ngang và hai thị trấn lần lượt là 28° và 55° (hình vẽ). Tính khoảng cách giữa hai thị trấn.



Lời giải.

Ta có $\widehat{CAD} = 55^\circ - 28^\circ = 27^\circ$.

Xét tam giác ACO có $\widehat{OAC} = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$ và $\cos \widehat{OAC} = \frac{AO}{AC} \Leftrightarrow AC = \frac{10}{\cos 35^\circ} \approx 12,2\text{km}$.

Trong tam giác ACD có $\widehat{ACD} = 180^\circ - \widehat{OCA} = 125^\circ$ và $\widehat{ADC} = 180^\circ - (125^\circ + 27^\circ) = 28^\circ$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ACD , ta có

$$\frac{CD}{\sin 27^\circ} = \frac{AC}{\sin 28^\circ} \Leftrightarrow CD = \frac{12,2 \sin 27^\circ}{\sin 28^\circ} \approx 11,79\text{km}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai thị trấn khoảng 11,9km.

□