

§2 BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa. Bất phương trình bậc nhất một ẩn là bất phương trình (bpt) sau khi thu gọn có dạng $ax + b > 0, ax + b < 0, ax + b \geq 0, ax + b \leq 0$ trong đó a, b là các số thực với $a \neq 0$ và x là ẩn số.

1 GIẢI VÀ BIỆN LUẬN BẤT PHƯƠNG TRÌNH $AX + B > 0$

- Với $a > 0$, bpt $\Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$. Tập nghiệm của bpt là $S = \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$;
- Với $a < 0$, bpt $\Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$. Tập nghiệm của bpt là $S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$;
- $a = 0$, bpt thành $0x + b > 0$. Ta xét hai trường hợp:
 $b \leq 0$, tập nghiệm của bpt là $S = \emptyset$;
 $b > 0$, tập nghiệm của bpt là $S = \mathbb{R}$.

2 GIẢI VÀ BIỆN LUẬN BẤT PHƯƠNG TRÌNH $AX + B \leq 0$

- Với $a > 0$, bpt $\Leftrightarrow x \leq -\frac{b}{a}$. Tập nghiệm của bpt là $S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right]$;
- Với $a < 0$, bpt $\Leftrightarrow x \geq -\frac{b}{a}$. Tập nghiệm của bpt là $S = \left[-\frac{b}{a}; +\infty\right)$;
- $a = 0$, bpt thành $0x + b \leq 0$. Ta xét hai trường hợp:
 $b \leq 0$, tập nghiệm của bpt là $S = \mathbb{R}$;
 $b > 0$, tập nghiệm của bpt là $S = \emptyset$.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Giải bất phương trình bậc nhất một ẩn

Xét bất phương trình bậc nhất một ẩn dạng: $ax + b > 0$ (*)

- Nếu $a > 0$ thì bất phương trình (*) có các nghiệm $x > -\frac{b}{a}$ hay bất phương trình có tập nghiệm là $S = \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$.
- Nếu $a < 0$ thì bất phương trình (*) có các nghiệm $x < -\frac{b}{a}$ hay bất phương trình có tập nghiệm là $S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.

Các bất phương trình dạng $ax + b < 0, ax + b \geq 0, ax + b \leq 0$ có cách giải tương tự.

Các bất phương trình khác ta biến đổi bất phương trình về dạng $ax + b > 0$ (hoặc về dạng $ax + b < 0, ax + b \geq 0, ax + b \leq 0$).

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Giải các bất phương trình sau:

- a) $3x - 1 \geq 0$.
 b) $2x + 3 < 4x - 5$.
 c) $(x - 3)(2x + 5) \leq 2x^2 + 4x - 7$.

Lời giải.

a) $3x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

b) $2x + 3 < 4x - 5 \Leftrightarrow 2x - 4x < -5 - 3 \Leftrightarrow -2x < -8 \Leftrightarrow x > 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (4; +\infty)$.

c) $(x - 3)(2x + 5) \leq 2x^2 + 4x - 7 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 15 \leq 2x^2 + 4x - 7 \Leftrightarrow -5x \leq 8 \Leftrightarrow x \geq -\frac{8}{5}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left[-\frac{8}{5}; +\infty\right)$. □

Ví dụ 2. Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{3 - 2x}{x^2 + 1} \geq 0$.

b) $\frac{x^2 + 3x - 2}{x^2 + 2x + 3} < \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 3}$.

Lời giải.

a) $\frac{3 - 2x}{x^2 + 1} \geq 0$.

Ta có $x^2 + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó bất phương trình đã cho tương đương:

$$3 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$.

b) $\frac{x^2 + 3x - 2}{x^2 + 2x + 3} < \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 3}$.

Ta có: $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó bất phương trình đã cho tương đương:

$$x^2 + 3x - 2 < x^2 - x - 2 \Leftrightarrow 4x < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = (-\infty; 0)$. □

Ví dụ 3. Giải các bất phương trình sau:

a) $\sqrt{x - 1}(3x - 8) \leq 0$.

c) $\frac{6 - 5x}{\sqrt{2x + 1}} > \sqrt{2x + 1}$.

b) $\frac{4x + 3}{\sqrt{2 - x}} \geq 0$.

d) $\frac{x - 1}{2 - x} < 1$.

Lời giải.

a) $\sqrt{x - 1}(3x - 8) \leq 0$.

Điều kiện: $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

- Ta thấy $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

- Với $x > 1$, bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình:

$$3x - 8 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{8}{3}.$$

Kết hợp điều kiện $x > 1$ ta được: $1 < x \leq \frac{8}{3}$.

- Vậy bất phương trình đã cho có các nghiệm $1 \leq x \leq \frac{8}{3}$.

b) $\frac{4x+3}{\sqrt{2-x}} \geq 0$. Điều kiện: $2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$.

Với $x < 2$, bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình:

$$4x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{4}.$$

Kết hợp điều kiện $x < 2$ ta được: $-\frac{3}{4} \leq x < 2$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left[-\frac{3}{4}; 2\right)$.

c) $\frac{6-5x}{\sqrt{2x+1}} > \sqrt{2x+1}$.

Điều kiện: $2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$.

Với $x > -\frac{1}{2}$, bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình:

$$6-5x > 2x+1 \Leftrightarrow -7x > -5 \Leftrightarrow x < \frac{5}{7}.$$

Kết hợp điều kiện $x > -\frac{1}{2}$ ta được: $-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{7}$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{7}\right)$.

d) $\frac{x-1}{2-x} < 1$.

Điều kiện: $2-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

- Với $x < 2$, bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình:

$$x-1 < 2-x \Leftrightarrow 2x < 3 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}.$$

Kết hợp điều kiện $x < 2$ ta được $x < \frac{3}{2}$.

- Với $x > 2$, bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình:

$$x-1 > 2-x \Leftrightarrow 2x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}.$$

Kết hợp điều kiện $x > 2$ ta được $x > 2$.

- Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải các bất phương trình sau:

a) $-4x+1 > 0$.

c) $10x+9 < 0$.

b) $5x-6 \leq 0$.

d) $-2x+8 \leq 0$.

Lời giải.

a) $-4x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$.

b) $5x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{6}{5}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(-\infty; \frac{6}{5}\right]$.

c) $10x + 9 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{9}{10}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(-\infty; -\frac{9}{10}\right)$.

d) $-2x + 8 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = [4; +\infty)$.

□

Bài 2. Giải các bất phương trình sau:

a) $3(x - 1) + 2 > 2x + 3$.

c) $x^2 - 3x + 4 \leq x^2 - 2$.

b) $4x + 3 < 2x - 1$.

d) $3x^2 - 10x + 8 \geq 3x(x + 1)$.

Lời giải.

a) Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (4; +\infty)$.

b) Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -2)$.

c) Tập nghiệm của bất phương trình là $S = [2; +\infty)$.

d) Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; \frac{8}{13}\right]$.

□

Bài 3. Giải các bất phương trình sau:

a) $3 - \frac{2x + 1}{5} > x + \frac{3}{4}$.

c) $2 + \frac{3(x + 1)}{8} < 3 - \frac{x - 1}{4}$.

b) $-2x + \frac{3}{5} > \frac{3(2x - 7)}{3}$.

d) $\frac{x + 1}{2} - \frac{x + 2}{3} < 2 + \frac{x}{6}$.

Lời giải.

a) $3 - \frac{2x + 1}{5} > x + \frac{3}{4} \Leftrightarrow 60 - 4(2x + 1) > 20x + 15 \Leftrightarrow -28x > -41 \Leftrightarrow x < \frac{41}{28}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; \frac{41}{28}\right)$.

b) $-2x + \frac{3}{5} > \frac{3(2x - 7)}{3} \Leftrightarrow -2x + \frac{3}{5} > 2x - 7 \Leftrightarrow -4x > -\frac{38}{5} \Leftrightarrow x < \frac{19}{10}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; \frac{19}{10}\right)$.

c) $2 + \frac{3(x + 1)}{8} < 3 - \frac{x - 1}{4} \Leftrightarrow \frac{3x + 3}{8} + \frac{x - 1}{4} < 1 \Leftrightarrow 5x < 7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{5}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; \frac{7}{5}\right)$.

d) $\frac{x + 1}{2} - \frac{x + 2}{3} < 2 + \frac{x}{6} \Leftrightarrow 3(x + 1) - 2(x + 2) < 12 + x \Leftrightarrow 3x + 3 - 2x - 4 < 12 + x \Leftrightarrow 0 \cdot x < 13$
(luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$).

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R}$.

□

Bài 4. Giải các bất phương trình sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \frac{x+2}{x^2+2} \geq 0. & \text{c)} \quad \frac{2x-3}{x^2+x+1} \leq \frac{4x+3}{x^2+x+1}. \\ \text{b)} \quad \frac{3(x-1)-2}{x^2+4x+5} < 0. & \text{d)} \quad \frac{x^2+x+2}{4x^2+4x+2} > \frac{(x+1)(x-2)}{4x^2+4x+2}. \end{array}$$

Lời giải.

- a) Ta có $x^2 + 2 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó bất phương trình đã cho tương đương:
 $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$.
 Tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-2; +\infty)$.
- b) Ta có $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó bất phương trình đã cho tương đương:
 $3(x-1) - 2 < 0 \Leftrightarrow 3x - 5 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{5}{3}$.
 Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$.
- c) Ta có $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó bất phương trình đã cho tương đương:
 $2x - 3 \leq 4x + 3 \Leftrightarrow 2x \geq -6 \Leftrightarrow x \geq -3$.
 Tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-3; +\infty)$.
- d) Ta có $4x^2 + 4x + 2 = (2x+1)^2 + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó bất phương trình đã cho tương đương:
 $x^2 + x + 2 > (x+1)(x-2) \Leftrightarrow 2x > -4 \Leftrightarrow x > -2$.
 Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-2; +\infty)$.

□

Bài 5. Giải các bất phương trình sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad (3x-6)\sqrt{3-x} \leq 0. & \text{d)} \quad (2x-1)^2(x+3) \geq 0. \\ \text{b)} \quad \frac{\sqrt{6x+3}}{2-x} > 0. & \text{e)} \quad \frac{3x-2}{5x+1} \leq 0. \\ \text{c)} \quad \frac{1-4x}{\sqrt{x+5}} < \sqrt{x+5}. & \text{f)} \quad \frac{8x+1}{2x-3} > 2. \end{array}$$

Lời giải.

- a) Điều kiện: $3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$.
 Rõ ràng $x = 3$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.
 Với $x < 3$ bất phương trình đã cho trở thành:
 $3x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.
 Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 2] \cup \{3\}$.
- b) Điều kiện: $6x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$.
 Với $x = -\frac{1}{2}$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.
 Với $x > -\frac{1}{2}$ bất phương trình đã cho trở thành:

$$2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2.$$

Kết hợp điều kiện $x > -\frac{1}{2}$ ta được $-\frac{1}{2} < x < 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

c) Điều kiện: $x + 5 > 0 \Leftrightarrow x > -5$.

Với $x > -5$ bất phương trình đã cho trở thành:

$$1 - 4x < x + 5 \Leftrightarrow 5x > -4 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{5}.$$

Kết hợp điều kiện $x > -5$ ta được $x > -\frac{4}{5}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\frac{4}{5}; +\infty\right)$.

d) Trường hợp $2x - 1 = 0$ hay $x = \frac{1}{2}$ rõ ràng là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

Trường hợp $2x - 1 \neq 0$ hay $x \neq \frac{1}{2}$ bất phương trình đã cho trở thành:

$$x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3.$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-3; +\infty)$.

e) Điều kiện: $x \neq -\frac{1}{5}$.

Trường hợp $x < -\frac{1}{5}$ bất phương trình đã cho trở thành:

$$3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}.$$

Kết hợp điều kiện: $x < -\frac{1}{5}$ ta được bất phương trình vô nghiệm.

Trường hợp $x > -\frac{1}{5}$ bất phương trình đã cho trở thành:

$$3x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}.$$

Kết hợp điều kiện: $x > -\frac{1}{5}$ ta được $-\frac{1}{5} < x \leq \frac{2}{3}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\frac{1}{5}; \frac{2}{3}\right]$.

f) Điều kiện: $x \neq \frac{3}{2}$.

Trường hợp $x < \frac{3}{2}$ bất phương trình đã cho trở thành:

$$8x + 1 < 4x - 6 \Leftrightarrow x < -\frac{7}{4}.$$

Kết hợp điều kiện: $x < \frac{3}{2}$ ta được $x < -\frac{7}{4}$.

Trường hợp $x > \frac{3}{2}$ bất phương trình đã cho trở thành:

$$8x + 1 > 4x - 6 \Leftrightarrow x > -\frac{7}{4}.$$

Kết hợp điều kiện: $x > \frac{3}{2}$ ta được $x > \frac{3}{2}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; -\frac{7}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

□

Dạng 2. Giải và biện luận bất phương trình bậc nhất một ẩn

Xét bất phương trình một ẩn dạng: $ax + b > 0$ (*).

① Trường hợp $a \neq 0$:

- Nếu $a > 0$ thì bất phương trình (*) có các nghiệm $x > -\frac{b}{a}$ hay bất phương trình có tập nghiệm là $S = \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$.
- Nếu $a < 0$ thì bất phương trình (*) có các nghiệm $x < -\frac{b}{a}$ hay bất phương trình có tập nghiệm là $S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.

② Trường hợp $a = 0$:

- Nếu $b > 0$ thì bất phương trình (*) luôn nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ hay bất phương trình có tập nghiệm $S = \mathbb{R}$.
- Nếu $b \leq 0$ thì bất phương trình (*) vô nghiệm hay bất phương trình có tập nghiệm $S = \emptyset$.

Các bất phương trình dạng $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$ có cách giải và biện luận tương tự. Các bất phương trình khác ta biến đổi bất phương trình về dạng $ax + b > 0$ (hoặc về dạng $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$).

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Giải và biện luận bất phương trình $mx + 6 > 2x + 3$.

Lời giải.

$$mx + 6 > 2x + 3 \Leftrightarrow (m - 2)x > -3.$$

- Trường hợp $m - 2 = 0$ hay $m = 2$ thì bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- Trường hợp $m - 2 > 0$ hay $m > 2$ thì bất phương trình đã cho có các nghiệm $x > \frac{-3}{m-2}$.
- Trường hợp $m - 2 < 0$ hay $m < 2$ thì bất phương trình đã cho có các nghiệm $x < \frac{-3}{m-2}$.

□

Ví dụ 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(m^2 - 4m + 3)x + 2m - 4 < 0$ vô nghiệm.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho vô nghiệm khi:

$$\begin{cases} m^2 - 4m + 3 = 0 \\ 2m - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \\ m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

Vậy $m = 3$ là giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

□

Ví dụ 3. Giải và biện luận bất phương trình $\sqrt{x-1}(x-m+2) > 0$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

- Trường hợp $x = 1$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.
- Trường hợp $x > 1$ ta được bất phương trình:
 $x - m + 2 > 0 \Leftrightarrow x > m - 2$.
 - Nếu $m - 2 \geq 1$ hay $m \geq 3$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S = (m - 2; +\infty)$.
 - Nếu $m - 2 < 1$ hay $m < 3$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S = (1; +\infty)$.
- Vậy: với $m \geq 3$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S = (m - 2; +\infty)$;
 với $m < 3$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S = (1; +\infty)$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải và biện luận bất phương trình $(1 - m)x - 2m > -2x - 6$.

Lời giải.

$$(1 - m)x - 2m > -2x - 6 \Leftrightarrow (3 - m)x > 2m - 6.$$

- Trường hợp $3 - m = 0$ hay $m = 3$ thì bất phương trình đã cho vô nghiệm.
- Trường hợp $3 - m > 0$ hay $m < 3$ thì bất phương trình đã cho có các nghiệm $x > \frac{2m - 6}{3 - m}$ hay $x > -2$.
- Trường hợp $3 - m < 0$ hay $m > 3$ thì bất phương trình đã cho có các nghiệm $x < \frac{2m - 6}{3 - m}$ hay $x < -2$.

□

Bài 2. Cho bất phương trình $(m^2 + 3m)x + 4 \geq -2(x + m)$. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

$$(m^2 + 3m)x + 4 \geq -2(x + m) \Leftrightarrow (m^2 + 3m + 2)x + 2m + 4 \geq 0.$$

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi:

$$\begin{cases} m^2 + 3m + 2 = 0 \\ 2m + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -2 \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -2 \end{cases}.$$

Vậy $m = -1, m = -2$ là giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

□

Bài 3. Giải và biện luận bất phương trình $(2x - 3m + 2)\sqrt{2 - x} < 0$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } 2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2.$$

- Trường hợp $x = 2$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.
- Trường hợp $x < 2$ ta được bất phương trình:
 $2x - 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3m - 2}{2}$.
 - Nếu $\frac{3m - 2}{2} < 2$ hay $m < 2$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S = \left(\frac{3m - 2}{2}; 2\right)$.
 - Nếu $\frac{3m - 2}{2} \geq 2$ hay $m \geq 2$ thì bất phương trình vô nghiệm.
- Vậy: với $m \geq 2$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S = \emptyset$;
 với $m < 2$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S = \left(\frac{3m - 2}{2}; 2\right)$.

□

Dạng 3. Tìm giá trị của tham số để bất phương trình có tập nghiệm thỏa điều kiện cho trước

- Biến đổi bất phương trình về một trong bốn dạng sau

$$ax + b > 0, ax + b < 0, ax + b \geq 0, ax + b \leq 0.$$

- Nêu điều kiện mà bất phương trình phải thỏa, từ đó tìm được giá trị của tham số.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 3 ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho bất phương trình $(4m^2 - 6m)x + 7m \geq (3m^2 - 5)x + 4 + 5m$. Định m để bất phương trình thỏa với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

$$\text{Bpt} \Leftrightarrow (m^2 - 6m + 5)x + 2m - 4 \geq 0.$$

Bpt thỏa với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ 2m - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ hoặc } m = 5 \\ m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$$

Vậy bpt thỏa với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m = 5$. □

Ví dụ 2. Định m để bất phương trình $mx + 3m^3 \geq -3(x + 4m^2 - m - 12)$ có tập nghiệm là $[-24; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{Bpt} \Leftrightarrow (m + 3)x + 3m^3 + 12m^2 - 3m - 36 \geq 0 \Leftrightarrow (m + 3)[x + 3(m^2 + m - 4)] \geq 0.$$

- $m = -3$, bpt có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ (loại).
- $m < -3$, bpt $\Leftrightarrow x + 3(m^2 + m - 4) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -3(m^2 + m - 4)$ (loại).
- $m > -3$, bpt $\Leftrightarrow x + 3(m^2 + m - 4) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3(m^2 + m - 4)$. Bpt có tập nghiệm là $[-3(m^2 + m - 4); +\infty)$.

Do đó, bpt có tập nghiệm $[-24; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ -3(m^2 + m - 4) = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m^2 + m - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m = -4 \text{ hay } m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3. \quad \square$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm tất cả các giá trị m để bất phương trình vô nghiệm

$$(6m^2 + m - 2)x - 7m \geq (6m^2 + 5)x - 5m - 6.$$

Lời giải.

$$\text{Bpt} \Leftrightarrow (m-7)x - 2m + 6 \geq 0.$$

$$\text{Bpt vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-7 = 0 \\ -2m+6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 7.$$

□

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị m để bất phương trình sau thỏa với mọi $x \in \mathbb{R}$.

a) $m^2(x-1) \geq 25x + 5m - 6;$

b) $\sqrt{(m^2-9)x + m + 7} > 3;$

Lời giải.

a) Bpt $\Leftrightarrow (m^2-25)x - m^2 - 5m + 6 \geq 0.$

$$\text{Bpt thỏa với mọi } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 25 = 0 \\ -m^2 - 5m + 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -5.$$

b) Bpt $\Leftrightarrow (m^2-9)x + m + 7 > 9 \Leftrightarrow (m^2-9)x + m - 2 > 0.$

$$\text{Bpt thỏa với mọi } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 9 = 0 \\ m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

□

Bài 3. Định m để hàm số $y = \sqrt{(m+3)x + m - 5}$ xác định với mọi $x \in [0; 5]$.

Lời giải.

Hàm số y xác định với mọi $x \in [0; 5] \Leftrightarrow (m+3)x + m - 5 \geq 0$ (*), với mọi $x \in [0; 5]$.

Bpt (*) thỏa với mọi $x \in [0; 5] \Rightarrow$ bpt (*) thỏa tại $x = 0 \Rightarrow m - 5 \geq 0 \Rightarrow m \geq 5.$

Khi đó, (*) $\Leftrightarrow x \geq \frac{-m+5}{m+3}.$

$$\text{Vậy YCBT} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 5 \\ \frac{-m+5}{m+3} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 5.$$

□

Bài 4. Tìm m để bất phương trình $\sqrt{5-x}[(m^2+3)x - 4m] \geq 0$ có tập nghiệm là $[1; 5]$.

Lời giải.

$$\text{Bpt} \Leftrightarrow x = 5 \text{ hoặc } \begin{cases} x < 5 \\ (m^2+3)x - 4m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5 \text{ hoặc } \begin{cases} x < 5 \\ x \geq \frac{4m}{m^2+3} \end{cases}.$$

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow \frac{4m}{m^2+3} = 1 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ hoặc } m = 3.$$

□

Bài 5. Định m để hai bất phương trình sau tương đương

a) $x - 9 < 0$ và $5mx - 3m - 42 < 0;$

b) $3mx + 2 - 2m > 0$ và $(3m-1)x + 3 - 2m > 0.$

Lời giải.

a) Bpt $x - 9 < 0$ có tập nghiệm là $S = (-\infty; 9).$

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m > 0 \\ \frac{3m+42}{5m} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

$$\text{b) YCBT} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3m(3m-1)}{2m-2} = \frac{2m-3}{3m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \text{ hoặc } m > \frac{1}{3} \\ m = -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

**Dạng 4. Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn**

Khi cho một hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn thì tập hợp nghiệm của hệ là giao của các tập hợp nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

• **Các bước thực hành giải toán:**

1. Tìm điều kiện của hệ (nếu có).
2. Biến đổi để đưa hệ bất phương trình về dạng đặc trưng $\begin{cases} a_1x + b_1 \leq 0 & (1) \\ a_2x + b_2 \leq 0 & (2) \end{cases}$.
3. Giải từng bất phương trình trong hệ. Gọi S_1, S_2 lần lượt là tập nghiệm của phương trình (1), (2) trong hệ.
4. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $S = S_1 \cap S_2$.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 4 ❖❖❖

Ví dụ 1. Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ 5 - 2x \geq 0 \end{cases}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ 5 - 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}.$$

Tập nghiệm của hệ bất phương trình $S = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right]$.



Ví dụ 2. Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} 2x - \frac{3}{5} < \frac{7 - 2x}{3} \\ 2x - 1 < 5(3x - 1) \end{cases}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} 2x - \frac{3}{5} < \frac{7 - 2x}{3} \\ x - 1 < 5(3x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30x - 9 < 35 - 10x \\ 2x - 1 < 15x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4}{13} < x < \frac{11}{10}.$$

Tập nghiệm của hệ bất phương trình $S = \left(\frac{4}{13}; \frac{11}{10}\right)$.

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

Bài 1. Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} (x - 1)(x + 2) \leq 2x^2 - x - (x + 3)(x - 1) \\ x - 1 < 0 \end{cases}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} (x - 1)(x + 2) \leq 2x^2 - x - (x + 3)(x - 1) \\ x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 5 \leq 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{4} \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x < 1.$$

Tập nghiệm của hệ bất phương trình $S = (-\infty; 1)$.



Bài 2. Giải hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} 3x - 1 \leq x + 5 \\ 2x - 1 < x^2 - (x - 1)(x + 1) \end{cases}.$$

Lời giải.

$$\begin{cases} 3x - 1 \leq x + 5 \\ 2x - 1 < x^2 - (x - 1)(x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x < 1.$$

Tập nghiệm của hệ bất phương trình $S = (-\infty; 1)$. □

Bài 3. Giải hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} 6x + \frac{5}{7} < 4x + 7 \\ \frac{8x + 3}{2} < 2x + 5 \end{cases}.$$

Lời giải.

$$\begin{cases} 6x + \frac{5}{7} < 4x + 7 \\ \frac{8x + 3}{2} < 2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < \frac{44}{7} \\ 4x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{22}{7} \\ x < \frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{7}{4}.$$

Tập nghiệm của hệ bất phương trình $S = \left(-\infty; \frac{7}{4}\right)$. □

Bài 4. Giải hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x - 3}{\sqrt{x - 4}} > 0 \\ x < 2(x + 1) \end{cases}.$$

Lời giải.

$$\begin{cases} \frac{x - 3}{\sqrt{x - 4}} > 0 \\ x < 2(x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x > 3 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4.$$

Tập nghiệm của hệ bất phương trình $S = (4; +\infty)$. □

Dạng 5. Giải và biện luận hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

Giải và biện luận hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} a_1x + b_1 \leq 0 \\ a_2x + b_2 \leq 0 \end{cases} \quad (I).$$

- Xét các trường hợp tồn tại dấu của a_1 và a_2 .
- Với mỗi trường hợp riêng biệt nhận được ở trên, thông thường ta có các trường hợp sau:

⊕ **TH1:** Nếu $a_1, a_2 > 0$. Khi đó $(I) \Leftrightarrow x \leq \min \left\{ -\frac{b_1}{a_1}, -\frac{b_2}{a_2} \right\}.$

⊕ **TH2:** Nếu $a_1, a_2 < 0$. Khi đó $(I) \Leftrightarrow x \geq \max \left\{ -\frac{b_1}{a_1}, -\frac{b_2}{a_2} \right\}.$

⊕ **TH3:** Nếu $a_1 > 0; a_2 < 0$. Khi đó $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{b_1}{a_1} \\ x \geq -\frac{b_2}{a_2} \end{cases}.$

Hệ có nghiệm điều kiện là: $-\frac{b_2}{a_2} \leq -\frac{b_1}{a_1}.$

Khi đó nghiệm của hệ là: $-\frac{b_2}{a_2} \leq x \leq -\frac{b_1}{a_1}.$

⊕ **TH4:** Nếu $a_1 = 0$ hoặc $a_2 = 0$. Khi đó thay trực tiếp giá trị tham số vào hệ (I) .

BÀI TẬP DẠNG 5

Ví dụ 1. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ bất phương trình: $\begin{cases} x + m \leq 0 \\ -x + 3 < 0 \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải.

$$\begin{cases} x + m \leq 0 \\ -x + 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -m \\ x > 3 \end{cases}.$$

Để hệ bất phương trình có nghiệm thì $-m > 3 \Leftrightarrow m < -3$. □

Ví dụ 2. Tìm m để hệ bất phương trình: $\begin{cases} x + 4m^2 \leq 2mx + 1 \\ 3x + 2 > 2x - 1 \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải.

$$\begin{cases} x + 4m^2 \leq 2mx + 1 & (1) \\ 3x + 2 > 2x - 1 & (2) \end{cases}.$$

$$(2) \Leftrightarrow x > -3.$$

$$(1) \Leftrightarrow (1 - 2m)x \leq 1 - 4m^2. \text{ Xét các trường hợp:}$$

- TH1: Nếu $1 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$. Khi đó (1) có tập nghiệm $S_1 = \mathbb{R}$.

Khi đó hệ có tập nghiệm $S = (-3; +\infty)$.

- TH2: Nếu $1 - 2m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$.

$$\text{Suy ra (1) có nghiệm: } x \geq \frac{1 - 4m^2}{1 - 2m} \Leftrightarrow x \geq 1 + 2m.$$

Khi đó hệ có tập nghiệm $S = [1 + 2m; +\infty)$ (do $1 + 2m > 2 > -3$).

- TH3: Nếu $1 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$ thì (1) có nghiệm $x \leq 1 + 2m$.

Hệ bất phương trình có nghiệm khi: $1 + 2m > -3 \Leftrightarrow m > -2$.

Với $-2 < m < \frac{1}{2}$ thì hệ bất phương trình có tập nghiệm $S = (-3; 1 + 2m)$.

Vậy với $m > -2$ hệ bất phương trình có nghiệm. □

Ví dụ 3. Tìm m để hệ bất phương trình: $\begin{cases} mx + 9 < 3x + m^2 \\ 4x + 1 < -x + 6 \end{cases}$ vô nghiệm.

Lời giải.

$$\begin{cases} mx + 9 < 3x + m^2 & (1) \\ 4x + 1 < -x + 6 & (2) \end{cases}.$$

$$(2) \Leftrightarrow x < 1.$$

$$(1) \Leftrightarrow (m - 3)x < m^2 - 9. \text{ Xét các trường hợp:}$$

- TH1: Nếu $m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$. Khi đó (1) có tập nghiệm $S_1 = \emptyset$.

Với $m = 3$ hệ bất phương trình vô nghiệm.

- TH2: Nếu $m - 3 < 0 \Leftrightarrow m < 3$.

$$\text{Suy ra (1) có nghiệm: } x > m + 3.$$

Khi đó hệ vô nghiệm khi $m + 3 \geq 1 \Leftrightarrow m \geq -2$.

Với $-2 \leq m < 3$ hệ bất phương trình vô nghiệm.

- TH3: Nếu $m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > 3$ thì (1) có nghiệm $x < m + 3$.

Với $m > 3$ hệ bất phương trình luôn có nghiệm.

Vậy hệ bất phương trình vô nghiệm khi $-2 \leq m \leq 3$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ bất phương trình: $\begin{cases} x - 2 \leq 0 \\ m + x > 1 \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải.

$$\begin{cases} x - 2 \leq 0 \\ m + x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x > 1 - m \end{cases}.$$

Để hệ bất phương trình có nghiệm thì $1 - m < 2 \Leftrightarrow m > -1$. □

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ bất phương trình: $\begin{cases} 2x + 7 < 8x - 1 \\ -2x + m + 5 > 0 \end{cases}$ vô nghiệm.

Lời giải.

$$\begin{cases} 2x + 7 < 8x - 1 \\ -2x + m + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{4}{3} \\ x < \frac{m + 5}{2} \end{cases}.$$

Để hệ bất phương trình vô nghiệm thì $\frac{m + 5}{2} \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow m \leq -\frac{7}{3}$. □

Bài 3. Với giá trị nào của m thì hệ $\begin{cases} 3x + 2 - 2m \leq 0 \\ mx + m - 1 \leq 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Lời giải.

$$\begin{cases} 3x + 2 - 2m \leq 0 & (1) \\ mx + m - 1 \leq 0 & (2) \end{cases}.$$

$$(1) \Leftrightarrow x \leq \frac{2m - 2}{3}.$$

(2) $\Leftrightarrow mx \leq 1 - m$ (3). Xét các trường hợp:

- TH1: Nếu $m = 0$, khi đó bất phương trình (3) $\Leftrightarrow 0x \leq 1$ luôn đúng.

Vậy nghiệm của hệ bất phương trình là $x \leq -\frac{2}{3}$ và nghiệm là không duy nhất.

- TH2: Nếu $m > 0$, khi đó bất phương trình (3) $\Leftrightarrow x \leq \frac{1 - m}{m}$.

Khi đó nghiệm của hệ là $x \leq \min \left\{ \frac{2m - 2}{3}, \frac{1 - m}{m} \right\}$ và nghiệm là không duy nhất.

- TH3: Nếu $m < 0$, khi đó bất phương trình (3) $\Leftrightarrow x \geq \frac{1 - m}{m}$.

Khi đó để hệ có nghiệm duy nhất thì $\frac{2m - 2}{3} = \frac{1 - m}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}$.

Vậy với $m = -\frac{3}{2}$ hệ có nghiệm duy nhất. □

Bài 4. Với giá trị nào của m thì hệ $\begin{cases} mx + 6 > 2x + 3m \\ m(x - m) < x - 1 \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải.

Viết lại hệ bất phương trình dưới dạng
$$\begin{cases} (m-2)x > 3m-6 & (1) \\ (m-1)x < m^2-1 & (2) \end{cases} \quad (I).$$

Xét các trường hợp:

- TH1: Nếu $m < 1$, khi đó hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > m+1 \end{cases} \Rightarrow m+1 < x < 3$.
Khi đó tập nghiệm của hệ là $S = (m+1; 3)$.
- TH2: Nếu $m = 1$, khi đó hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ 0x < 0 \end{cases} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.
- TH3: Nếu $1 < m < 2$, khi đó hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x < m+1 \end{cases} \Rightarrow x < \min\{3, m+1\} = m+1$.
Khi đó tập nghiệm của hệ $S = (-\infty; m+1)$.
- TH4: Nếu $m = 2$, khi đó hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 0x > 0 \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.
- TH5: Nếu $m > 2$, khi đó hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < m+1 \end{cases} \Rightarrow 3 < x < m+1$.
Khi đó tập nghiệm của hệ $S = (3; m+1)$.

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm khi $m \neq 1$ và $m \neq 2$. □

► Dạng 6. Tìm giá trị của tham số để hệ bất phương trình có tập nghiệm thỏa điều kiện cho trước

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 6 ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x - m + 1 > 0 \\ m + 2 - x \geq 0. \end{cases}$$
 Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình

- a) Nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; -1)$.
- b) Có duy nhất một nghiệm thuộc $[1; 3)$.
- c) Có nghiệm thuộc $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$.

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} x - m + 1 > 0 \\ m + 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > m - 1 \\ x \leq m + 2 \end{cases} \quad \text{Suy ra hệ có tập nghiệm } S = (m-1; m+2].$$

- a) Hệ có nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; -1)$ khi và chỉ khi
$$[-2; -1) \subset S \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < -2 \\ m+2 \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m < -1.$$
- b) Hệ có duy nhất một nghiệm thuộc $[1; 3) \Leftrightarrow m+2 = 1 \Leftrightarrow m = -1$.
- c) Hệ không có nghiệm thuộc $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq m - 1 \\ m + 2 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{3}{2} \\ m < -3. \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm thuộc $\left[-1; \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow -3 \leq m < \frac{3}{2}$.

□

Ví dụ 2. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + m > 1 \\ mx + m^2 - 2m \geq 0. \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham

số m để hệ bất phương trình

- Nghiem đúng với mọi $x \in [-1; +\infty)$.
- Có nghiệm thuộc $[0; 3)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} x + m > 1 \\ mx + m^2 - 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 - m \\ mx \geq m(2 - m). \end{cases} \quad (1) \quad (2)$ Gọi S_1, S_2, S lần lượt là tập nghiệm của

(1), (2) và của hệ. Khi đó $S_1 = (1 - m; +\infty)$ và

- Với $m = 0$ ta có $S_2 = \mathbb{R} \Rightarrow S = S_1 \cap S_2 = (1 - m; +\infty)$.
- Với $m > 0$ ta có $S_2 = [2 - m; +\infty) \Rightarrow S = S_1 \cap S_2 = [2 - m; +\infty)$.
- Với $m < 0$ ta có $S_2 = (-\infty; 2 - m] \Rightarrow S = S_1 \cap S_2 = (1 - m; 2 - m]$.

a) Hệ có nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; +\infty) \Leftrightarrow [-1; +\infty) \subset S$.

- Với $m = 0$ ta có $S = (1; +\infty) \not\subset [-1; +\infty) \Rightarrow m = 0$ không thỏa mãn.
- Với $m > 0$ ta có $[-1; +\infty) \subset S \Leftrightarrow 2 - m \leq -1 \Leftrightarrow m \geq 3$. Kết hợp điều kiện $m > 0$ ta có $m \geq 3$ thỏa mãn.
- Với $m < 0$ ta có $S = (1 - m; 2 - m] \not\subset [-1; +\infty) \Rightarrow m < 0$ không thỏa mãn.

Vậy tập các giá trị m thỏa mãn là $[3; +\infty)$.

b) Hệ có nghiệm thuộc $[0; 3) \Leftrightarrow [3; 0) \cap S \neq \emptyset$.

- Với $m = 0$ ta có $[0; 3) \cap S = (1; 3) \neq \emptyset \Rightarrow m = 0$ thỏa mãn.
- Với $m > 0$ ta có $[0; 3) \cap S \neq \emptyset \Leftrightarrow 2 - m < 3 \Leftrightarrow m > -1$. Kết hợp điều kiện $m > 0$ ta có $m > 0$ thỏa mãn.

- Với $m < 0$ ta có $[0; 3) \cap S \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m < 3 \\ 2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 2$. Kết hợp điều kiện $m < 0$ ta có $-2 < m < 0$ thỏa mãn.

Vậy tập các giá trị m thỏa mãn là $(-2; +\infty)$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 2m - 1 > 0 \\ 6m - 2 - x \geq 0. \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ có nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; 3]$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} x + 2m - 1 > 0 \\ 6m - 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 - 2m \\ x \leq 6m - 2 \end{cases}$ Hệ có nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; 3] \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m < -2 \\ 3 \leq 6m - 2 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$. $\square$

Bài 2. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + m > 2 \\ (m - 1)x - m^2 + 4m - 3 > 0 \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ

- Có nghiệm thuộc $(-\infty; 2)$.
- Có nghiệm thuộc $[-1; 3]$.
- Nghiem đúng với mọi $x \in [-1; 3]$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} x + m > 2 \\ (m - 1)x - m^2 + 4m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 - m \\ (m - 1)x > (m - 1)(m - 3) \end{cases}$ Giải và biện luận hệ ta có

- Với $m \leq 1$ ta có hệ vô nghiệm.
- Với $m > 1$, hệ có tập nghiệm $S = (\max\{m - 3; 2 - m\}; +\infty)$.

- Hệ có nghiệm thuộc $(-\infty; 2)$

$$\Leftrightarrow \max\{m - 3; 2 - m\} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 < 2 \\ 2 - m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 5.$$

Kết hợp điều kiện $m > 1$ ta có $1 < m < 5$ thỏa mãn.

- Hệ có nghiệm thuộc $[-1; 3]$

$$\Leftrightarrow \max\{m - 3; 2 - m\} < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 < 3 \\ 2 - m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 6.$$

Kết hợp điều kiện $m > 1$ ta có $1 < m < 5$ thỏa mãn.

- Hệ có nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 3]$

$$\Leftrightarrow \max\{m - 3; 2 - m\} < -1 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 < -1 \\ 2 - m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m > 3 \end{cases} \text{ vô nghiệm } m.$$

$\square$

Bài 3. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} mx - 1 < 0 \\ (3m - 2)x - m < 0 \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ nghiệm đúng với mọi x dương.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} mx - 1 < 0 \\ (3m - 2)x - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx < 1 \\ (3m - 2)x < m \end{cases}$ Ta có

- Với $m = 0$, hệ có tập nghiệm $S = (0; +\infty) \Rightarrow m = 0$ thỏa mãn.
- Với $m = \frac{2}{3}$, hệ có tập nghiệm $S = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \not\subset (0; +\infty) \Rightarrow m = \frac{2}{3}$ không thỏa mãn.
- Với $m < 0$, hệ có tập nghiệm $S = \left(\frac{m}{3m - 2}; +\infty\right)$. Hệ có nghiệm đúng với mọi x dương $\Leftrightarrow \frac{m}{3m - 2} \leq$

$0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{2}{3}$ không thỏa mãn điều kiện $m < 0$.

• Với $0 < m < \frac{2}{3}$, hệ vô nghiệm.

• Với $m > \frac{2}{3}$, hệ có tập nghiệm $\left(-\infty; \min\left\{\frac{1}{m}; \frac{m}{3m-2}\right\}\right) \not\subset (0; +\infty) \Rightarrow m > \frac{2}{3}$ không thỏa mãn.

Vậy có duy nhất giá trị $m = 0$ thỏa mãn đề bài. $\square$

Bài 4. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} m(x-1) + 2 \geq 0 \\ x - m \leq 2. \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 1]$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} m(x-1) + 2 \geq 0 \\ x - m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx \geq m-2 \\ x \leq m+2. \end{cases}$$

• Với $m = 0$, hệ có tập nghiệm $S = (-\infty; 2) \supset [0; 1] \Rightarrow m = 0$ thỏa mãn.

• Với $m < 0$, hệ có tập nghiệm $S = \left(-\infty; \min\left\{\frac{m-2}{m}; m+2\right\}\right)$. Hệ nhận mọi $x \in [0; 1]$ là nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-2}{m} \geq 1 \\ m+2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -1. \text{ Kết hợp điều kiện } m < 0 \text{ ta có } -1 \leq m < 0 \text{ thỏa mãn.}$$

• Với $m > 0$, hệ nhận mọi $x \in [0; 1]$ là nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-2}{m} \leq 0 \\ m+2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 2$. Kết hợp điều kiện $m > 0$

ta có $0 < m \leq 2$ thỏa mãn.

Vậy tập các giá trị m thỏa mãn là $[-1; 2]$. $\square$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 5. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 2m - 1 \geq 0 \\ \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} \leq \frac{m+1}{\sqrt{4-x^2}}. \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình nhận tập xác định là tập nghiệm.

Lời giải.

$$\text{TXĐ } D = (-2; 2). \text{ Ta có } \begin{cases} x + 2m - 1 \geq 0 \\ \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} \leq \frac{m+1}{\sqrt{4-x^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 - 2m \\ x \leq \frac{m+1}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Hệ có nghiệm đúng với mọi } x \in (-2; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m \leq -2 \\ m + 1 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 3. \quad \square$$

Bài 6. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + m - 1 \leq 0 \\ \frac{2x}{\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x}} \geq \frac{m+1}{\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x}}. \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ có nghiệm.

Lời giải.

$$\text{TXĐ } D = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]. \text{ Ta có } \begin{cases} x + m - 1 \leq 0 \\ \frac{2x}{\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x}} \geq \frac{m+1}{\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 - m \\ x \geq \frac{m+1}{2}. \end{cases} \quad (*)$$

Hệ ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi hệ (*) có tập nghiệm S thỏa mãn $\begin{cases} S \neq \emptyset \\ S \cap \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \neq \emptyset. \end{cases}$

$$\bullet S \neq \emptyset \Leftrightarrow \frac{m+1}{2} \leq 1-m \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{3}.$$

$$\bullet S \cap \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m+1}{2} > \frac{1}{2} \\ 1-m < -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > 0 \Rightarrow S \cap \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \neq \emptyset \Leftrightarrow m \leq 0.$$

Kết hợp điều kiện $m \leq \frac{1}{3}$ ta có $m \leq 0$ thỏa mãn.

□