LUYỆN TẬP CHỦ ĐỀ
TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

Câu 1. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai véc-tơ cùng hướng và đều khác véc-tơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|$.
B. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.
C. $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$.
D. $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})$.

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai véc-tơ cùng hướng nên $(\vec{a},\vec{b})=0^\circ\Rightarrow\cos(\vec{a},\vec{b})=1$. Vậy $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho hai véc-tơ $\vec{a},\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khi $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|$.

A. $\alpha=180^\circ$.
B. $\alpha=0^\circ$.
C. $\alpha=90^\circ$.
D. $\alpha=45^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})$.

Mà theo giả thiết $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|$, suy ra $\cos(\vec{a},\vec{b})=-1\Rightarrow(\vec{a},\vec{b})=180^\circ$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=3$, $\left|\vec{b}\right|=2$ và $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$. Xác định góc α giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=30^\circ$.
B. $\alpha=45^\circ$.
C. $\alpha=60^\circ$.
D. $\alpha=120^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})\Rightarrow\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-3}{3\cdot 2}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow(\vec{a},\vec{b})=120^\circ$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|=1$ và hai véc-tơ $\vec{u}=\dfrac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=90^\circ$.
B. $\alpha=180^\circ$.
C. $\alpha=60^\circ$.
D. $\alpha=45^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}\perp\vec{v}\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow(\dfrac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})=0\Leftrightarrow\dfrac{2}{5}\vec{a}^2-\dfrac{13}{5}\vec{a}.\vec{b}-3\vec{b}^2=0\xrightarrow{|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|=1}\vec{a}.\vec{b}=-1$.

Suy ra $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}=-1\Rightarrow(\vec{a},\vec{b})=180^\circ$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-|\vec{a}|^2-\left|\vec{b}\right|^2\right)$.
B. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$.
C. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$.
D. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{4}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$.

Lời giải.

Ta có

- $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2=4\vec{a}\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{4}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$.
- $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$
  $=|\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-|\vec{a}|^2-\left|\vec{b}\right|^2\right)$.
- $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=(\vec{a}-\vec{b})^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$
  $=|\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

C. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\dfrac{a^2}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$.

Lời giải.

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ là góc $\widehat{A}$ nên $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=60^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=a\cdot a\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{a^2}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\dfrac{a^2}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{a^2}{2}$.

Lời giải.

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$ là góc ngoài của góc $\widehat{B}$ nên $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})=120^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=AB\cdot BC\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})=a\cdot a\cdot\cos 120^\circ=-\dfrac{a^2}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}a^2$. **B.** $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=-\dfrac{1}{2}a^2$. **C.** $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=\dfrac{a^2}{6}$. **D.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{2}a^2$.

Lời giải.

- Xác định được góc $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ là góc $\widehat{A}$ nên $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=60^\circ$.
  Do đó $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=a\cdot a\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{a^2}{2}$.
- Xác định được góc $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB})$ là góc ngoài của góc $\widehat{C}$ nên $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB})=120^\circ$.
  Do đó $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=AC.CB\cdot\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB})=a\cdot a\cdot\cos 120^\circ=-\dfrac{a^2}{2}$.
- Xác định được góc $(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB})$ là góc $\widehat{AGB}$ nên $(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB})=120^\circ$.
  Do đó $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=GA\cdot GB\cdot\cos(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB})=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{a}{\sqrt{3}}\cdot\cos 120^\circ=-\dfrac{a^2}{6}$.
- Xác định được góc $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG})$ là góc $\widehat{GAB}$ nên $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG})=30^\circ$.
  Do đó $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}=AB\cdot AG\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG})=a\cdot\dfrac{a}{\sqrt{3}}\cdot\cos 30^\circ=\dfrac{a^2}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và chiều cao AH. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. **B.** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HA}) = 150°$. **C.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{a^2}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \dfrac{a^2}{2}$.

Lời giải.

Xác định được góc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$ là góc ngoài của góc $\widehat{A}$ nên $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120°$.

Do đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = a \cdot a \cdot \cos 120° = -\dfrac{a^2}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và có $AB = AC = a$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$.

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ là góc ngoài của góc $\widehat{B}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 135°$.

Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 135° = -a^2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = c$, $AC = b$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$. **B.** $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$. **C.** $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 + c^2$. **D.** $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 - c^2$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = BA \cdot BC \cdot \cos\widehat{B} = c \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \dfrac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = c^2$.

Cách khác. Tam giác ABC vuông tại A suy ra $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 = c^2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Cho tam giác ABC có $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm, $CA = 5$ cm. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 13$. **B.** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15$. **C.** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 17$. **D.** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 19$.

Lời giải.

Ta có $AB + BC = CA \Rightarrow$ ba điểm A, B, C thẳng hàng và B nằm giữa A, C.

Khi đó $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 3 \cdot 5 \cdot \cos 0° = 15$.

Cách khác. Ta có $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})^2 = CB^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + CA^2$

$\Rightarrow \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \dfrac{1}{2}(CB^2 + CA^2 - AB^2) = \dfrac{1}{2}(3^2 + 5^2 - 2^2) = 15$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $P = b^2 - c^2$. **B.** $P = \dfrac{c^2 + b^2}{2}$. **C.** $P = \dfrac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$. **D.** $P = \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Lời giải.

Ta có $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = AC^2 - AB^2 = b^2 - c^2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{b^2 - c^2}{2}$. **B.** $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{c^2 + b^2}{2}$.

C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$. **D.** $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Lời giải.
Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$.
Khi đó $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$
$=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2)=\dfrac{1}{2}(AC^2-AB^2)=\dfrac{b^2-c^2}{2}$.
Chọn đáp án A □

Câu 15. Cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{AB}=0$ là

A. tam giác OAB đều.
B. tam giác OAB cân tại O.
C. tam giác OAB vuông tại O.
D. tam giác OAB vuông cân tại O.

Lời giải.
Ta có $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0$
$\Leftrightarrow\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OA}^2=0\Leftrightarrow OB^2-OA^2=0\Leftrightarrow OB=OA$.
Chọn đáp án B □

Câu 16. Cho M, N, P, Q là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào **sai**?

A. $\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ})=\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PQ}$.
B. $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}$.
C. $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{MN}$.
D. $(\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PQ})(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ})=MN^2-PQ^2$.

Lời giải.
$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}$.
Chọn đáp án B □

Câu 17. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=a^2$.
B. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=a^2\sqrt{2}$.
C. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^2$.
D. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}a^2$.

Lời giải.
Ta có $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\widehat{BAC}=45^\circ$ nên $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos 45^\circ=a\cdot a\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=a^2$.
Chọn đáp án A □

Câu 18. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $P=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA})$.

A. $P=-1$.
B. $P=3a^2$.
C. $P=-3a^2$.
D. $P=2a^2$.

Lời giải.
Từ giả thiết suy ra $AC=a\sqrt{2}$.
Ta có
$$\begin{aligned}P&=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}^2\\&=-CA\cdot CD\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD})-AC^2=-a\sqrt{2}\cdot a\cdot\cos 45^\circ-(a\sqrt{2})^2=-3a^2.\end{aligned}$$
Chọn đáp án C □

Câu 19. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $P=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA})$.

A. $P=2\sqrt{2}a$.
B. $P=2a^2$.
C. $P=a^2$.
D. $P=-2a^2$.

Lời giải.
Ta có $\begin{cases}BD=a\sqrt{2}\\ \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BD}.\end{cases}$

Khi đó
$$P=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot 2\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}+0$$
$$=-2\cdot BA\cdot BD\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD})=-2\cdot a\cdot a\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-2a^2.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua C. Tính $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}$.

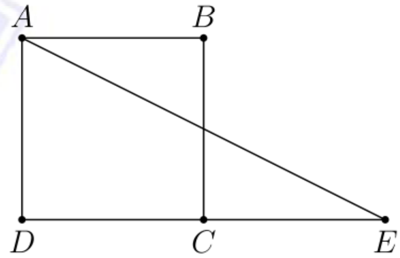
A. $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=2a^2$. **B.** $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}a^2$. **C.** $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{5}a^2$. **D.** $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=5a^2$.

Lời giải.

Ta có C là trung điểm của DE nên $DE=2a$.

Khi đó $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})\cdot\overrightarrow{AB}=\underbrace{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}_{0}+\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=DE\cdot AB\cdot\cos(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{AB})=DE\cdot AB\cdot\cos 0^\circ=2a^2$.



Chọn đáp án (A) □

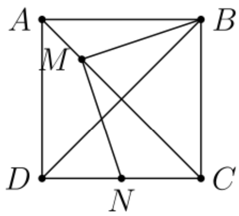
Câu 21. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM=\frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC. Tính $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}$.

A. $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}=-4$. **B.** $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}=0$. **C.** $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}=4$. **D.** $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}=16$.

Lời giải.

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MN}$ theo các véc-tơ có giá vuông góc với nhau.

- $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.
-
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\\&=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\\&=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$



Suy ra:
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}&=\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)\\&=\frac{1}{16}(3\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{AB}^2-3\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB})=\frac{1}{16}(0+3a^2-3a^2-0)=0.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=8$, $AD=5$. Tích $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$.

A. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=62$. **B.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=64$. **C.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=-62$. **D.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=-64$.

Lời giải.

Ta phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$ theo các véc-tơ có giá vuông góc với nhau.

Ta có
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+0=-AB^2=-64.$$

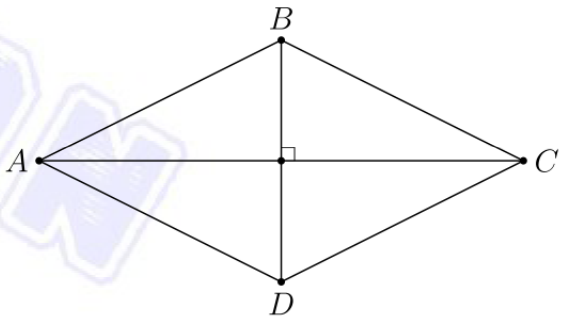
Chọn đáp án D ☐

Câu 23. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 8$ và $BD = 6$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$. **B.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$. **C.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$. **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$.

Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$, giả thiết không cho góc, ta phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ theo các véc-tơ có giá vuông góc với nhau.



Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + 0 = \frac{1}{2}AC^2 = 32.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D ☐

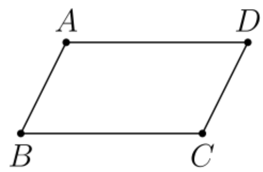
Câu 24. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 8$ cm, $AD = 12$ cm, góc $\widehat{ABC}$ nhọn và diện tích bằng 54 cm^2. Tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

A. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{2\sqrt{7}}{16}$. **B.** $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -\dfrac{2\sqrt{7}}{16}$.

C. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{5\sqrt{7}}{16}$. **D.** $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\triangle ABC} = 54 \Leftrightarrow S_{\triangle ABC} = 27$ cm^2.



Diện tích tam giác ABC là:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin\widehat{ABC}.$$

$\Rightarrow \sin\widehat{ABC} = \dfrac{2 \cdot S_{\triangle ABC}}{AB \cdot AD} = \dfrac{2 \cdot 27}{8 \cdot 12} = \dfrac{9}{16} \Rightarrow \cos\widehat{ABC} = \sqrt{1 - \sin^2\widehat{ABC}} = \dfrac{5\sqrt{7}}{16}$(vì $\widehat{ABC}$ nhọn).

Mặt khác góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ là góc ngoài của góc $\widehat{ABC}$.

Suy ra $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \cos(180^\circ - \widehat{ABC}) = -\cos\widehat{ABC} = -\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$.

Chọn đáp án D ☐

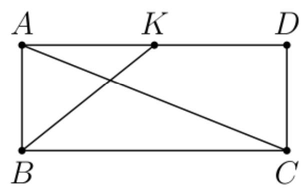
Câu 25. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD. Tính $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. **B.** $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2\sqrt{2}$.

C. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$. **D.** $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$.

Lời giải.

Ta có $AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.



Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\end{cases}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\\ &= \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=-a^2+0+0+\frac{1}{2}(a\sqrt{2})^2=0.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 26. Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=0$ là

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm $BC \Rightarrow \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}$.

Ta có $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot 2\overrightarrow{MI}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MI}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MI}$. $(*)$

Biểu thức $(*)$ chứng tỏ $MA\perp MI$ hay M nhìn đoạn AI dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AI.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Tìm tập các hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=0$ với A, B, C là ba đỉnh của tam giác.

A. Một điểm. **B.** Đường thẳng. **C.** Đoạn thẳng. **D.** Đường tròn.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Ta có $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}\cdot 3\overrightarrow{MG}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MG}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{MG}$. $(*)$.

Biểu thức $(*)$ chứng tỏ $MB\perp MG$ hay M nhìn đoạn BG dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính BG.

Chọn đáp án D □

Câu 28. Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ là

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow MA\perp BC$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Cho hai điểm A, B cố định có khoảng cách bằng a. Tập hợp các điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AB}=2a^2$ là

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải.

Gọi C là điểm đối xứng của A qua B. Khi đó $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}^2=2a^2$.

Kết hợp với giả thiết, ta có

$$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC})=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CN}=0 \Leftrightarrow CN\perp AB.$$

Vậy tập hợp các điểm N là đường thẳng qua C và vuông góc với AB.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Cho hai điểm A, B cố định và $AB = 8$ Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -16$ là

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Rightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.

Ta có

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}.$$

Theo giả thiết, ta có $MI^2 - \frac{AB^2}{4} = -16 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4} - 16 = \frac{8^2}{4} - 16 = 0 \Rightarrow M \equiv I$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(3;-1)$, $B(2;10)$, $C(-4;2)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 40$. **B.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -40$. **C.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$. **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -26$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;11)$, $\overrightarrow{AC} = (-7;3)$. Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1) \cdot (-7) + 11 \cdot 3 = 40$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(3;-1)$ và $B(2;10)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB}$.

A. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = -4$. **B.** $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$. **C.** $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 4$. **D.** $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 16$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AO} = (-3;1)$, $\overrightarrow{OB} = (2;10)$. Suy ra $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = -3 \cdot 2 + 1 \cdot 10 = 4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai véc-tơ $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$ và $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -30$. **B.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$. **C.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$. **D.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 43$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $\vec{a} = (4;6)$ và $\vec{b} = (3;-7)$. Suy ra $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 3 + 6 \cdot (-7) = -30$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (-3;2)$ và $\vec{b} = (-1;-7)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\vec{c}$ biết $\vec{c} \cdot \vec{a} = 9$ và $\vec{c} \cdot \vec{b} = -20$.

A. $\vec{c} = (-1;-3)$. **B.** $\vec{c} = (-1;3)$. **C.** $\vec{c} = (1;-3)$. **D.** $\vec{c} = (1;3)$.

Lời giải.

Gọi $\vec{c} = (x;y)$. Ta có $\begin{cases} \vec{c} \cdot \vec{a} = 9 \\ \vec{c} \cdot \vec{b} = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y = 9 \\ -x - 7y = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \vec{c} = (-1;3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba véc-tơ $\vec{a} = (1;2)$, $\vec{b} = (4;3)$ và $\vec{c} = (2;3)$. Tính $P = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$.

A. $P = 0$. **B.** $P = 18$. **C.** $P = 20$. **D.** $P = 28$.

Lời giải.

Ta có $\vec{b}+\vec{c}=(6;6)$. Suy ra $P=\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=1\cdot 6+2\cdot 6=18$.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai véc-tơ $\vec{a}=(-1;1)$ và $\vec{b}=(2;0)$. Tính cosin của góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

B. $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

D. $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-1\cdot 2+1\cdot 0}{\sqrt{(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+0^2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai véc-tơ $\vec{a}=(-2;-1)$ và $\vec{b}=(4;-3)$. Tính cosin của góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{1}{2}$. .

Lời giải.

Ta có $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-2\cdot 4+(-1)\cdot(-3)}{\sqrt{4+1}\cdot\sqrt{16+9}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai véc-tơ $\vec{a}=(4;3)$ và $\vec{b}=(1;7)$. Tính góc α giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=90^\circ$. **B.** $\alpha=60^\circ$. **C.** $\alpha=45^\circ$. **D.** $\alpha=30^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{4\cdot 1+3\cdot 7}{\sqrt{16+9}\cdot\sqrt{1+49}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow(\vec{a},\vec{b})=45^\circ$.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai véc-tơ $\vec{x}=(1;2)$ và $\vec{y}=(-3;-1)$. Tính góc α giữa hai véc-tơ $\vec{x}$ và $\vec{y}$.

A. $\alpha=45^\circ$. **B.** $\alpha=60^\circ$. **C.** $\alpha=90^\circ$. **D.** $\alpha=135^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\cos(\vec{x},\vec{y})=\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}=\dfrac{1\cdot(-3)+2\cdot(-1)}{\sqrt{1+4}\cdot\sqrt{9+1}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow(\vec{x},\vec{y})=135^\circ$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai véc-tơ $\vec{a}=(2;5)$ và $\vec{b}=(3;-7)$. Tính góc α giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=30^\circ$. **B.** $\alpha=45^\circ$. **C.** $\alpha=60^\circ$. **D.** $\alpha=135^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{2\cdot 3+5(-7)}{\sqrt{4+25}\cdot\sqrt{9+49}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow(\vec{a},\vec{b})=135^\circ$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho véc-tơ $\vec{a} = (9;3)$. Véc-tơ nào sau đây không vuông góc với véc-tơ $\vec{a}$?

A. $\vec{v_1} = (1;-3)$. **B.** $\vec{v_2} = (2;-6)$. **C.** $\vec{v_3} = (1;3)$. **D.** $\vec{v_4} = (-1;3)$.

Lời giải.

Kiểm tra tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{v}$, nếu đáp án nào cho kết quả khác 0 thì kết luận véc-tơ đó không vuông góc với $\vec{a}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;2)$, $B(-1;1)$ và $C(5;-1)$. Tính cosin của góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\dfrac{1}{2}$. **B.** $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\dfrac{2}{5}$. **D.** $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2;-1)$ và $\overrightarrow{AC} = (4;-3)$.

Suy ra $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \dfrac{-2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3)}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{16+9}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 43. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(6;0)$, $B(3;1)$ và $C(-1;-1)$. Tính số đo góc B của tam giác đã cho.

A. 15°. **B.** 60°. **C.** 120°. **D.** 135°.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA} = (3;-1)$ và $\overrightarrow{BC} = (-4;-2)$.

Suy ra: $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \dfrac{3 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-2)}{\sqrt{9+1} \cdot \sqrt{16+4}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{B} = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 135^\circ$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(-8;0)$, $B(0;4)$, $C(2;0)$ và $D(-3;-5)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ phụ nhau. **B.** Góc $\widehat{BCD}$ là góc nhọn.

C. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$. **D.** Hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ bù nhau.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (8;4)$, $\overrightarrow{AD} = (5;-5)$, $\overrightarrow{CB} = (-2;4)$, $\overrightarrow{CD} = (-5;5)$.

Suy ra $\begin{cases} \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \dfrac{8 \cdot 5 + 4 \cdot (-5)}{\sqrt{8^2+4^2} \cdot \sqrt{5^2+5^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = \dfrac{(-2) \cdot (-5) + 4 \cdot (-5)}{\sqrt{2^2+4^2} \cdot \sqrt{5^2+5^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}. \end{cases}$

$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = 0 \Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai véc-tơ $\vec{u} = \dfrac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$ và $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$. Tìm k để véc-tơ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

A. $k = 20$. **B.** $k = -20$. **C.** $k = -40$. **D.** $k = 40$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $\vec{u} = (\frac{1}{2}; -5)$, $\vec{v} = (k; -4)$.

Yêu cầu bài toán: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \frac{1}{2}k + (-5)(-4) = 0 \Leftrightarrow k = -40$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai véc-tơ $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$ và $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$. Tìm k để véc-tơ $\vec{u}$ và véc-tơ $\vec{v}$ có độ dài bằng nhau.

A. $k = \frac{37}{4}$. **B.** $k = \frac{\sqrt{37}}{2}$. **C.** $k = \pm\frac{\sqrt{37}}{2}$. **D.** $k = \frac{5}{8}$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $\vec{u} = (\frac{1}{2}; -5)$, $\vec{v} = (k; -4)$.

Suy ra $|\vec{u}| = \sqrt{\frac{1}{4} + 25} = \frac{1}{2}\sqrt{101}$ và $|\vec{v}| = \sqrt{k^2 + 16}$.

Do đó để $|\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{k^2 + 16} = \frac{1}{2}\sqrt{101} \Leftrightarrow k^2 + 16 = \frac{101}{4} \Leftrightarrow k^2 = \frac{37}{4} \Leftrightarrow k = \pm\frac{\sqrt{37}}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba véc-tơ $\vec{a} = (-2; 3)$, $\vec{b} = (4; 1)$ và $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$ với k, $m \in \mathbb{R}$. Biết rằng véc-tơ $\vec{c}$ vuông góc với véc-tơ $(\vec{a} + \vec{b})$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $2k = 2m$. **B.** $3k = 2m$. **C.** $2k + 3m = 0$. **D.** $3k + 2m = 0$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b} = (-2k + 4m; 3k + m) \\ \vec{a} + \vec{b} = (2; 4). \end{cases}$

Để $\vec{c} \perp (\vec{a} + \vec{b}) \Leftrightarrow \vec{c}(\vec{a} + \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow 2(-2k + 4m) + 4(3k + m) = 0 \Leftrightarrow 2k + 3m = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (-2; 3)$ và $\vec{b} = (4; 1)$. Tìm véc-tơ $\vec{d}$ biết $\vec{a} \cdot \vec{d} = 4$ và $\vec{b} \cdot \vec{d} = -2$.

A. $\vec{d} = (\frac{5}{7}; \frac{6}{7})$. **B.** $\vec{d} = (-\frac{5}{7}; \frac{6}{7})$. **C.** $\vec{d} = (\frac{5}{7}; -\frac{6}{7})$. **D.** $\vec{d} = (-\frac{5}{7}; -\frac{6}{7})$.

Lời giải.

Gọi $\vec{d} = (x; y)$. Từ giả thiết, ta có hệ $\begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ 4x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{7} \\ y = \frac{6}{7} \end{cases}$.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba véc-tơ $\vec{u} = (4; 1)$, $\vec{v} = (1; 4)$ và $\vec{a} = \vec{u} + m \cdot \vec{v}$ với $m \in \mathbb{R}$. Tìm m để $\vec{a}$ vuông góc với trục hoành.

A. $m = 4$. **B.** $m = -4$. **C.** $m = -2$. **D.** $m = 2$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} = \vec{u} + m \cdot \vec{v} = (4 + m; 1 + 4m)$.

Trục hoành có véc-tơ đơn vị là $\vec{i} = (1; 0)$.

véc-tơ $\vec{a}$ vuông góc với trục hoành $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{i} = 0 \Leftrightarrow 4 + m = 0 \Leftrightarrow m = -4$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai véc-tơ $\vec{u} = (4;1)$ và $\vec{v} = (1;4)$. Tìm m để véc-tơ $\vec{a} = m \cdot \vec{u} + \vec{v}$ tạo với véc-tơ $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$ một góc $45°$.

A. $m = 4$. **B.** $m = -\dfrac{1}{2}$. **C.** $m = -\dfrac{1}{4}$. **D.** $m = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \vec{a} = m \cdot \vec{u} + \vec{v} = (4m+1; m+4) \\ \vec{b} = \vec{i} + \vec{j} = (1;1). \end{cases}$

Yêu cầu bài toán tương đương

$$\begin{aligned} & \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{(4m+1)+(m+4)}{\sqrt{2}\sqrt{(4m+1)^2+(m+4)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{5(m+1)}{\sqrt{2}\sqrt{17m^2+16m+17}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & 5(m+1) = \sqrt{17m^2+16m+17} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \geq 0 \\ 25m^2+50m+25 = 17m^2+16m+17 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. D	4. B	5. C	6. D	7. C	8. C	9. D	10. A
11. B	12. B	13. A	14. A	15. B	16. B	17. A	18. C	19. D	20. A
21. B	22. D	23. D	24. D	25. A	26. D	27. D	28. B	29. B	30. A
31. A	32. C	33. A	34. B	35. B	36. B	37. A	38. C	39. D	40. D
41. C	42. D	43. D	44. D	45. C	46. C	47. C	48. B	49. B	50. C