

Chương 1:

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC – PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1. CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. GIÁO KHOA

I/ Hàm số chẵn – hàm số lẻ

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D .

- Hàm số f được gọi là hàm số chẵn nếu $\forall x \in D$, ta có: $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.
- Hàm số f được gọi là hàm số lẻ nếu $\forall x \in D$, ta có $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

Lưu ý: Có những hàm số không chẵn, không lẻ.

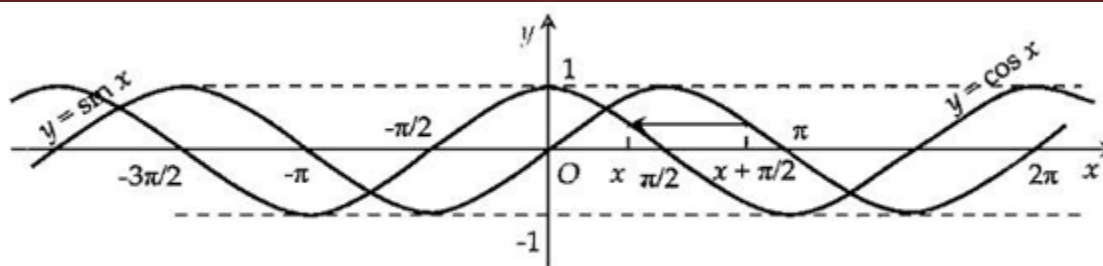
II/ Hàm số tuần hoàn

- Hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D được gọi là hàm số tuần hoàn nếu có số $T \neq 0$ sao cho $\forall x \in D$ ta có: $x+T \in D$, $x-T \in D$ và $f(x+T) = f(x)$ (*)
- Số T dương nhỏ nhất thỏa (*) được gọi là chu kỳ của hàm số tuần hoàn. Ta nói hàm số f tuần hoàn với chu kỳ T .

III/Các hàm số lượng giác

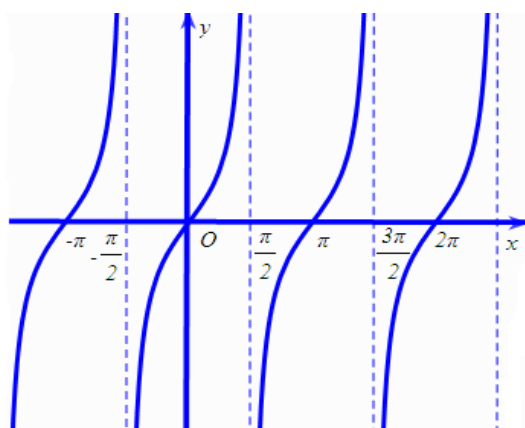
1/ Hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$

Hàm số $y = \sin x$	Hàm số $y = \cos x$
Định nghĩa: Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với sin của góc lượng giác có số đo radian bằng x được gọi là <u>hàm số sin</u> . Ký hiệu: $y = \sin x$	Định nghĩa: Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với cosin của góc lượng giác có số đo radian bằng x được gọi là <u>hàm số cosin</u> . Ký hiệu: $y = \cos x$
1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ 2. Tập giá trị: $[-1;1]$ 3. Là hàm số lẻ 4. Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π . 5. Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$. 6. Nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$. 7. Có đồ thị là một đường hình sin, nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.	1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ 2. Tập giá trị: $[-1;1]$ 3. Là hàm số chẵn 4. Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π . 5. Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi), k \in \mathbb{Z}$. 6. Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$. 7. Có đồ thị là một đường hình sin, nhận trục tung làm trục đối xứng.

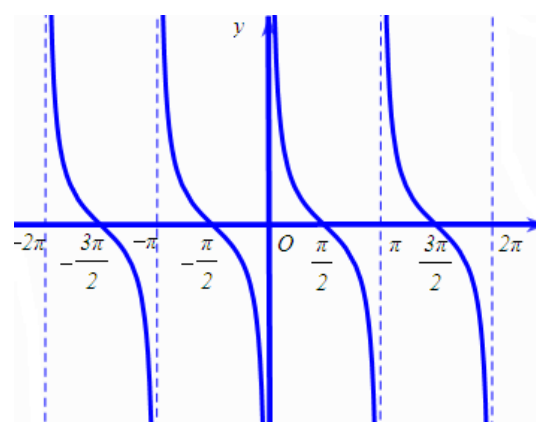


2/ Hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$

Hàm số $y = \tan x$	Hàm số $y = \cot x$
Định nghĩa: Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ với số $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ được gọi là <u>hàm số tang</u>. Ký hiệu: $y = \tan x$ 1. Tập xác định: $D_1 = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ 2. Tập giá trị: $\mathbb{R}$ 3. Là hàm số lẻ 4. Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π. 5. Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$. 6. Đồ thị nhận mỗi đường $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận.	Định nghĩa: Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ với số $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ được gọi là <u>hàm số cotang</u>. Ký hiệu: $y = \cot x$ 1. Tập xác định: $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 2. Tập giá trị: $\mathbb{R}$ 3. Là hàm số lẻ 4. Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π. 5. Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$. 6. Đồ thị nhận mỗi đường $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận.



Đồ thị hàm số $y = \tan x$



Đồ thị hàm số $y = \cot x$

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{1 - \sin x}{\sin x + 1}$ là

- A. $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$. B. $x \neq k2\pi$. C. $x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi$. D. $x \neq \pi + k2\pi$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$\text{Đk: } \sin x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 2. Tập xác định của hàm số $y = \tan x + \cot x$ là

- A. $\mathbb{R}$. B. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D

$$\text{Đk: } \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 3. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{\sin^2 x}}$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. D. $D = \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $1 - \sin x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{ĐK: } \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi.$$

Ví dụ 4. Xét tính chẵn-lẻ của hàm số $y = \tan x + 2 \sin x$.

Hướng dẫn giải:

Xét hàm số $y = f(x) = \tan x + 2 \sin x$

$$\text{TXĐ: } \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D \text{ và } f(-x) = \tan(-x) + 2 \sin(-x) = -f(x)$$

Vậy $y = \tan x + 2 \sin x$ là hàm số lẻ trên tập xác định của nó.

Ví dụ 5. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn:

- A. $y = 5 \sin x \cdot \tan 2x$. B. $y = 3 \sin x + \cos x$.
C. $y = 2 \sin 3x + 5$. D. $y = \tan x - 2 \sin x$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Xét hàm $y = f(x) = 5 \sin x \cdot \tan 2x$

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D \text{ và } f(-x) = 5 \sin(-x) \cdot \tan(-2x) = 5 \sin x \cdot \tan 2x = f(x).$$

Vậy $y = f(x) = 5 \sin x \cdot \tan 2x$ là hàm số chẵn trên tập xác định của nó.

Ví dụ 6. Hàm số nào sau đây không chẵn, không lẻ ?

A. $y = \frac{\sin x + \tan x}{2 \cos^2 x}.$

B. $y = \tan x - \cot x.$

C. $y = \sin 2x + \cos 2x.$

D. $y = \sqrt{2 - \sin^2 3x}.$

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Xét hàm $y = f(x) = \sin 2x + \cos 2x$

TXĐ là $D = \mathbb{R}.$

Với $x = \frac{\pi}{8} \in \mathbb{R}$, ta có: $f\left(-\frac{\pi}{8}\right) = 0$; $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}$

Vì $\begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{8}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ f\left(-\frac{\pi}{8}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{8}\right) \end{cases}$ nên hàm số không chẵn, không lẻ.

Ví dụ 7. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4 - 3 \sin^2 2x$

Hướng dẫn giải:

$$0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Rightarrow 0 \geq -3 \sin^2 2x \geq -3 \Rightarrow 4 \geq 4 - 3 \sin^2 x \geq 1 \Rightarrow 4 \geq y \geq 1$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4 và giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Ví dụ 8. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 4 \sin^2 x + \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$

Hướng dẫn giải:

Ta có $y = 4 \sin^2 x + \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 4 \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) + \sin 2x + \cos 2x$

$$= \sin 2x - \cos 2x + 2 = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2.$$

Mà $-1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \rightarrow -\sqrt{2} + 2 \leq \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \leq \sqrt{2} + 2.$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $M = 2 + \sqrt{2}.$

Chương 1: PHÉP DỜI HÌNH – PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẪNG

§1. PHÉP BIẾN HÌNH

1. Định nghĩa

Phép biến hình F (trong mặt phẳng) là một quy tắc để với mỗi điểm M thuộc mặt phẳng, xác định được một điểm duy nhất M' thuộc mặt phẳng đó. Ta viết: $F(M) = M'$, đọc là:

- Phép biến hình F biến điểm M thành điểm M' .
- Điểm M' là ảnh của điểm M qua phép biến hình F .

Với mỗi hình H , ta gọi hình H' gồm các điểm $M' = F(M)$, trong đó $M \in H$, là ảnh của H qua phép biến hình F , ký hiệu $H' = F(H)$.

2. Ví dụ

Phép đồng nhất là phép biến hình biến mỗi điểm M thuộc mặt phẳng thành điểm M' trùng với M .

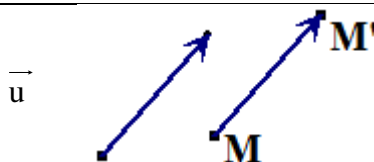
§2. PHÉP TỊNH TIẾN

A. GIÁO KHOA

1. Định nghĩa

Phép tịnh tiến theo vector $\vec{u}$, ký hiệu $T_{\vec{u}}$, là một phép biến hình biến điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

$$T_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$



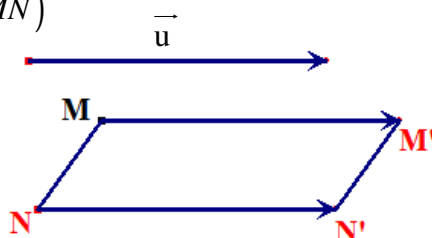
Lưu ý:

- Phép đồng nhất là phép tịnh tiến theo vector $\vec{u} = \vec{0}$
- $T_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow T_{-\vec{u}}(M') = M$

2. Tính chất

Định lý 1: Phép tịnh tiến không làm thay đổi khoảng cách giữa 2 điểm bất kỳ.

$$(T_{\vec{u}}(M) = M', T_{\vec{u}}(N) = N' \Rightarrow M'N' = MN)$$



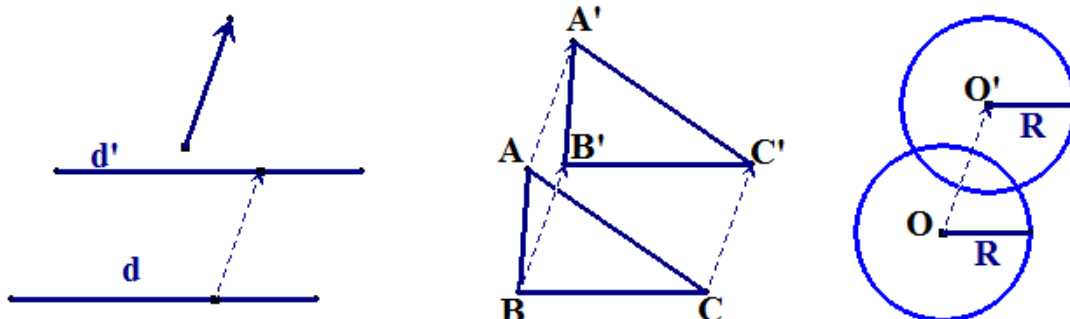
Định lý 2: Phép tịnh tiến biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.

Hệ quả:

Qua phép tịnh tiến:

- Đường thẳng biến thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho.

- Tia biến thành tia.
- Đoạn thẳng biến thành đoạn thẳng bằng nó.
- Tam giác biến thành tam giác bằng nó.
- Đường tròn biến thành đường tròn có cùng bán kính.
- Góc biến thành góc bằng nó.



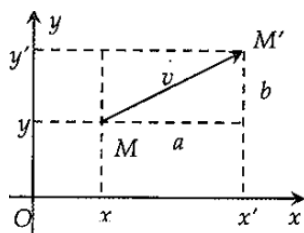
3. Biểu thức tọa độ

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (a; b)$, khi đó:

$$T_{\vec{u}}(M(x; y)) = M'(x'; y') \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

$$T_{\vec{u}}(M(x; y)) = M'(x'; y') \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \quad (1)$$

(1) được gọi là biểu thức tọa độ của $T_{\vec{u}}$.



B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng, cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Phép

tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ biến

A. điểm P thành điểm N.

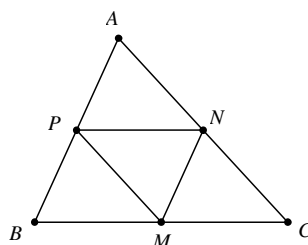
C. điểm M thành điểm B.

B. điểm N thành điểm P.

D. điểm M thành điểm N.

Hướng dẫn giải:

Chọn A



Ta có $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$ nên $T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}(P) = N$.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M'(-4; 2)$. Biết M' là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{v} = (1; -5)$. Tìm tọa độ điểm M

- A. $M(-3; 5)$. B. $M(3; 7)$. C. $M(-5; 7)$. D. $M(-5; -3)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $T_{\vec{v}}(M) = M' \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} -4 - x_M = 1 \\ 2 - y_M = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = -5 \\ y_M = 7 \end{cases}$

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$ qua $T_{\vec{v}}$ với $\vec{v} = (1; 2)$.

- A. $(x+2)^2 + y^2 = \sqrt{6}$. B. $(x-2)^2 + y^2 = 6$.
C. $x^2 + y^2 - 2x - 5 = 0$. D. $2x^2 + 2y^2 - 8x + 4 = 0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Cách 1: Theo tính chất của phép tịnh tiến biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = \sqrt{6}$.

Vậy đường tròn (C') có tâm $I'(2; 0) = T_{\vec{v}}(I)$, bán kính $R' = R = \sqrt{6}$ có phương trình: $(x-2)^2 + y^2 = 6$.

Cách 2: Sử dụng quỹ tích:

Gọi $M(x; y) \in (C); M'(x'; y') \in (C')$ sao cho $T_{\vec{v}}(M) = M' \Rightarrow \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' - 2 \end{cases}$

Thế vào phương trình đường tròn (C) , ta có:

$$(x'-1)^2 + (y'-2)^2 - 2(x'-1) + 4(y'-2) - 1 = 0 \Leftrightarrow (x')^2 + (y')^2 - 4x' - 2 = 0$$

Vậy $(C'): (x-2)^2 + y^2 = 6$.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm phương trình đường thẳng Δ' là ảnh của đường thẳng $\Delta: x + 2y - 1 = 0$ qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{v} = (1; -1)$.

- A. $\Delta': x + 2y = 0$. B. $\Delta': x + 2y - 3 = 0$.
C. $\Delta': x + 2y + 1 = 0$. D. $\Delta': x + 2y + 2 = 0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Cách 1:

$T_{\vec{v}}(\Delta) = \Delta' \Rightarrow \Delta' // \Delta$ hoặc $\Delta' \equiv \Delta$ nên $\Delta': x + 2y + m = 0$.

Lấy $A(1; 0) \in \Delta; T_{\vec{v}}(A) = A'(2; -1) \in \Delta' \Rightarrow m = 0$.

Vậy phương trình $\Delta': x + 2y = 0$.

Cách 2: Sử dụng quỹ tích

Gọi $M(x; y) \in \Delta; M'(x'; y') \in \Delta'$ sao cho $T_v(M) = M'$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' + 1 \end{cases}$$

Thay vào phương trình Δ ta được $(x' - 1) + 2(y' + 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow x' + 2y' = 0$.

Vậy $\Delta': x + 2y = 0$.