

Bài 3. TÍCH CỦA VECTO SỐ VỚI SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tích của một số đối với một vectơ

- **Định nghĩa:** Cho một số thực $k \neq 0$ và một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$.
 Tích $k.\vec{a}$ là một vectơ có cùng hướng $\vec{a}$ khi $k > 0$.
 Tích $k.\vec{a}$ là một vectơ có ngược hướng $\vec{a}$ khi $k < 0$.
- **Tính chất**
 - $k(\vec{a} + \vec{b}) = k.\vec{a} + k.\vec{b}$.
 - $(k + h).\vec{a} = k.\vec{a} + h.\vec{a}$.
 - $1.\vec{a} = \vec{a}$.
 - $k.(h.\vec{a}) = (kh).\vec{a}$.
 - $(-1).\vec{a} = -\vec{a}$.
 - $0.\vec{a} = \vec{0}$.
- **Điều kiện để hai vectơ cùng phương:** điều kiện cần và đủ để 2 vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là tồn tại một số k để $\vec{a} = k.\vec{b}$.

2. Trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

- I là trung điểm của $AB \Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ hay $\vec{IA} = -\vec{IB}$.
- I là trung điểm AB và M là điểm bất kì $2\vec{MI} = \vec{MA} + \vec{MB}$.
- G là trọng tâm $\triangle ABC$ và M bất kỳ $\Leftrightarrow 3\vec{MG} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

VẤN ĐỀ 1: Chứng minh đẳng thức vectơ

- Quy tắc 3 điểm: $\vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MB}$, chọn điểm M .
- Quy tắc 3 điểm (phép trừ): $\vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA}$, hiệu hai vectơ cùng gốc.
- Quy tắc hình bình hành: Với hình bình hành $ABCD$ luôn có $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$.
- Cách thường dùng: biến đổi một vế cho đến khi ra vế còn lại.
- Cách bắc cầu: biến đổi hai vế cho ra cùng một kết quả

VÍ DỤ

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có 3 trung tuyến là AM, BN, CP . Chứng minh:

a. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

b. $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AC, BD . CMR:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

VẤN ĐỀ 2: Xác định điểm thỏa điều kiện cho trước

- Biến đổi đẳng thức vector đã cho về dạng $\overrightarrow{AM} = \vec{v}$, trong đó A là điểm cố định, $\vec{v}$ là một vector cố định.
- Lấy điểm A là gốc dựng vector bằng $\vec{v}$ thì điểm ngọn chính là điểm M cần tìm.

VÍ DỤ

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC . Hãy xác định vị trí điểm M thỏa điều kiện

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

VẤN ĐỀ 3: Chứng minh ba điểm thẳng hàng

- Để chứng minh 3 điểm A, B, C thẳng hàng, ta chứng minh: $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$ (1).

Để nhận được (1), ta lựa chọn một trong hai hướng sau:

- Sử dụng các qui tắc biến đổi vectơ.
- Xác định (tính) vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ thông qua một tổ hợp trung gian.

Chú ý:

- Dựa vào lời bình 3, ta có thể suy luận được phát biểu sau: " Cho ba điểm A, B, C . Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là: $\overrightarrow{MC} = \alpha \cdot \overrightarrow{MA} + (1 - \alpha) \cdot \overrightarrow{MB}$ với điểm M tùy ý và số thực α bất kỳ". Đặc biệt khi: $0 \leq \alpha \leq 1$ thì $C \in AB$. Kết quả trên còn được sử dụng để tìm điều kiện của tham số k (hoặc m) cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng.
- Nếu không dễ nhận thấy k trong biểu thức $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$, ta nên quy đồng biểu thức phân tích vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ để tìm ra số k .

- Để chứng minh $AB \parallel CD$ ta cần chứng minh $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{DC}$.

VÍ DỤ

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC . Lấy M trên cạnh BC sao cho $MB = 3MC$. Phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC . Lấy M trên cạnh BC sao cho $BM = \frac{2}{3}BC$. Phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 6: Cho hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Hãy tính các vectơ sau theo $\vec{a}$, $\vec{b}$.

- a. $\overrightarrow{DI}$ với I là trung điểm BC .
- b. $\overrightarrow{AG}$ với G là trọng tâm $\triangle CDI$.

Ví dụ 7: Cho hình bình hành $ABCD$, tâm O . Gọi M , N theo thứ tự là trung điểm của AB , CD và P là điểm thỏa mãn hệ thức: $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$. Chứng minh 3 điểm B , P , N thẳng hàng.

Lời giải

C. BÀI TẬP TỰ LUẬN

- Câu 1:** Cho $\triangle ABC$ có M , D lần lượt là trung điểm của AB , BC và N là điểm thỏa $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$. Gọi K là trung điểm của MN . Hãy tính các vectơ $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{KD}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.
- Câu 2:** Cho $\triangle ABC$. Trên hai cạnh AB và AC lấy hai điểm D và E sao cho $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{EA}$. Gọi M , I lần lượt là trung điểm của DE và BC . Hãy tính vectơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MI}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.
- Câu 3:** Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa: $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AD}$. Chứng minh: B , C , D thẳng hàng.
- Câu 4:** Cho $\triangle ABC$, lấy điểm M , N , P sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$.

- a. Tính $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
- b. Chứng minh ba điểm: M, N, P thẳng hàng.
- Câu 5:** Cho ΔABC có hai đường trung tuyến BN, CP . Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ theo các vectơ $\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$.
- Câu 6:** Cho ΔABC . Gọi I, J nằm trên cạnh BC và BC kéo dài sao cho $2CI = 3BI, 5JB = 2JC$. Gọi G là trọng tâm của tam giác.
- a. Tính $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
- b. Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
- Câu 7:** Cho ΔABC có G là trọng tâm tam giác và I là điểm đối xứng của B qua G . M là trung điểm của BC . Hãy tính $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{CI}, \overrightarrow{MI}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
- Câu 8:** Cho ΔABC có trọng tâm là G và các đường trung tuyến AM, BP . Gọi G' là điểm đối xứng với điểm G qua P . Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AG'}, \overrightarrow{CG'}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và Chứng minh hệ thức: $5\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{MG'}$.
- Câu 9:** Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CD . Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}$.
- Câu 10:** Cho tứ giác $ABCD$ có M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AD, BC . Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ và theo $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}$.
- Câu 11:** Cho ΔDEF . Dựng điểm H sao cho $\overrightarrow{EH} = 4\overrightarrow{ED} - 3\overrightarrow{EF}$ và chứng minh điểm H nằm trên DF .
- Câu 12:** Cho ΔABC có I là trung điểm của trung tuyến AM và D là điểm thỏa hệ thức: $3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BI}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và chứng minh ba điểm B, I, D thẳng hàng.
- Câu 13:** Cho hình bình hành $ABCD$.
- a. Dựng các điểm E, F sao cho: $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$.
- b. Dựng điểm G sao cho tứ giác $AEGF$ là hình bình hành.
- c. Chứng minh 3 điểm A, C, G thẳng hàng.
- Câu 14:** Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của AB và I là điểm thỏa hệ thức: $3\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{ID}$. Chứng minh ba điểm A, C, E thẳng hàng.
- Câu 15:** Cho ΔABC .
- a. Dựng các điểm K, L sao cho: $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}, 2\overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \vec{0}$.
- b. Chứng minh ba điểm A, K, L thẳng hàng.
- Câu 16:** Cho ΔABC . Gọi M là trung điểm của cạnh AB , N và P là hai điểm thỏa mãn hệ thức: $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}, \overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$. Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.
- Câu 17:** Cho ΔABC . Hai điểm M, N được xác định bởi: $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}, \overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Chứng minh MN đi qua trọng tâm ΔABC .
- Câu 18:** Cho ΔABC .

a. Dựng các điểm D, E thỏa các hệ thức: $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

b. Chứng minh ba điểm A, C, E thẳng hàng.

Câu 19: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC và E là điểm xác định bởi $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm D, E, I thẳng hàng.

Câu 20: Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AD và M là trung điểm AD . Điểm N được lấy trên AC sao cho $3\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm B, M, N thẳng hàng.

Câu 21: Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm BC và O là trung điểm của AM . Trên BC lấy điểm I sao cho $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm I, J, O thẳng hàng.

Câu 22: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm di động trên AB, CD sao cho $\frac{MA}{MB} = \frac{ND}{NC}$ và hai điểm I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC .

a. Tính $\overrightarrow{IJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$.

b. Chứng minh trung điểm P của MN nằm trên đường thẳng IJ .

Câu 23: Cho $\triangle ABC$. Lấy điểm I thỏa $3\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}, 4\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$ và M là giao điểm của đường thẳng IJ và BC . Đặt $\overrightarrow{BM} = m\overrightarrow{MC}$.

a. Chứng minh rằng: $12\overrightarrow{IJ} = 9\overrightarrow{BC} - 6\overrightarrow{BA}$.

b. Tính $\overrightarrow{IM}$ theo $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$.

c. Tìm giá trị của m ?

Câu 24: Cho $\triangle ABC$. Gọi P, Q, R lần lượt là các điểm thỏa các đẳng thức: $3\overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0}, \overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{QC}, k\overrightarrow{RA} = \overrightarrow{RB}$ với $k \neq 1$.

a. Chứng minh rằng: $21\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{BC} + 7\overrightarrow{BA}$.

b. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{RP} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{BA} + \frac{4}{7}\overrightarrow{BC}$.

c. Tìm k sao cho P, Q, R thẳng hàng.

Câu 25: Cho hình bình hành $ABCD$.

a. Gọi I, F, K lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AI} = \alpha\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF} = \beta\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AK} = \gamma\overrightarrow{AD}$. Chứng minh điều kiện cần và đủ để I, F, K thẳng hàng là $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} (\alpha, \beta, \gamma \neq 0)$.

b. Gọi M, N là hai điểm lần lượt trên đoạn AB và CD sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3},$

$\frac{CN}{CD} = \frac{1}{2}$. Gọi G là trọng tâm của $\triangle MNB$. Tính $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Gọi

H là điểm xác định bởi $\overrightarrow{BH} = k\overrightarrow{BC}$. Tính $\overrightarrow{AH}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và k . Tìm k để đường thẳng AH qua điểm G .

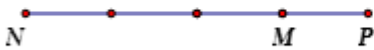
- Câu 26:** Cho tứ giác $ABCD$. Lấy các điểm M, N theo thứ tự thuộc AB và CD sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC}$.
- Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MN} = (1-k)\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{BC}$.
 - Gọi E, F, I lần lượt theo thứ tự thuộc các cạnh AD, BC và MN sao cho $\overrightarrow{AE} = l\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BF} = l\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{MI} = l\overrightarrow{MN}$. Chứng minh rằng: E, F, I thẳng hàng.
- Câu 27:** Cho $\triangle ABC$. Gọi O, G, H lần lượt theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm, trực tâm của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng: O, G, H thẳng hàng.
- Câu 28:** Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn AB . Gọi M, N theo thứ tự là các trung điểm của AD và BC .
- Chứng minh: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.
 - Chứng minh: $MN \parallel DC$.
- Câu 29:** Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Gọi M là trung điểm của cạnh BC và I là điểm thỏa mãn hệ thức $4\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Chứng minh: $MP \parallel BG$.
- Câu 30:** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trọng tâm của $\triangle ABD$ và $\triangle BCD$. Chứng minh rằng: $EF \parallel AC$.
- Câu 31:** Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm của cạnh BC . Các điểm D, E thỏa mãn các đẳng thức $\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$. Chứng minh rằng: $DE \parallel AM$.
- Câu 32:** Cho $\triangle ABC$. Dựng các điểm M, N sao cho: $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh rằng $MN \parallel BC$.
- Câu 33:** Cho $\triangle ABC$. Dựng các điểm I, J sao cho: $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$. Chứng minh: $IC \parallel BJ$.
- Câu 34:** Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD . Dựng các điểm E, F thỏa mãn: $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BJ}$. Chứng minh: $EF \parallel CE$.
- Câu 35:** Cho $\triangle ABC$. Các điểm D, E, G được xác định bởi hệ thức: $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{CE}, 2\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GC}$.
- Chứng minh: $BE \parallel CD$.
 - Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh: A, G, M thẳng hàng.
- Câu 36:** Cho $\triangle ABC$, M là trung điểm của cạnh AB và D, E, F theo thứ tự được xác định bởi các hệ thức: $3\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}, \overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} - 2\overrightarrow{EC} = \vec{0}, 5\overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.
- Chứng minh rằng: $EM \parallel BC$.
 - Chứng minh rằng: ba điểm A, D, E thẳng hàng.
 - Chứng minh rằng: ba đường thẳng AD, BC, MF đồng quy tại một điểm.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

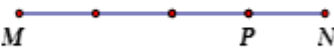
- Câu 1:** Cho tam giác ABC với trung tuyến AM và trọng tâm G . Khi đó $\overrightarrow{GA}$ bằng
- A. $2\overrightarrow{GM}$. B. $\frac{2}{3}\overrightarrow{GM}$. C. $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.
- Câu 2:** Cho tam giác ABC có trọng tâm G và trung tuyến AM . Khẳng định nào sau đây là sai?
- A. $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$.
 C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{MG}$.
- Câu 3:** Cho hình bình hành $ABCD$. Tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ bằng vectơ nào sau đây?
- A. $\overrightarrow{AC}$. B. $2\overrightarrow{AC}$. C. $3\overrightarrow{AC}$. D. $5\overrightarrow{AC}$.
- Câu 4:** Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây:
- 

Hình 1



Hình 2
- 

Hình 3



Hình 4
- A. Hình 1. B. Hình 2. C. Hình 3. D. Hình 4.
- Câu 5:** Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm đó thẳng hàng là
- A. $\forall M : \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. B. $\forall M : \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}$.
 C. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. D. $\exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.
- Câu 6:** Hãy chọn kết quả đúng khi phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ của tam giác ABC với trung tuyến AM .
- A. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.
 C. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. D. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.
- Câu 7:** Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$. B. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{CD}$. C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$. D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$.
- Câu 8:** Cho tam giác ABC , gọi M là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác ABC . Đẳng thức vectơ nào sau đây đúng?
- A. $2\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AG}$. B. $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AG}$. C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{GM}$.
- Câu 9:** Cho tam giác ABC , gọi M là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác ABC . Câu nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$. B. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA}$. C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AG}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AM}$.
- Câu 10:** Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì đẳng thức nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

D. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Câu 11: Điều kiện nào dưới đây là điều kiện cần và đủ để điểm O là trung điểm của đoạn AB .

A. $OA = OB$.

B. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$.

C. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BO}$.

D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$.

Câu 12: Đẳng thức nào sau đây mô tả đúng hình vẽ?



A. $3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

B. $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{BI} + 3\overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Câu 13: Cho tam giác ABC có trung tuyến BM và trọng tâm G . Khi đó $\overrightarrow{BG}$ bằng

A. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

B. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$.

C. $\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

D. $\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$.

Câu 14: Gọi CM là trung tuyến của tam giác ABC và D là trung điểm của CM . Đẳng thức nào sau đây đúng?

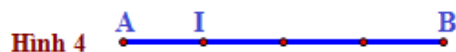
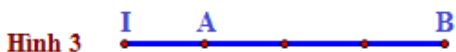
A. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DB} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

Câu 15: Cho đoạn thẳng AB và điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IA} = \vec{0}$. Hình nào sau đây mô tả đúng giả thiết này?



A. Hình 1.

B. Hình 2.

C. Hình 3.

D. Hình 4.

Câu 16: Cho $\triangle ABC$ có D, M lần lượt là trung điểm của AB, CD . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

B.

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{BM} = \vec{0}$.

Câu 17: Cho vectơ $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} = -2\vec{b}$, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Hai vectơ $\vec{b}, \vec{c}$ bằng nhau.

B. Hai vectơ $\vec{b}, \vec{c}$ ngược hướng.

C. Hai vectơ $\vec{b}, \vec{c}$ cùng phương.

D. Hai vectơ $\vec{b}, \vec{c}$ đối nhau.

Câu 18: Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD của hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức sai?

A. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OB}$.

B. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$.

C. $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$.

D. $\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{BO}$.

Câu 19: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a\sqrt{2}$. Tính $S = |2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}|$?

A. $A = 2a$.

B. $A = a$.

C. $A = a\sqrt{3}$.

D. $A = a\sqrt{2}$.

Câu 20: Đẳng thức nào sau đây mô tả đúng hình vẽ?



A. $2\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

B. $3\overrightarrow{BI} + 2\overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

C. $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

D.

$2\overrightarrow{BI} + 3\overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

Câu 21: Cho tam giác ABC và I thỏa $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IB}$. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức đúng?

A. $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB}$. B. $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}(3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})$. C. $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB})$. D. $\overrightarrow{CI} = 3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$

Câu 22: Phát biểu nào là **sai**?

- A. Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ thì $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$.
 B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì A, B, C, D thẳng hàng.
 C. Nếu $3\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ thì A, B, C thẳng hàng.
 D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BA}$.

Câu 23: Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ lần lượt có trọng tâm là G và G' . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A. $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$. B. $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'}$.
 C. $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB'}$. D. $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C}$.

Câu 24: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây cùng phương?

- A. $-3\vec{a} + \vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a} + 6\vec{b}$. B. $-\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ và $2\vec{a} + \vec{b}$.
 C. $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$. D. $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} - 2\vec{b}$.

Câu 25: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây là cùng phương?

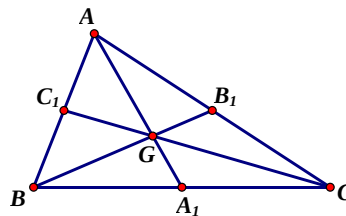
- A. $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$. B. $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 2\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$.
 C. $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 2\vec{a} - 9\vec{b}$. D. $\vec{u} = 2\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$ và $\vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$.

Câu 26: Biết rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vectơ $2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{a} + (x-1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là:

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{3}{2}$. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 27: Cho tam giác ABC , có trọng tâm G . Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chọn khẳng định **sai**?

- A. $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC_1} = \vec{0}$.
 B. $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.
 C. $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$.
 D. $\overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GC_1}$.



Câu 28: Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.
 C. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Câu 29: Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thỏa mãn: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$. Khi đó M là trung điểm của

- A. $\overrightarrow{AB}$. B. $\overrightarrow{BC}$. C. $\overrightarrow{AD}$. D. $\overrightarrow{CD}$.

Câu 30: Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $MB = 3MA$. Khi đó, biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là

- A. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

Câu 31: Cho tam giác ABC có M thuộc cạnh BC sao cho $CM = 2MB$ và I là trung điểm của AB . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

Câu 32: Cho tam giác ABC có N thuộc cạnh BC sao cho $BN = 2NC$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Câu 33: Cho hai điểm cố định A, B . Gọi I là trung điểm AB . Tập hợp các điểm M thỏa $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ là

- A. Đường tròn đường kính AB . B. Trung trực của AB .
C. Đường tròn tâm I , bán kính AB . D. Nửa đường tròn đường kính AB .

Câu 34: Tam giác ABC vuông tại A , $AB = AC = 2$. Độ dài vectơ $4\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ bằng

- A. $\sqrt{17}$. B. $2\sqrt{15}$. C. 5. D. $2\sqrt{17}$.

Câu 35: Cho tam giác ABC có N thuộc cạnh BC sao cho $BN = 2NC$ và I là trung điểm của AB . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{NI} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{NI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{NI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{NI} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

Câu 36: Cho tam giác ABC có I, D lần lượt là trung điểm AB, CI . Điểm N thuộc cạnh BC sao cho $BN = 2NC$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DN}$. B. $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{ND}$. C. $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{DN}$. D. $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{DN}$.

Câu 37: Cho tam giác ABC có trung tuyến AM , gọi I là trung điểm AM . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
C. $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{IA}$. D. $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA}$.