

CHƯƠNG 1: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 3: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

LÝ THUYẾT:

Định nghĩa:

Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D ($D \subset \mathbb{R}$).

+ y_0 được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \leq y_0, \forall x \in D$ và $\exists x_0 \in D: f(x_0) = y_0$. Ký hiệu: $y_0 = \max_D y$.

+ y_0 được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \geq y_0, \forall x \in D$ và $\exists x_0 \in D: f(x_0) = y_0$. Ký hiệu: $y_0 = \min_D y$.

Cách tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn:

* Định lý:

Mọi hàm số liên tục trên một đoạn đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

* Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$.

- Trường hợp đạo hàm $f'(x)$ giữ nguyên dấu trên đoạn $[a; b]$: Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên đoạn $[a; b]$. Do đó, hàm số đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất tại hai đầu mút của đoạn.

- Trường hợp đạo hàm $f'(x)$ không giữ nguyên dấu trên đoạn $[a; b]$:

+ Tìm $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.

+ Tính các giá trị $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a)$ và $f(b)$.

+ So sánh các giá trị tìm được: Số lớn nhất và số nhỏ nhất trong các giá trị đó lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

TRƯỜNG THPT LÝ THƯỜNG KIỆT

Cách tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng:

- Tìm tập xác định của hàm số.
- Tính đạo hàm y' của hàm số. Giải phương trình $y' = 0$.
- Lập bảng biến thiên.
- Dựa trên bảng biến thiên, kết luận.

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = x^3 - 3x + 3$ trên đoạn $\left[-3; \frac{3}{2}\right]$.

* Phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn:

+ Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 3$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in \left[-3; \frac{3}{2}\right] \\ x = 1 \in \left[-3; \frac{3}{2}\right] \end{cases}$

+ $y(-1) = 5$, $y(1) = 1$, $y(-3) = -15$, $y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{8}$.

Vậy $\min_{\left[-3; \frac{3}{2}\right]} y = y(-3) = -15$, $\max_{\left[-3; \frac{3}{2}\right]} y = y(-1) = 5$.

* Phương pháp lập bảng biến thiên:

+ TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

+ Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 3$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

+ Bảng biến thiên:

x	-3	-1	1	$\frac{3}{2}$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-15		5		1		$\frac{15}{8}$

Vậy $\min_{\left[-3; \frac{3}{2}\right]} y = y(-3) = -15$, $\max_{\left[-3; \frac{3}{2}\right]} y = y(-1) = 5$.

TRƯỜNG THPT LÝ THƯỜNG KIỆT

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4; 4]$.

+ Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x - 9$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hay $x = 3$

+ $y(-1) = 40$, $y(3) = 8$, $y(-4) = -41$, $y(4) = 15$.

Vậy $\min_{[-4;4]} y = y(-4) = -41$, $\max_{[-4;4]} y = y(-1) = 40$.

Ví dụ 3: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ trên đoạn $[0; 2]$.

Đạo hàm: $y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0 \quad \forall x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Vậy $\min_{[0;2]} y = y(0) = -2$, $\max_{[0;2]} y = y(2) = 0$.

Ví dụ 4: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x+5}{x-7}$ trên đoạn $[-3; 4]$.

Đạo hàm: $y' = -\frac{19}{(x+1)^2} < 0 \quad \forall x \in (-\infty; 7) \cup (7; +\infty)$.

Vậy $\min_{[-3;4]} y = y(4) = -\frac{13}{3}$, $\max_{[-3;4]} y = y(-3) = \frac{1}{10}$.

Ví dụ 5: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = x - 5 + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

+ TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

+ Đạo hàm: $y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in (0; +\infty) \\ x = -1 \notin (0; +\infty) \end{cases}$

+ Bảng biến thiên:

x	0	1	$+\infty$
y'		0	+
y	$+\infty$	-3	$+\infty$

Vậy $\min_{(0;+\infty)} y = y(1) = -3$ và không tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $(0; +\infty)$.

TRƯỜNG THPT LÝ THƯỜNG KIỆT

Ví dụ 6: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{4 - x^2}$.

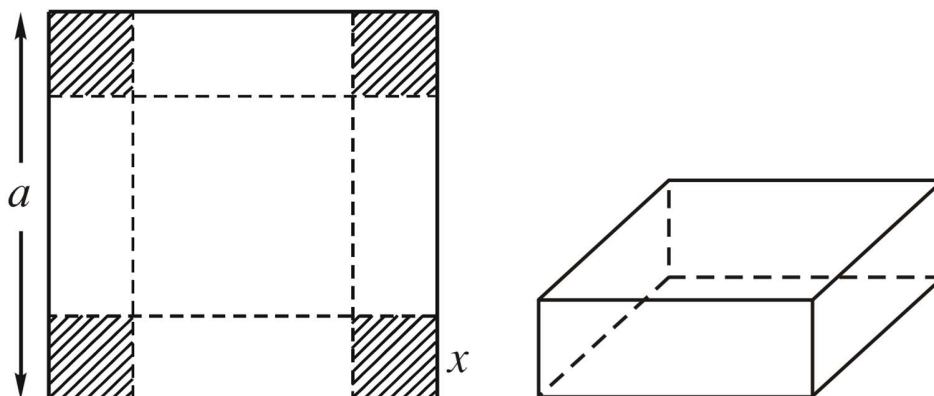
+ TXĐ: $D = [-2; 2]$.

+ Đạo hàm: $y' = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in [-2; 2]$

+ $y(0) = 2$, $y(-2) = 0$, $y(2) = 0$.

Vậy $\min_D y = y(-2) = 0$, $\max_D y = y(0) = 2$.

Ví dụ 7: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a . Người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại như hình để được một cái hộp không nắp. Tính cạnh của hình vuông bị cắt sao cho thể tích của khối hộp là lớn nhất.



Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông bị cắt. Điều kiện của x : $0 < x < \frac{a}{2}$.

Khối hộp tạo thành có chiều cao là x và đáy là hình vuông cạnh là $(a - 2x)$ nên có diện tích đáy là $S = (a - 2x)^2$. Do đó, thể tích của khối hộp là $V(x) = x(a - 2x)^2 \left(0 < x < \frac{a}{2} \right)$.

Đạo hàm: $V'(x) = (a - 2x)^2 + x \cdot 2 \cdot (a - 2x) \cdot (-2) = (a - 2x)(a - 6x)$

Cho $V'(x) = 0 \Leftrightarrow (a - 2x)(a - 6x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} \notin \left(0; \frac{a}{2} \right) \\ x = \frac{a}{6} \in \left(0; \frac{a}{2} \right) \end{cases}$

Bảng biến thiên:

TRƯỜNG THPT LÝ THƯỜNG KIỆT

x	0	$\frac{a}{6}$	$\frac{a}{2}$	
$V'(x)$		+	0	–
$V(x)$	0	$\frac{2a^3}{27}$	0	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $V(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{2a^3}{27}$ khi $x = \frac{a}{6}$. Vậy cạnh của hình vuông bị cắt là $\frac{a}{6}$.

BÀI TẬP:

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -3x^2 + 4x - 8$ trên đoạn $[0;1]$.

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 5x - 4$ trên đoạn $[-3;2]$.

.....

.....

.....

Bài 3: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2-x}{2x+1}$ trên đoạn $[-2;-1]$.

.....

.....

.....

.....

Bài 4: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + 2 + \frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$.

.....

.....

.....

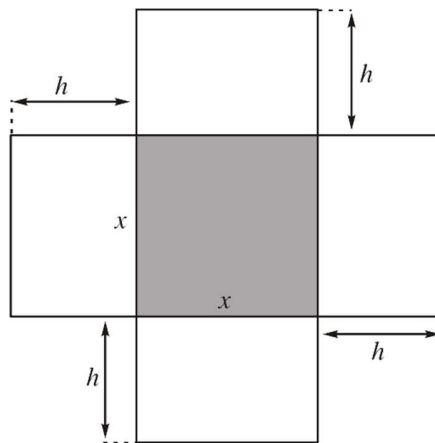
.....

.....

.....

.....

- Biểu diễn h theo x .
- Tính diện tích $S(x)$ của mảnh các tông theo x .
- Để ít tốn nguyên liệu nhất, độ dài cạnh đáy của hình hộp là bao nhiêu?



BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

1. $y = 2x^3 - 3x^2$ trên $[-2; 3]$. 2. $y = 2x^3 - x^2 - 4x$ trên $[0; 4]$. 3. $y = x^3 - x^2 + x - 2$ trên $[-3; 2]$.

4. $y = x(2 - 3x)^2$ trên $[-1; 3]$. 5. $y = x^4 - 8x^2 + 2$ trên $[-3; 1]$. 6. $y = 2x^4 - x^2 - 1$ trên $[0; 3]$.

7. $y = \frac{2 - 5x}{x - 4}$ trên $[-2; 3]$. 8. $y = \frac{x - 1}{1 - 3x}$ trên $[1; 4]$. 9. $y = 2 - x - \frac{x}{x - 2}$ trên $[-2; 1]$.

10. $y = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 1}$ trên $[2; 4]$. 11. $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ trên $[1; 4]$. 12. $y = 2x + \sqrt{9 - x^2}$.

13. $y = \sqrt{x + 3} + \sqrt{4 - x}$. 14. $y = x\sqrt{16 - x^2}$. 15. $y = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$.