

CHƯƠNG 1: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1: TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

LÝ THUYẾT:

Định nghĩa:

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và f là hàm số xác định trên K .

- Hàm số f được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số f được gọi là nghịch biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Nhận xét:

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I .

- Nếu hàm số f đồng biến trên khoảng I thì $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$.
- Nếu hàm số f nghịch biến trên khoảng I thì $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$.

Định lý:

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I .

- Nếu $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$ thì hàm số f đồng biến trên khoảng I .
- Nếu $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I$ thì hàm số f nghịch biến trên khoảng I .
- Nếu $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$ thì hàm số f không đổi trên khoảng I .

Nhận xét:

Khoảng I trong định lý có thể thay thế thành đoạn hoặc nửa khoảng nếu bổ sung thêm giả thiết “Hàm số liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó”. Cụ thể:

Nếu hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0$ trên khoảng $(a; b)$ thì hàm số f đồng biến trên đoạn $[a; b]$.

Hay nói cách khác:

TRƯỜNG THPT LÝ THƯỜNG KIỆT

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I . Nếu $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ (hoặc $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$) và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của I thì hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên I .

Ví dụ 1: Xét chiều biến thiên của hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

+ TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

+ Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y						

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

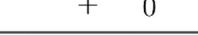
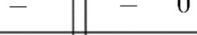
Ví dụ 2: Xét chiều biến thiên của hàm số: $y = x + \frac{4}{x}$.

+ TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

+ Đạo hàm: $y' = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \quad (x \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y						

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$ và $(0; 2)$.

TRƯỜNG THPT LÝ THƯỜNG KIỆT

Ví dụ 3: Xét chiều biến thiên của hàm số: $y = \sqrt{1-x^2}$.

+ TXĐ: $D = [-1; 1]$.

+ Đạo hàm: $y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (x \in (-1; 1))$$

+ Bảng biến thiên:

x	-1	0		1
y'		+	0	-
y	0	1		0

Theo bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$, nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

Áp dụng nhận xét về hàm số đồng biến trên đoạn, ta thấy hàm số $y = \sqrt{1-x^2}$ liên tục trên đoạn $[-1; 0]$ và $[0; 1]$ nên ta có thể kết luận hàm số đồng biến trên $[-1; 0]$ và nghịch biến trên $[0; 1]$.

Ví dụ 4: Xét chiều biến thiên của hàm số: $y = -2x^3 + 6x^2 - 6x + 3$.

+ TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

+ Đạo hàm: $y' = -6x^2 + 12x - 6$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 12x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (nghiệm kép)}$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		-	0	-	
y	$\searrow$		1	$\searrow$	

Theo bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Áp dụng nhận xét về hàm số đồng biến trên đoạn, ta thấy hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 - 6x + 3$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $y' = 0$ chỉ tại một điểm duy nhất là $x = 1$ nên ta có thể kết luận hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1]$ và $[1; +\infty)$. Do đó, hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 5: Xét chiều biến thiên của hàm số: $y = 3x^4 - 6x^2 + 2021$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 6: Xét chiều biến thiên của hàm số: $y = \frac{2x-3}{x-1}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 7: Xét chiều biến thiên của hàm số: $y = \frac{x^2 - 10x + 4}{3x^2 - 5x + 2}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 8: Xét chiều biến thiên của hàm số: $y = x - \frac{2}{x}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 9: Xét chiều biến thiên của hàm số: $y = \sqrt{4 - x^2}$.

Ví dụ 9: Xét chiều biến thiên của hàm số: $y = \sqrt{4 - x^2}$.

[illegible]

1. $y = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 2$
2. $y = -2x^3 + 3x^2 - 3.$
3. $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 1.$
4. $y = -2x^3 + 3.$
5. $y = 2x^3 + 3x - 2.$
6. $y = -x^3 + x^2 - x + 2.$
7. $y = 2x^4 - 4x^2 + 1.$
8. $y = 2x^4 + x^2 + 2.$
9. $y = -3x^4 - 4x^2 + 2.$
10. $y = -x^4 + 4x^2 - 3.$
11. $y = \frac{2x-1}{3x+2}.$
12. $y = \frac{2x-3}{4x-9}.$
13. $y = \frac{2-5x}{3-2x}.$
14. $y = \frac{x^2-x}{3+x}.$
15. $y = \frac{x^2-3x-4}{x^2-4}.$
16. $y = x - \frac{x}{x-2}.$
17. $y = 3x - \frac{5}{2x-1}.$
18. $y = \sqrt{9-4x^2}.$
19. $y = \sqrt{x-x^2}.$
20. $y = \sqrt{x^2-4x+5}.$