

PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP NHỊ THỨC NEWTON

I-TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

1. Công thức nhị thức Newton:

Cho a, b là các số thực và $n \in \mathbb{N}^*$. Ta có

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Trong đó: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ là số hạng tổng quát hay số hạng thứ $k+1$, khai triển có $n+1$ số hạng

Đặc biệt: - Nếu $a = b = 1$ ta có:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$$

- Nếu $a = 1, b = -1$ ta có:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0$$

2. Tính chất lũy thừa:

Với các điều kiện xác định thì:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; (a^m)^n = a^{m \cdot n}; \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n; \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

3. Tam giác Pascal:

Các hệ số của các khai triển $(a+b)^0, (a+b)^1; (a+b)^2; \dots$ được xếp thành 1 tam giác gọi là tam giác Pascal

Ta có:

$$\begin{array}{l} n=0: 1 \\ n=1: 1 \quad 1 \\ n=2: 1 \quad 2 \quad 1 \\ n=3: 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ n=4: 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ n=5: 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ n=6: 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\ n=7: 1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \end{array}$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k \text{ (CT Pascal)}$$

II-BÀI TẬP:

BT1: Khai triển các nhị thức sau: $(x+2y)^5; (x - \frac{3}{x})^6$

$$a) (x+2y)^5 = C_5^0 x^5 + C_5^1 x^4 (2y)^1 + C_5^2 x^3 (2y)^2 + C_5^3 x^2 (2y)^3 + C_5^4 x^1 (2y)^4 + C_5^5 (2y)^5$$

$$\rightarrow (x+2y)^5 = x^5 + 10x^4y + 40x^3y^2 + 80x^2y^3 + 80xy^4 + 32y^5$$

$$b) \left(x - \frac{3}{x}\right)^6 = C_6^0 x^6 + C_6^1 x^5 \left(-\frac{3}{x}\right)^1 + C_6^2 x^4 \left(-\frac{3}{x}\right)^2 + C_6^3 x^3 \left(-\frac{3}{x}\right)^3 + C_6^4 x^2 \left(-\frac{3}{x}\right)^4 + C_6^5 x^1 \left(-\frac{3}{x}\right)^5 + C_6^6 \left(-\frac{3}{x}\right)^6$$

$$\rightarrow \left(x - \frac{3}{x}\right)^6 = x^6 - 18x^4 + 135x^2 - 540 + \frac{1215}{x^2} - \frac{1458}{x^4} + \frac{729}{x^6}$$

BT2: Tìm hệ số của số hạng trong khai triển:

- ① $(2x - 3y)^{17}$ chứa $x^8 y^9$.
 ② $(3x - x^2)^{12}$ chứa x^{15} .
 ③ $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{10}, \forall x \neq 0$ chứa x^{11} .

BG:

1) $(2x - 3y)^{17}$ có số hạng tổng quát: $T_{k+1} = C_{17}^k (2x)^{17-k} (-3y)^k$

Số hạng chứa $x^8 y^9$ thỏa $\begin{cases} 17-k=8 \\ k=9 \end{cases} \Leftrightarrow k=9$

Vậy hệ số cần tìm là: $C_{17}^9 2^8 (-3)^9 = -C_{17}^9 2^8 3^9$

2) Ta có: $(3x - x^2)^{12} = x^{12} (3 - x)^{12}$

Ta tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển của $(x - 3)^{12}$

Số hạng tổng quát: $C_{12}^k 3^{12-k} (-1)^k x^k \Rightarrow$ số hạng chứa x^3 thỏa $k=3$

Vậy hệ số cần tìm là: $C_{12}^3 3^9 (-1)^3 = -4330260$

3) Số hạng tổng quát: $C_{10}^k (x^2)^{10-k} \left(-\frac{2}{x}\right)^k = C_{10}^k (-2)^k x^{20-3k}$

số hạng chứa x^{11} thỏa $20 - 3k = 11 \Leftrightarrow k = 3$

Vậy hệ số cần tìm là: $C_{10}^3 (-2)^3 = -960$

BT3: Tìm số hạng chứa x^2 trong khai triển $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n, x \neq 0$, biết $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 11$.

Giải phương trình $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 11$ ta được $n = 4$

Số hạng tổng quát: $C_4^k (x^3)^{4-k} \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = C_4^k x^{12-5k} \Rightarrow$ số hạng chứa x^2 thỏa $12 - 5k = 2 \Rightarrow k = 2$

Vậy số hạng cần tìm là: $C_4^2 x^2 = 6x^2$

BT4: Biết tổng các hệ số trong khai triển của $(x^2 + 1)^n$ là 1024. Tìm hệ số của x^{12}

Tổng các hệ số trong khai triển trên là $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n = 1024 \Rightarrow n = 10$

Số hạng tổng quát có dạng: $C_{10}^k (x^2)^k = C_{10}^k x^{2k} \Rightarrow$ số hạng chứa x^{12} có $k = 6$

(* Lưu ý trong khai triển này ta đổi thứ tự của x^2 và 1, tức $a = 1, b = x^2$)

Vậy hệ số cần tìm là: $C_{10}^6 = 210$

BT5: Chứng minh:
$$\begin{aligned} C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} &= 4^n. \\ C_n^0 \cdot 3^n - C_n^1 \cdot 3^{n-1} + \dots + (-1)^n C_n^n &= C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n. \end{aligned}$$

a) Trong khai triển $(a + b)^{2n}$, ta cho $a=b=1$ thì được:

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 4^n$$

b) Ta có: $(3 - 1)^n = C_n^0 3^n + C_n^1 3^{n-1}(-1) + C_n^2 3^{n-2}(-1)^2 + \dots + C_n^n(-1)^n$

$$\Rightarrow 2^n = C_n^0 3^n - C_n^1 3^{n-1} + \dots + (-1)^n C_n^n$$

$$\text{Mà } C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$$

→ Đpcm

BT6: Tính các tổng sau:

$$\text{a) } S = C_{13}^0 + C_{13}^1 + C_{13}^2 + \dots + C_{13}^6$$

$$\text{b) } S = 2C_{2020}^1 + 2^3 C_{2020}^3 + 2^5 C_{2020}^5 + \dots + 2^{2019} C_{2020}^{2019}$$

BG:

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n &= 2^n \Rightarrow C_{13}^0 + C_{13}^1 + C_{13}^2 + \dots + C_{13}^{13} = 2^{13} = 8192 \\ \Rightarrow C_{13}^0 + C_{13}^1 + C_{13}^2 + \dots + C_{13}^6 + C_{13}^7 + \dots + C_{13}^{13} &= 8192 \end{aligned}$$

$$\text{Mà } C_{13}^7 + C_{13}^8 + \dots + C_{13}^{13} = C_{13}^6 + C_{13}^5 + \dots + C_{13}^0 = 8192$$

$$\Rightarrow 2S = 8192 \Rightarrow S = 4096$$

$$\text{b) } C_{2020}^0 + 2C_{2020}^1 + 2^2 C_{2020}^2 + \dots + 2^{2020} C_{2020}^{2020} = (1 + 2)^{2020} = 3^{2020} \quad (1)$$

$$C_{2020}^0 - 2C_{2020}^1 + 2^2 C_{2020}^2 - \dots + 2^{2020} C_{2020}^{2020} = (1 - 2)^{2020} = -1 \quad (2)$$

$$\Rightarrow 2(2C_{2020}^1 + 2^3 C_{2020}^3 + 2^5 C_{2020}^5 + \dots + 2^{2019} C_{2020}^{2019}) = 3^{2020} + 1 \quad (\text{lấy (1)-(2)})$$

$$\Rightarrow 2C_{2020}^1 + 2^3 C_{2020}^3 + 2^5 C_{2020}^5 + \dots + 2^{2019} C_{2020}^{2019} = \frac{3^{2020} + 1}{2}$$

III-BÀI TẬP TỰ GIẢI:

Bài 1 : a) Tìm hệ số của $x^4 y^9$ trong khai triển $(2x - y)^{13}$.

b) Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển $(3x + 2)^{10}$.

- c) Tìm hệ số của số hạng chứa x^6 trong khai triển $(2-x)^9$.
- d) Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển $\left(3x^2 - \frac{1}{3}\right)^{10}$
- e) Tìm hệ số của số hạng chứa x^{11} trong khai triển $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{10}$
- f) Tìm số hạng chứa $x^{25}y^{10}$ trong khai triển $(x^3 - xy)^{15}$
- g) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x - \frac{3}{x}\right)^{12}$
- h) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x - \frac{2}{x^3}\right)^{12}$
- i) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2x + \frac{3}{\sqrt[5]{x}}\right)^{18}$

Bài 2: Xét khai triển của $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{15}$.

- a) Tìm số hạng thứ 7 trong khai triển (viết theo chiều số mũ của x giảm dần).
- b) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển.
- c) Tìm hệ số của số hạng chứa x^3

Bài 3: Tìm tổng các hệ số của trong khai triển

- a) $(2x - y)^{13}$ b) $(3x + 2)^{10}$.

Bài 4: Khai triển $(1-2x)^{15}$ ta được $(1-2x)^{15} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{15}x^{15}$

- a) Tính $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{15}$.
- b) Tính $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{14} - a_{15}$.

Bài 5: a) Biết rằng hệ số của x^2 trong khai triển của $(1-3x)^n$ bằng 90. Tìm n.

- b) Trong khai triển của $(x-1)^n$, hệ số của x^{n-2} bằng 45. Tính n.

Bài 6: Khai triển và rút gọn $(2x+1)^4 + (3+x)^5$ thành đa thức.

Bài 7 : Trong khai triển và rút gọn của $(1-2x)^8 + (1+3x)^{10}$ tính hệ số của x^3 .

Bài 8 : Tìm hệ số của x^4 trong khai triển và rút gọn

$$(x+1)^9 + (x+2)^8 + (x+3)^7 + (x+4)^6.$$

Bài 9 : Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển nhị thức Newton của $\left(2x^3 - \frac{3}{x^2}\right)^n$, biết rằng:

$$3C_n^2 + 2A_n^2 = 3n^2 + 15$$

(n nguyên dương, x khác 0).

***Bài 10 :** Chứng minh rằng :

a) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$

b) $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = 4^n$

c) $3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 2^n$

d) $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n}$

***Bài 11 :** Tìm hệ số của số hạng chứa x^7 trong khai triển $(2-3x)^{2n}$ biết n là số nguyên dương thỏa :
 $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$.

***Bài 12 :** Tìm hệ số của số hạng chứa x^{19} trong khai triển $(2x-1)^9 \cdot (x+2)^n$ biết n là số nguyên dương thỏa : $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2048$