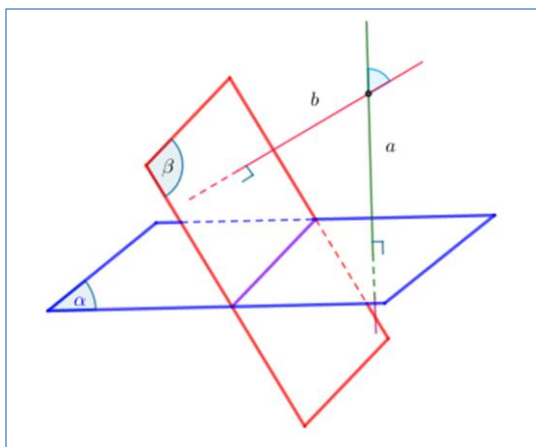


HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

I. Góc giữa hai mặt phẳng

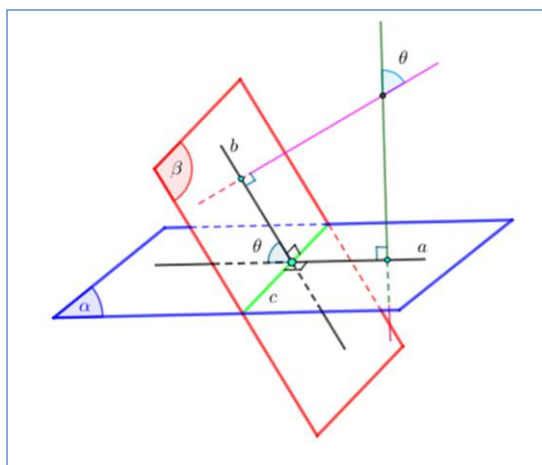
1. Định nghĩa



Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Nếu hai mặt phẳng song song hoặc trùng nhau thì góc giữa hai mặt phẳng đó bằng 0^0 .

2. Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau



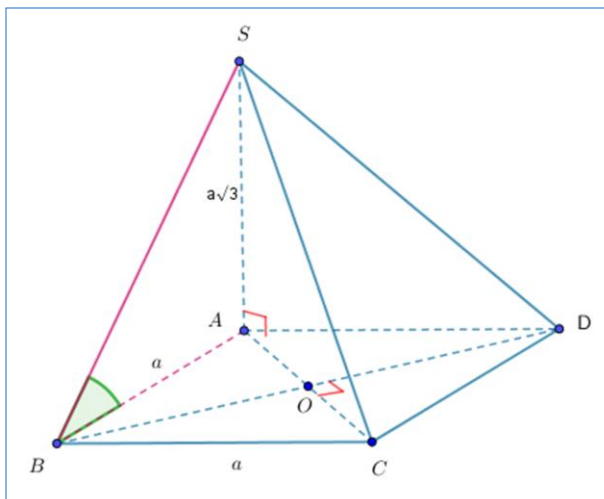
Giả sử hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến c . Từ điểm I bất kỳ thuộc c , trong (α) ta dựng đường thẳng a vuông góc với c , trong (β) ta dựng đường thẳng b vuông góc với c . Khi đó góc giữa a và b là góc giữa (α) và (β) .

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa:

- a. $mp(SBC)$ và $mp(ABCD)$ b. $mp(SCD)$ và $mp(ABCD)$ c. $mp(SBD)$ và $mp(ABCD)$

Giải

a.



- BC là giao tuyến của (SBC) và $(ABCD)$.

$$\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ BC \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SA \perp BC$$

$$\begin{cases} BC \perp SA \subset (SAB) \\ BC \perp AB \subset (SAB) \\ SA \cap AB = \{A\} \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$

$$\Rightarrow BC \perp SB \text{ (vì } SB \subset (SAB) \text{)}$$

$$\begin{cases} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ SB \subset (SBC), SB \perp BC \\ AB \subset (ABCD), AB \perp BC \end{cases}$$

$\Rightarrow$ góc giữa SB và AB là góc giữa (SBC) và $(ABCD)$

$$(SB, AB) = SBA, \tan SBA = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow SBA = 60^\circ$$

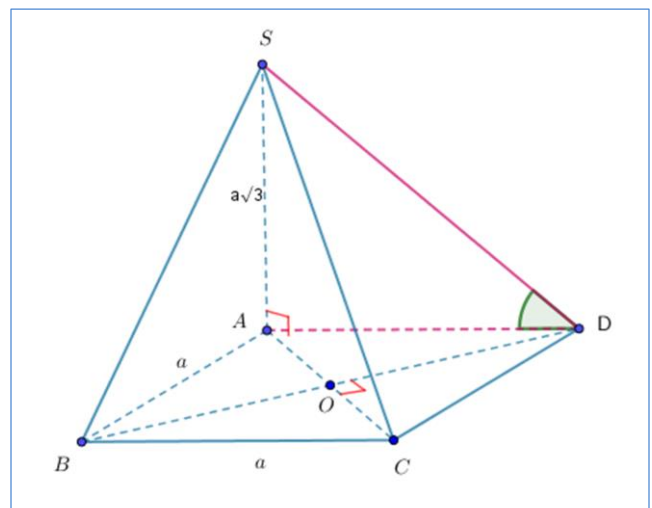
b.

- CD là giao tuyến của (SCD) và $(ABCD)$.

$$\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ CD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SA \perp CD$$

$$\begin{cases} CD \perp SA \subset (SAD) \\ CD \perp AD \subset (SAD) \\ SA \cap AD = \{A\} \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$$

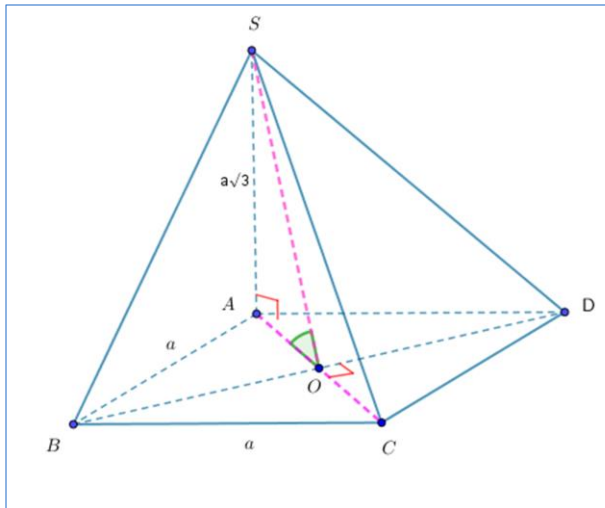
$$\Rightarrow CD \perp SD \text{ (vì } SD \subset (SAD) \text{)}$$



$$\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ SD \subset (SCD), SD \perp CD \Rightarrow \text{góc giữa } SD \text{ và } AD \text{ là góc giữa } (SCD) \text{ và } (ABCD) \\ AD \subset (ABCD), AD \perp CD \end{cases}$$

$$(SD, AD) = SDA, \tan SDA = \frac{SA}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow SDA = 60^\circ$$

c.



- BD là giao tuyến của (SBD) và (ABCD).

$$\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ BD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SA \perp BD$$

$$\begin{cases} BD \perp SA \subset (SAC) \\ BD \perp AC \subset (SAC) \Rightarrow BD \perp (SAC) \\ SA \cap AC = \{A\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow BD \perp SO \quad (SO \subset (SAC))$$

$$\begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ SO \subset (SBD), SO \perp BD \\ AC \subset (ABCD), AC \perp BD \end{cases}$$

$\Rightarrow$ góc giữa SO và AC là góc giữa (SBD) và (ABCD)

$$(SO, BD) = SOA$$

$$\tan SOA = \frac{SA}{AO} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{6} \Rightarrow SOA \approx 68^\circ$$

Áp dụng 1

1. Cho hình chóp S.ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{6}$. Tính góc giữa:

- a. mp(SBC) và mp(ABCD) b. mp(SCD) và mp(ABCD) c. mp(SBD) và mp(ABCD)

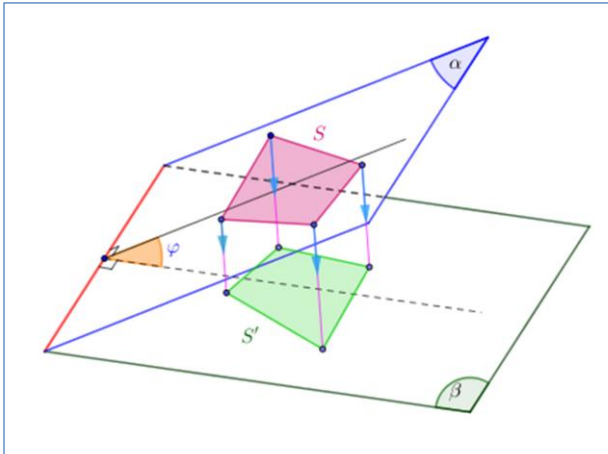
2. Cho hình chóp S.ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{7}$. Tính góc giữa:

- a. mp(SBC) và mp(ABCD) b. mp(SCD) và mp(ABCD) c. mp(SBD) và mp(ABCD)

3. Cho hình chóp S.MNPQ là hình vuông cạnh $2a$, SM vuông góc với đáy và $SM = 2a\sqrt{2}$. Tính góc giữa:

- a. mp(SNP) và mp(MNPQ) b. mp(SPQ) và mp(MNPQ) c. mp(SNQ) và mp(MNPQ)

3. Diện tích hình chiếu của một đa giác

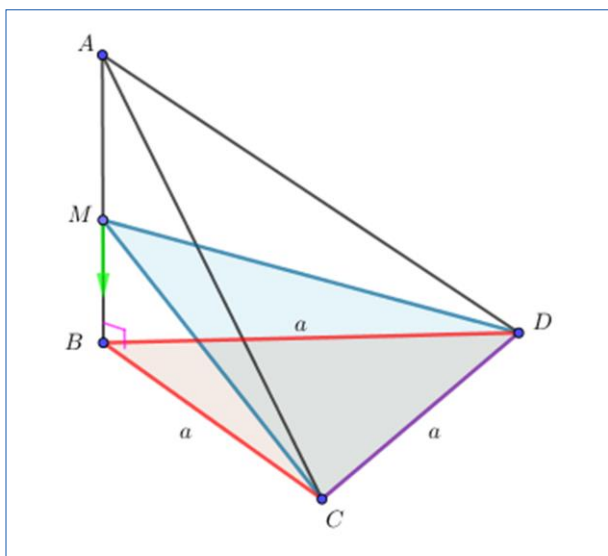


Cho đa giác $\mathcal{H}$ nằm trong mặt phẳng (α) có diện tích S và $\mathcal{H}'$ là hình chiếu vuông góc của $\mathcal{H}$ trên mặt phẳng (β) , φ là góc giữa (α) và (β) . Khi đó ta có:

$$S' = S \cos \varphi$$

Ví dụ 2: Cho tứ diện ABCD có BCD là tam giác đều cạnh a , AB vuông góc với mp(BCD). M là điểm thuộc cạnh AB sao cho diện tích tam giác MCD bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MCD) và (BCD).

Giải



Diện tích tam giác BCD:

$$\begin{aligned} S_{BCD} &= \frac{1}{2} BC \cdot BD \cdot \sin B \\ &= \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

Gọi φ là góc giữa mp(MCD) và mp(BCD).

Ta có: $S_{BCD} = S_{MCD} \cdot \cos \varphi$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{S_{BCD}}{S_{MCD}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$$

Áp dụng 2

1. Cho tứ diện $ABCD$ có BCD là tam giác đều cạnh a , AB vuông góc với $mp(BCD)$. M là điểm thuộc cạnh AB sao cho diện tích tam giác MCD bằng $a^2\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MCD) và (BCD) .
2. Cho tứ diện $ABCD$ có BCD là tam giác đều cạnh $2a$, AB vuông góc với $mp(BCD)$. M là điểm thuộc cạnh AB sao cho diện tích tam giác MCD bằng $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MCD) và (BCD) .
3. Cho tứ diện $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với $mp(ABC)$. M là điểm thuộc cạnh AB sao cho diện tích tam giác MBC bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MBC) và (ABC) .

II. Hai mặt phẳng vuông góc

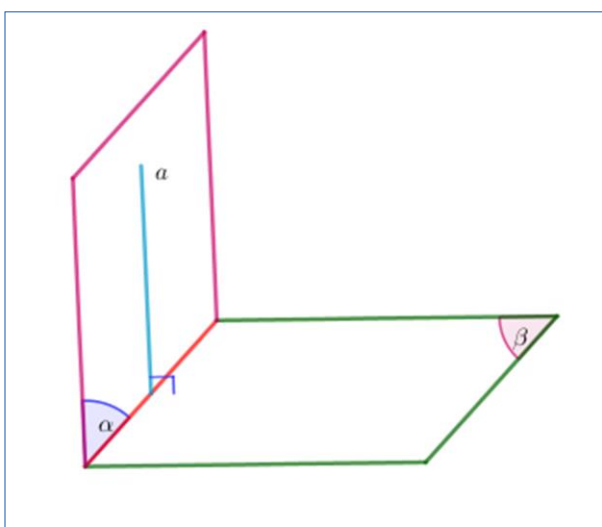
1. Định nghĩa

Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa hai mặt phẳng đó bằng 90° .

- Nếu mặt phẳng (α) vuông góc với mặt phẳng (β) , ta kí hiệu: $(\alpha) \perp (\beta)$

2. Các định lí

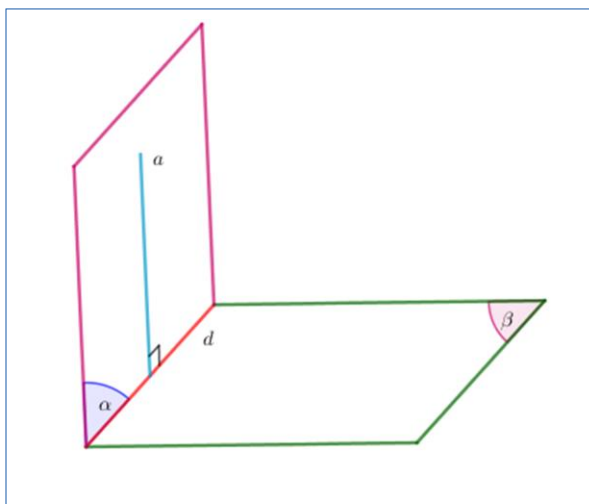
a. Định lí 1



Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} a \subset (\alpha) \\ a \perp (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$$

b. Hệ quả 1



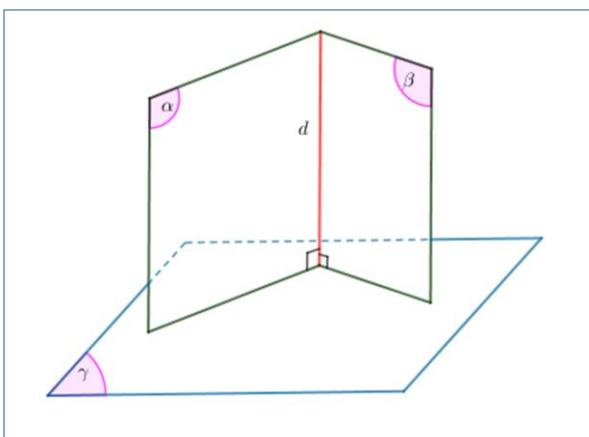
Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất kỳ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} (\alpha) \perp (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \Rightarrow a \perp d \\ a \subset (\alpha), a \perp d \end{cases}$$

c. Hệ quả 2

Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau. Nếu từ một điểm thuộc mặt phẳng (α) ta dựng một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (β) thì đường thẳng này nằm trong mặt phẳng (α)

d. Định lý 2



Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ 3 thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ 3 đó.

$$\begin{cases} (\alpha) \perp (\gamma) \\ (\beta) \perp (\gamma) \Rightarrow d \perp (\gamma) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \end{cases}$$

III. Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương

1. Định nghĩa

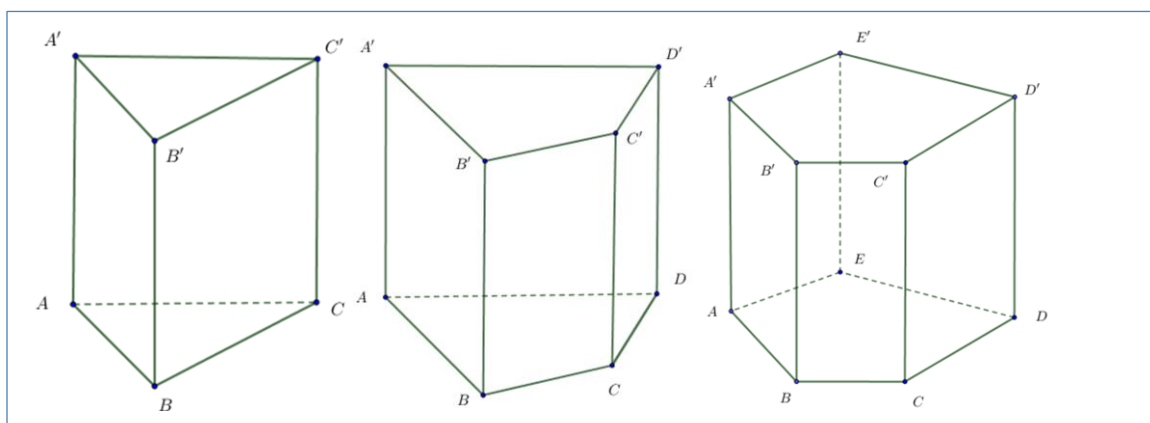
Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với các mặt đáy. Độ dài cạnh bên được gọi là chiều cao của hình lăng trụ đứng.

Nhận xét:

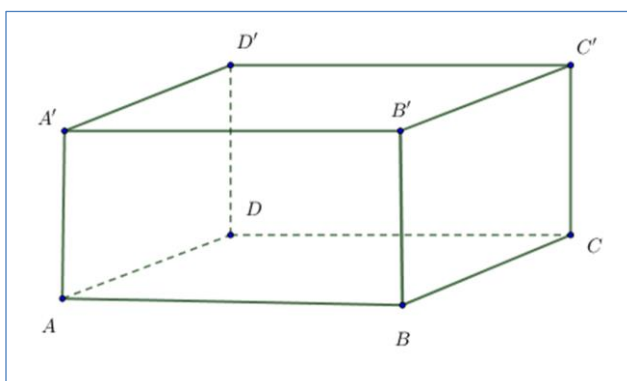
Các mặt bên của hình lăng trụ đứng luôn vuông góc với mặt đáy và là các hình chữ nhật.

2. Các loại hình lăng trụ đứng:

-Tùy vào hình dạng của đáy, ta có các dạng lăng trụ đứng: Lăng trụ đứng tam giác, lăng trụ đứng tứ giác, lăng trụ đứng ngũ giác,....



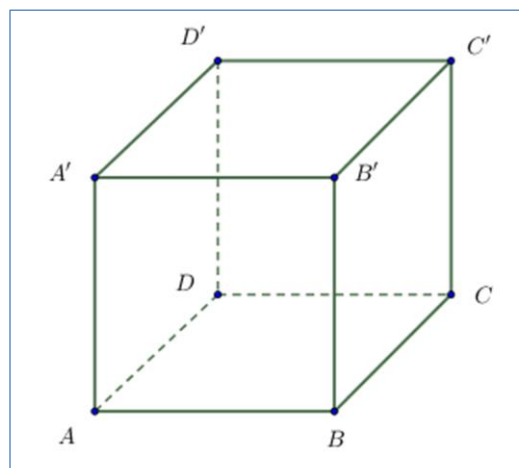
-Nếu đáy là một đa giác đều,ta có hình lăng đều. Kết hợp với hình tính của đáy,ta có lăng trụ tam giác đều, lăng trụ tứ giác đều, lăng trụ ngũ giác đều,...



-Hình hộp đứng: Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành

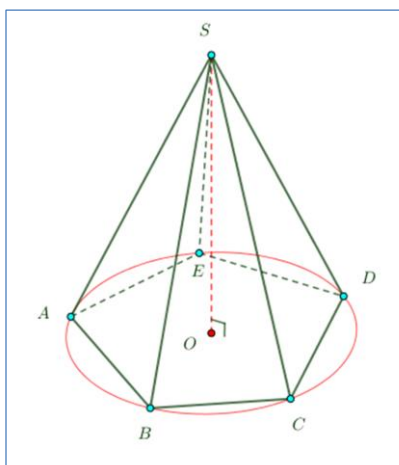
-Hình hộp chữ nhật: Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật

- Hình lập phương: Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông và các mặt bên đều là hình vuông.



IV. Hình chóp đều và hình chóp cắt đều

1. Hình chóp đều

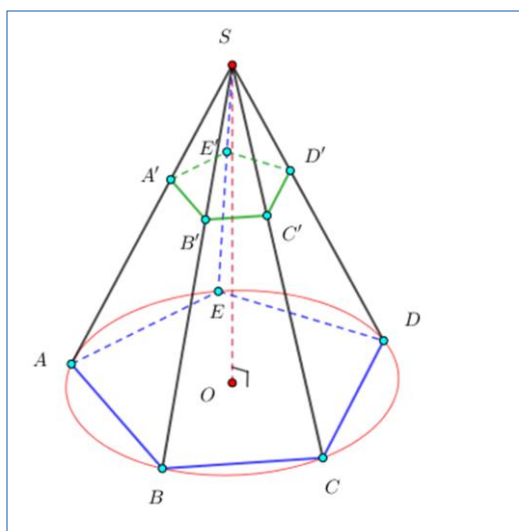


Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu có đáy là đa giác đều và có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy

Nhận xét:

- Các mặt bên của hình chóp đều là các tam giác cân bằng nhau. Các mặt bên tạo với đáy các góc bằng nhau.
- Các cạnh bên của hình chóp đều thì bằng nhau và tạo với đáy các góc bằng nhau.

2. Hình chóp cắt đều



- Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy được gọi là hình chóp cắt đều.

Nhận xét:

- Các mặt bên của hình chóp cắt đều là những hình thang cân và các cạnh bên của hình chóp cắt đều có độ dài bằng nhau.

Bài tập

1. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình chữ nhật tâm O , $AB=a$, $AD=2a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{5}$. Tính góc giữa:

- a. $mp(SBC)$ và $mp(ABCD)$ b. $mp(SCD)$ và $mp(ABCD)$
c. $mp(SBD)$ và $(ABCD)$ d. $mp(SAC)$ và $(ABCD)$

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , các cạnh bên bằng nhau và có độ dài bằng $2a$. Tính góc giữa:

- a. $mpSAB$ và $(ABCD)$ b. $mp(SAB)$ và (SCD)

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông với hai đáy là AD và BC , $AD = 2a$, $BC = a$, $AB = a$. Tính góc giữa:

- a. $mp(SBC)$ và $(ABCD)$ b. $mp(SCD)$ và $(ABCD)$ c. $mp(SAD)$ và (SBC)

4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, SA vuông góc với đáy. Gọi N là trung điểm của SA , $mp(NCD)$ cắt khối chóp theo một thiết diện có diện tích $S = 2a^2\sqrt{3}$. Tính góc giữa $mp(NCD)$ và $mp(ABCD)$.