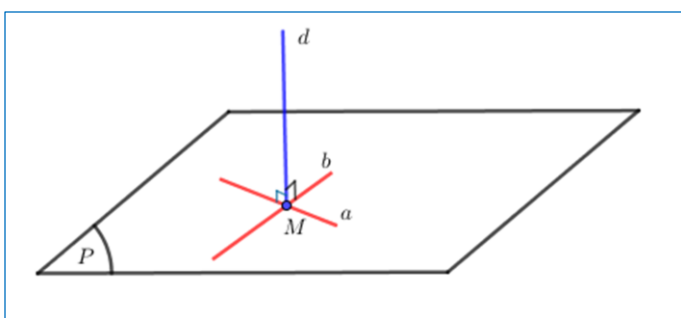


LUYỆN TẬP ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

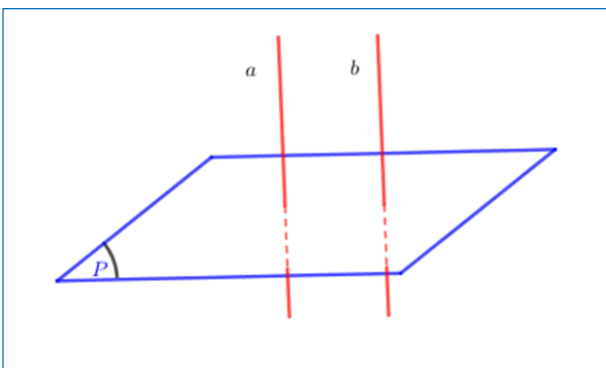
Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (P) thì d vuông góc với (P)



$$\begin{cases} d \perp a \subset (P) \\ d \perp b \subset (P) \\ a \cap b = \{M\} \end{cases}$$

2. Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Tính chất 1



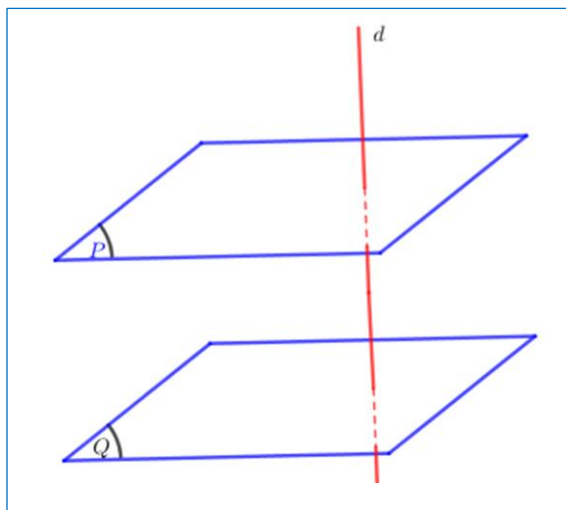
a.

$$\begin{cases} a // b \\ (P) \perp a \end{cases} \Rightarrow (P) \perp b$$

b.

$$\begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a // b$$

Tính chất 2



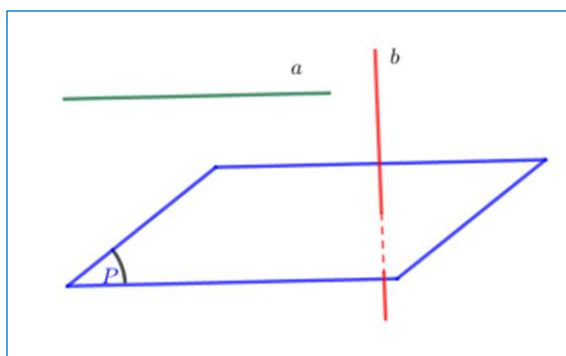
a.

$$\begin{cases} (P) // (Q) \\ d \perp (P) \end{cases} \Rightarrow d \perp (Q)$$

b.

$$\begin{cases} (P) \perp d \\ (Q) \perp d \end{cases} \Rightarrow (P) // (Q)$$

Tính chất 3



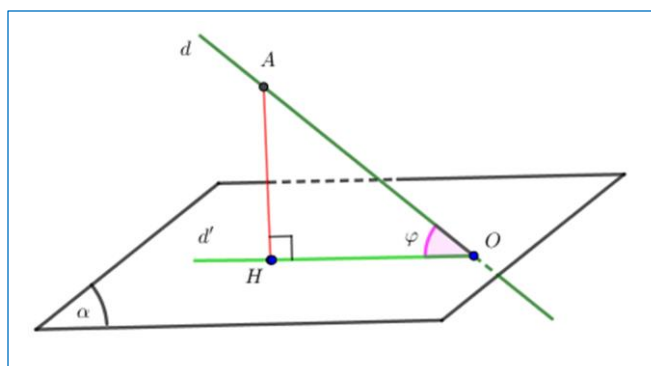
a.

$$\begin{cases} a // (P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow b \perp a$$

b.

$$\begin{cases} a \perp b \\ (P) \perp b \end{cases} \Rightarrow a // (P)$$

3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng



Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) , d' là hình chiếu của d lên (α) .

- Nếu d vuông góc với (α) thì góc giữa d và (α) bằng 90°

- Nếu d không vuông góc với (α) thì góc giữa d và d' gọi là góc giữa d và (α)

$$(0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ)$$

Bài 1

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{6}$.
Tính góc giữa:

a. SB và $(ABCD)$

b. SC và $(ABCD)$

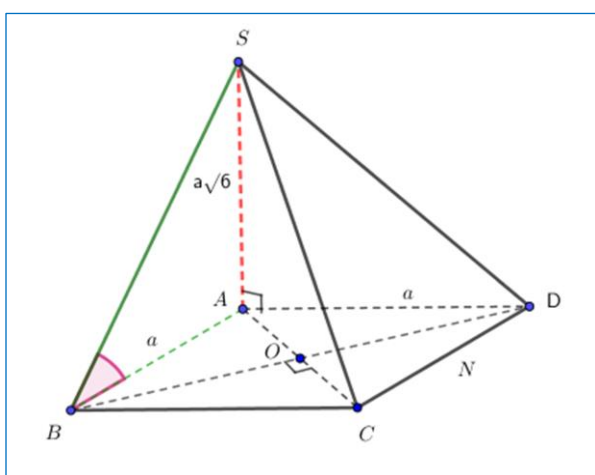
c. SC và (SAD)

d. SD và (SAC)

e. SA và (SAD)

f. AC và (SBC)

a.



- SB cắt $(ABCD)$ tại B

- SA vuông góc với $(ABCD)$ tại A

$\Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$.

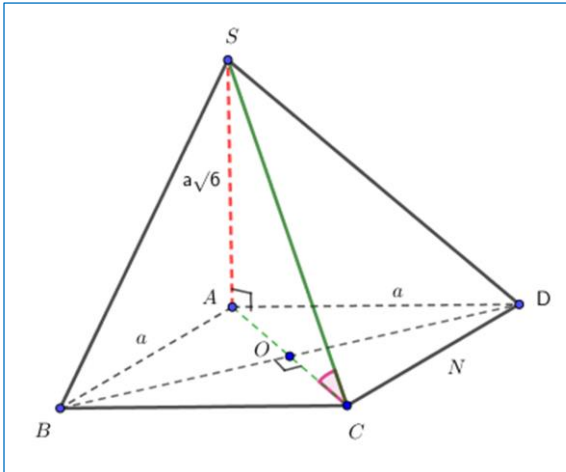
$\Rightarrow$ góc giữa SB và AB là góc giữa SB và $(ABCD)$

$$(SB, AB) = SBA$$

$$\tan SBA = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{6}}{a} = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow SBA \approx 68^\circ$$

b.



-SC cắt (ABCD) tại C

-SA vuông góc với (ABCD) tại A nên A là hình chiếu của S trên (ABCD)

=> AC là hình chiếu của SC trên (ABCD).

=> góc giữa SC và AC là góc giữa SC và (ABCD)

$(SC, AC) = SCA$

$$\tan SCA = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow SCA = 60^\circ$$

c.

$$\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ CD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SA \perp CD$$

$$\begin{cases} CD \perp SA \subset (SAD) \\ CD \perp AD \subset (SAD) \Rightarrow CD \perp (SAD) \\ SA \cap AD = \{A\} \end{cases}$$

=> D là hình chiếu của C trên (SAD)

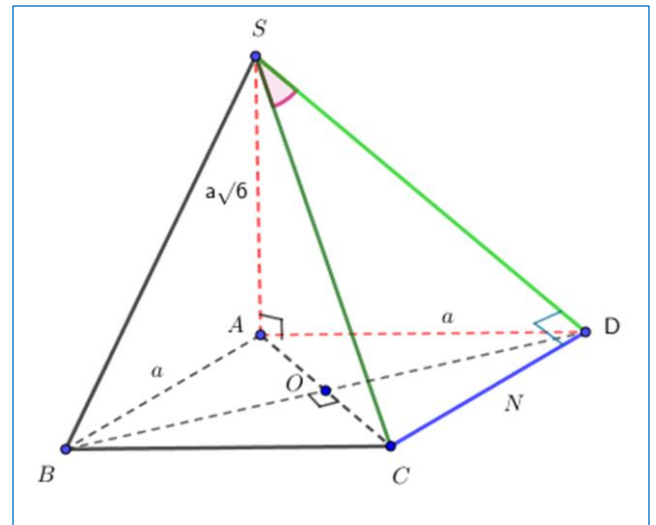
SC cắt (ABCD) tại S => SD là hình chiếu của SC trên (SAD).

=> Góc giữa SC và SD là góc giữa SC và (SAD)

$(SC, SD) = CSD$

$$\tan CSD = \frac{CD}{SD} = \frac{a}{a\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow CSD \approx 21^\circ$$



d.

$$\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ BD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SA \perp BD$$

$$\begin{cases} BD \perp SA \subset (SAC) \\ BD \perp AC \subset (SAC) \Rightarrow BD \perp (SAC) \\ SA \cap AC = \{A\} \end{cases}$$

BD vuông góc với (SAC) tại O nên O là hình chiếu của D trên (SAC).

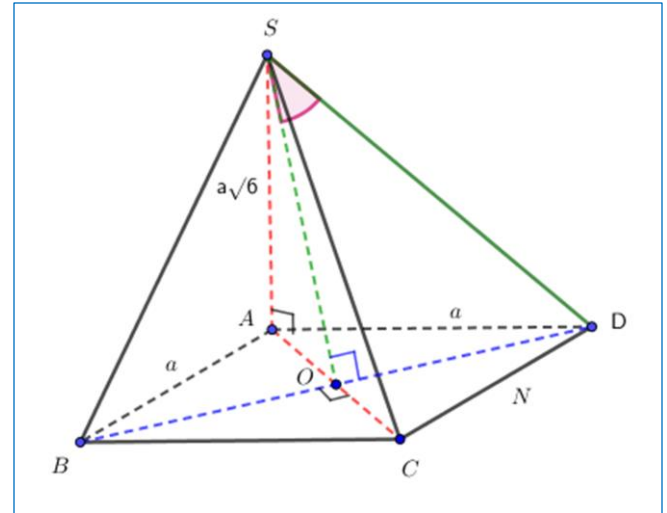
Lại có SD cắt (SAC) tại S $\Rightarrow$ SO là hình chiếu của SD trên (SAC)

$\Rightarrow$ Góc giữa SD và SO là góc giữa SD và (SAC)

$$(\angle SD, SO) = \angle OSD$$

$$\sin \angle OSD = \frac{OD}{SD} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\Rightarrow \angle OSD \approx 16^\circ$$



e.

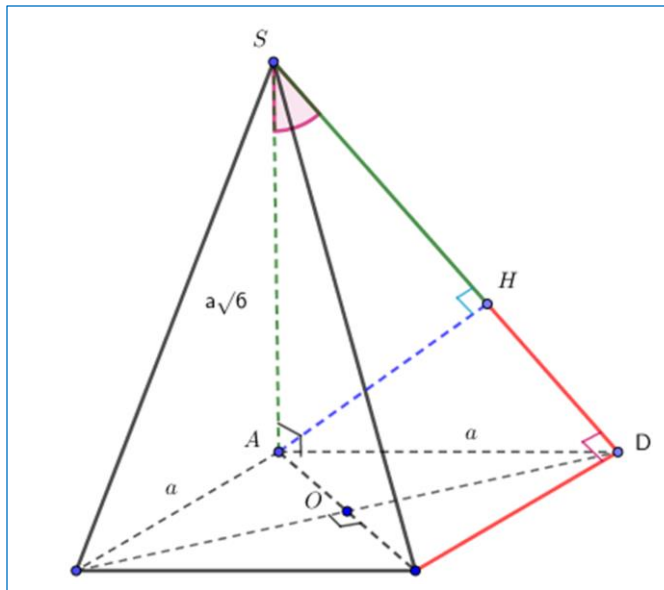
Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SD.

$$\begin{cases} CD \perp (SAD) \\ AH \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow CD \perp AH$$

$$\begin{cases} AH \perp SD \subset (SCD) \\ AH \perp CD \subset (SCD) \Rightarrow AH \perp (SCD) \\ SD \cap CD = \{D\} \end{cases}$$

AH vuông góc với (SCD) tại H nên H là hình chiếu của A trên (SAC).

Lại có SA cắt (SCD) tại S $\Rightarrow$ SH là hình chiếu của SA trên (SCD)

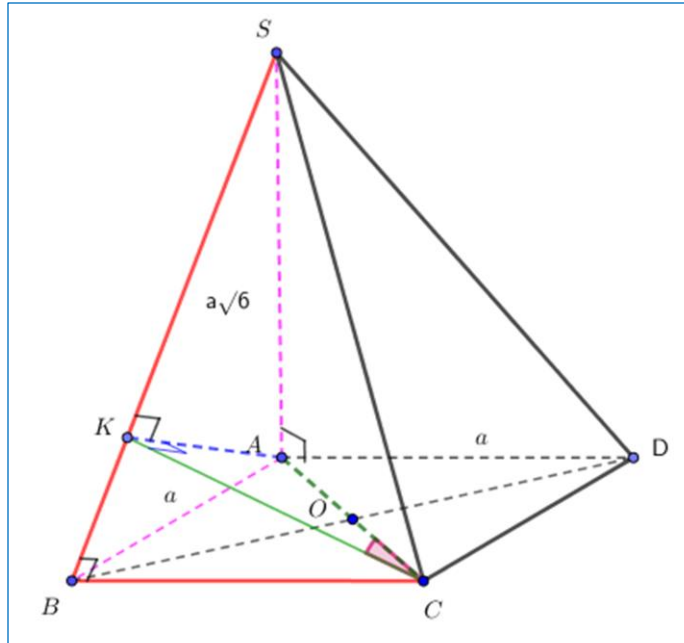


$\Rightarrow$ Góc giữa SA và SH là góc giữa SA và (SCD)

$$(SA, SH) = \angle ASH$$

$$\tan \angle ASH = \tan \angle ASD = \frac{AD}{SA} = \frac{a}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \angle ASH \approx 22^\circ$$



f.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên SB.

$$\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ BC \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SA \perp BC$$

$$\begin{cases} BC \perp SA \subset (SAB) \\ BC \perp AB \subset (SAB) \\ SA \cap AB = \{A\} \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$

$$\begin{cases} BC \perp (SAB) \\ AK \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow BC \perp AK$$

$$\begin{cases} AK \perp BC \subset (SBC) \\ AK \perp SB \subset (SBC) \\ BC \cap SB = \{B\} \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SBC)$$

AK vuông góc với (SBC) tại K nên K là hình chiếu của A trên (SBC).

Lại có AC cắt (SBC) tại C $\Rightarrow$ CK là hình chiếu của AC trên (SBC)

$\Rightarrow$ Góc giữa AC và CK là góc giữa AC và (SBC)

$$(AC, CK) = \angle ACK, \sin \angle ACK = \frac{AK}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{(a\sqrt{6})^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{6a^2}$$

$$\Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$$

$$\sin ACK = \frac{AK}{AC} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \Rightarrow ACK \approx 41^\circ$$

Áp dụng 1

1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa:

- | | | |
|-----------------|-----------------|----------------|
| a. SB và (ABCD) | b. SC và (ABCD) | c. SC và (SAD) |
| d. SD và (SAC) | e. SA và (SAD) | f. AC và (SBC) |

2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Tính góc giữa:

- | | | |
|-----------------|-----------------|----------------|
| a. SB và (ABCD) | b. SC và (ABCD) | c. SC và (SAD) |
| d. SD và (SAC) | e. SA và (SAD) | f. AC và (SBC) |

3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 3a, SA vuông góc với đáy và $SA = 2a\sqrt{6}$. Tính góc giữa:

- | | | |
|-----------------|-----------------|----------------|
| a. SB và (ABCD) | b. SC và (ABCD) | c. SC và (SAD) |
| d. SD và (SAC) | e. SA và (SAD) | f. AC và (SBC) |

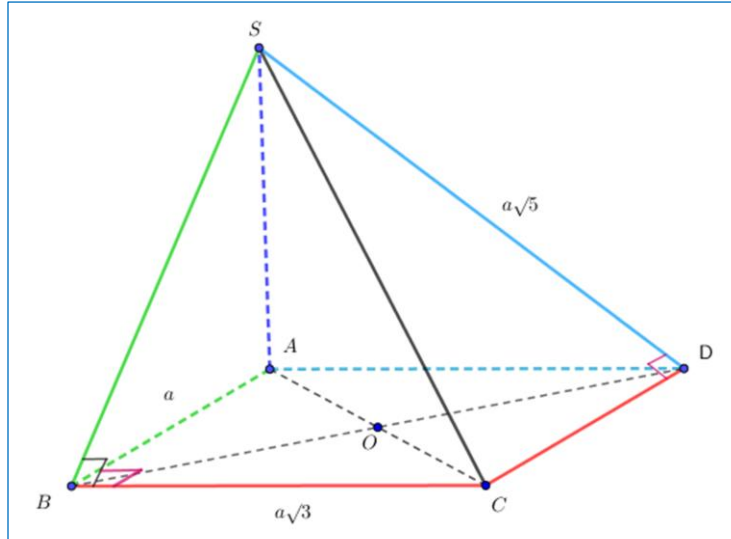
Bài 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$, $SD=a\sqrt{5}$. Tam giác SBC vuông tại B , tam giác SCD vuông tại D .

a. Chứng minh $SA \perp (ABCD)$

b. Tính góc giữa SD và (SAC)

Giải



a.

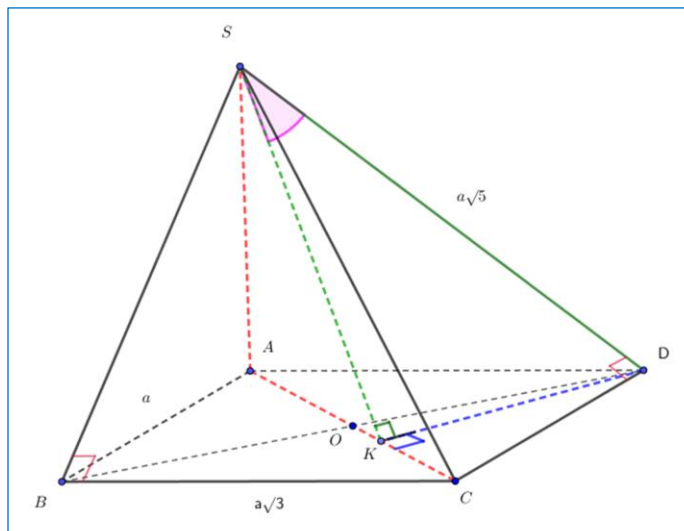
$$\begin{cases} BC \perp SB \subset (SAB) \\ BC \perp AB \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp (SAB) \\ SB \cap AB = \{B\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} BC \perp (SAB) \\ SA \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp SA \end{cases}$$

$$\begin{cases} CD \perp SD \subset (SAD) \\ CD \perp AD \subset (SAD) \Rightarrow CD \perp (SAD) \\ SD \cap AD = \{D\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} CD \perp (SAD) \\ SA \subset (SAD) \Rightarrow CD \perp SA \end{cases}$$

$$\begin{cases} SA \perp BC \subset (ABCD) \\ SA \perp CD \subset (ABCD) \Rightarrow SA \perp (ABCD) \\ BC \cap CD = \{C\} \end{cases}$$



b.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của D trên AC .

$$\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ DK \subset (ABCD) \Rightarrow SA \perp DK \end{cases}$$

$$\begin{cases} DK \perp SA \subset (SAC) \\ DK \perp AC \subset (SAC) \Rightarrow DK \perp (SAC) \\ SA \cap AC = \{A\} \end{cases}$$

DK vuông góc với (SAC) tại K, SD cắt (SAC) tại S. Do đó SK là hình chiếu của SD trên (SAC).

=> Góc giữa SD và SK là góc giữa SD và (SAC).

$$(\overline{SD}, \overline{SK}) = \angle DSK, \sin \angle DSK = \frac{DK}{SD}.$$

$$\frac{1}{DK^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2}$$

$$\Rightarrow DK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \angle DSK = \frac{DK}{SD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \Rightarrow \angle DSK \approx 23^\circ$$

Áp dụng 2

1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật tâm O, $AB = a$, $BC = a\sqrt{6}$, $SD = 2a\sqrt{5}$. Tam giác SBC vuông tại B, tam giác SCD vuông tại D.

a. Chứng minh $SA \perp (ABCD)$

b. Tính góc giữa SD và (SAC)

2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật tâm O, $AB = 2a$, $BC = a\sqrt{7}$, $SD = 4a$. Tam giác SBC vuông tại B, tam giác SCD vuông tại D.

a. Chứng minh $SA \perp (ABCD)$

b. Tính góc giữa SD và (SAC)

3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật tâm O, $AB = a$, $BC = a\sqrt{5}$, $SD = 2a\sqrt{5}$. Tam giác SBC vuông tại B, tam giác SCD vuông tại D.

a. Chứng minh $SA \perp (ABCD)$

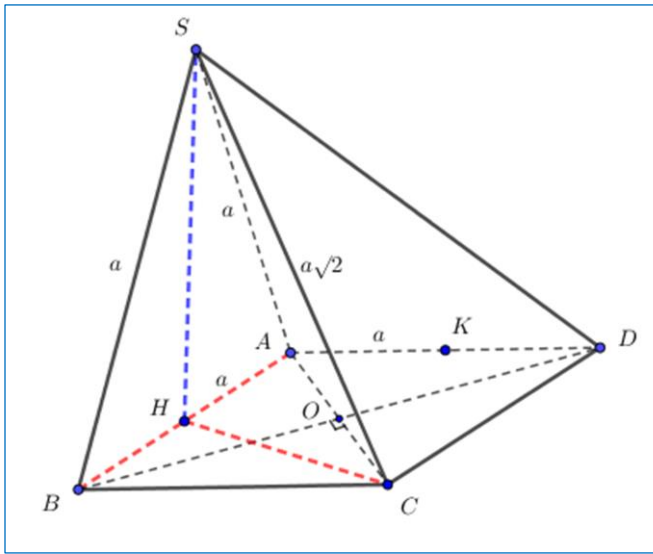
b. Tính góc giữa SD và (SAC)

Bài 3

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông tâm O cạnh a, $SC = a\sqrt{2}$, tam giác SAB đều, H,K lần lượt là trung điểm của AB,AD.

- Chứng minh SH vuông góc với mp(ABCD).
- Tính góc giữa SD và mp(ABCD).
- Chứng minh CK vuông góc với SD.

Giải



a. Tam giác SAB đều $\Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$SH^2 + CH^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2a^2$$

Áp dụng định lí Pitago cho tam giác HBC:

$$CH = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$SC^2 = (a\sqrt{2})^2 = 2a^2 \Rightarrow SC^2 = SH^2 + CH^2$$

Theo định lí Pitago, tam giác SHC vuông tại H $\Rightarrow SH \perp CH$

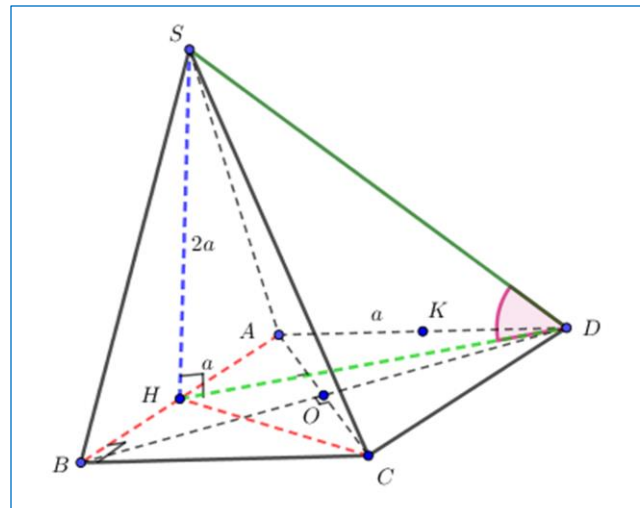
$$\begin{cases} SH \perp CH \subset (ABCD) \\ SH \perp AB \subset (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD) \\ CH \cap AB = \{H\} \end{cases}$$

b.

SH vuông góc với (ABCD) tại H nên H là hình chiếu của S trên (ABCD).

SD cắt (ABCD) tại D $\Rightarrow$ HD là hình chiếu của SD trên (ABCD)

$\Rightarrow$ Góc giữa SD và DH là góc giữa SD và (ABCD)



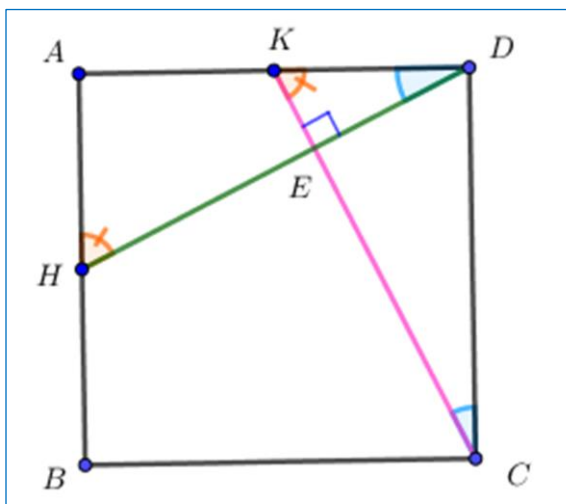
$$(SD, DH) = SDH$$

$$DH = \sqrt{AH^2 + AD^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\tan SDH = \frac{SH}{DH} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow SDH \approx 38^\circ$$

c.



Xét tam giác ADH và tam giác DCK:

$$\begin{cases} AD = BC = a \\ AH = DK = \frac{a}{2} \\ \angle DAH = \angle CDK = 90^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle ADH = \triangle DCK \text{ (c - g - c)}$$

$$\Rightarrow \angle ADH = \angle DCK$$

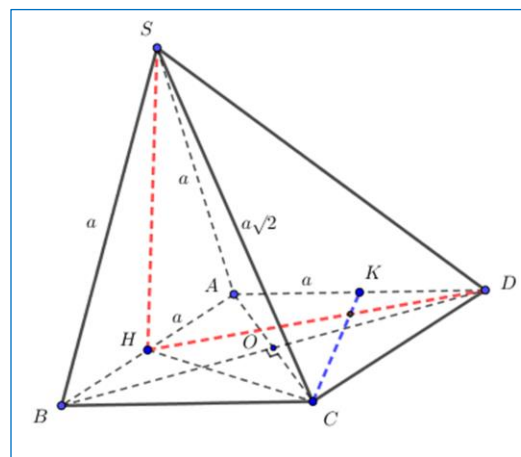
$$+) \angle DKC + \angle DCK = 90^\circ, \angle ADH = \angle DCK$$

$$\Rightarrow \angle ADH + \angle DCK = 90^\circ \Rightarrow \angle KDE + \angle EKD = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle KED = 90^\circ \Rightarrow CK \perp DH$$

$$+) \begin{cases} SH \perp (ABCD) \\ CK \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp CK$$

$$+) \begin{cases} CK \perp SH \subset (SDH) \\ CK \perp DH \subset (SDH) \\ SH \cap DH = \{H\} \end{cases} \Rightarrow CK \perp (SDH) \Rightarrow CK \perp SD$$



Áp dụng 3

1. Cho hình chóp S.ABCE có đáy là hình vuông tâm O cạnh a, $SC = a\sqrt{2}$, tam giác SAB đều, H,K lần lượt là trung điểm của AB,AE.

- a. Chứng minh SH vuông góc với mp(ABCE).
- b. Tính góc giữa SE và mp(ABCE).
- c. Chứng minh CK vuông góc với SE.

2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông tâm O cạnh 2a, $SC = 2a\sqrt{2}$, tam giác SAB đều, H,F lần lượt là trung điểm của AB,AD.

- a. Chứng minh SH vuông góc với mp(ABCD).
- b. Tính góc giữa SD và mp(ABCD).
- c. Chứng minh CF vuông góc với SD.

3. Cho hình chóp S.MNPQ có đáy là hình vuông tâm O cạnh a, $SP = a\sqrt{2}$, tam giác SMN đều, H,K lần lượt là trung điểm của MN,MQ.

- a. Chứng minh SH vuông góc với mp(MNPQ).
- b. Tính góc giữa SQ và mp(MNPQ).
- c. Chứng minh PK vuông góc với SQ.

Bài tập

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O và SA vuông góc với đáy. Gọi E, F, I lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC, SD .

a. Chứng minh $BC \perp (SAB), CD \perp (SAD), BD \perp SAC$.

b. Chứng minh $SC \perp (AEI)$ và điểm F thuộc $mp(AEI)$.

c. Chứng minh $EI \perp (SAC), EI \perp AF$

2. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với $mp(ABC)$. H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC . Chứng minh rằng:

a. AH, SK và BC đồng qui.

b. $SB \perp (CHK)$

c. $HK \perp (SBC)$

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy. Đáy là hình chữ nhật có $AB=a, AD = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của CD . Tính góc giữa SA và $mp(SBM)$