

ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

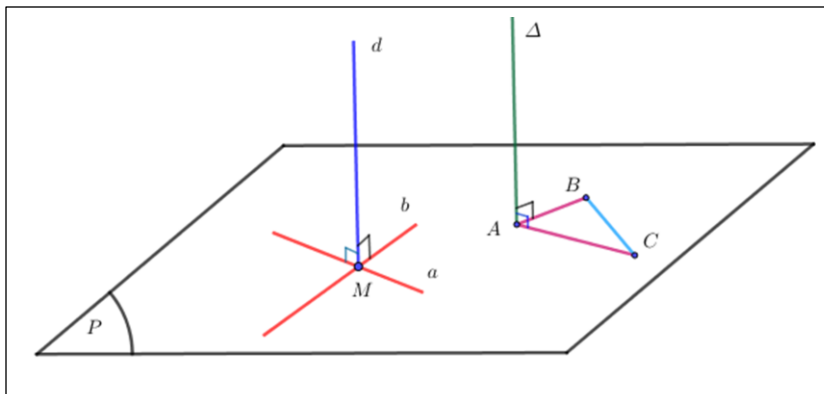
I. Định nghĩa

Đường thẳng d gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (P) . Kí hiệu: $d \perp (P)$

II. Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

1. Định lí

Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (P) thì d vuông góc với (P) .



$$\begin{cases} d \perp a \subset (P) \\ d \perp b \subset (P) \\ a \cap b = \{M\} \end{cases} \Rightarrow d \perp (P)$$

$$\begin{cases} d \perp AB \\ d \perp AC \end{cases} \Rightarrow d \perp BC$$

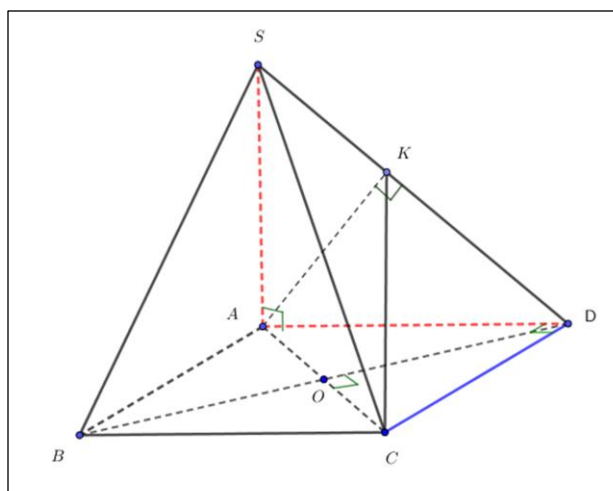
2. Hệ quả

Nếu đường thẳng d vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì nó cũng vuông góc với cạnh thứ 3 của tam giác đó.

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy, K là hình chiếu vuông góc của A trên SD . Chứng minh:

- a. $CD \perp (SAD)$ b. $AK \perp (SCD)$ c. $BD \perp (SAC)$

Giải



a. Chứng minh $CD \perp (SAD)$

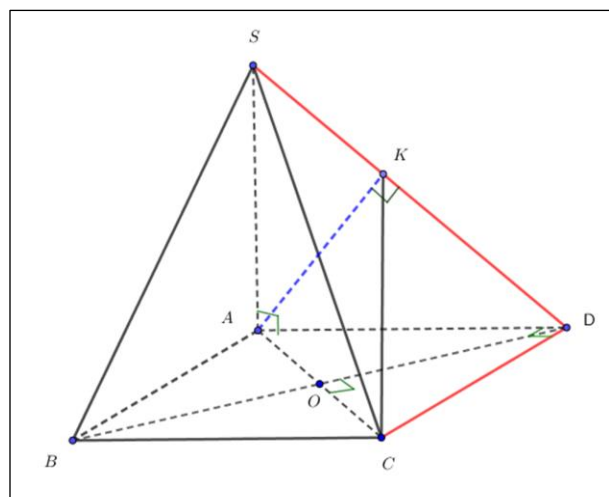
$$\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ CD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SA \perp CD$$

$$\begin{cases} CD \perp SA \subset (SAD) \\ CD \perp AD \subset (SAD) \Rightarrow CD \perp (SAD) \\ SA \cap AD = \{A\} \end{cases}$$

b. Chứng minh $AK \perp (SCD)$

$$\begin{cases} CD \perp (ABCD) \\ AK \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow CD \perp AK$$

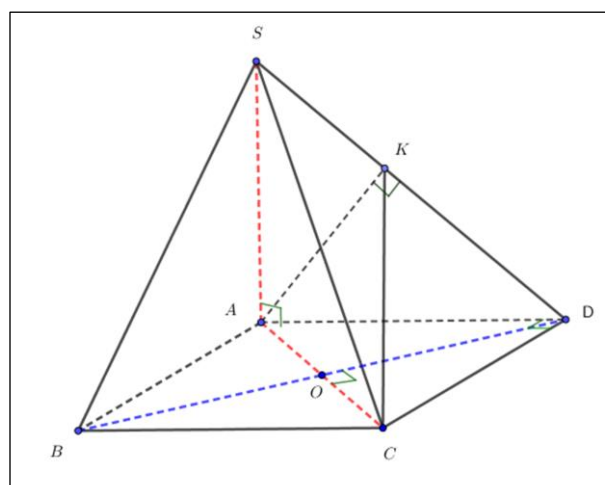
$$\begin{cases} AK \perp CD \subset (SCD) \\ AK \perp SD \subset (SCD) \Rightarrow AK \perp (SCD) \\ CD \cap SD = \{D\} \end{cases}$$



c. Chứng minh $BD \perp (SAC)$

$$\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ BD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SA \perp BD$$

$$\begin{cases} BD \perp SA \subset (SAC) \\ BD \perp AC \subset (SAC) \Rightarrow BD \perp (SAC) \\ SA \cap AC = \{A\} \end{cases}$$



Áp dụng 1

1. Cho hình chóp S.ABCE có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy, F là hình chiếu vuông góc của A trên SD. Chứng minh:

- a. $CE \perp (SAE)$ b. $AF \perp (SCE)$ c. $BE \perp (SAC)$

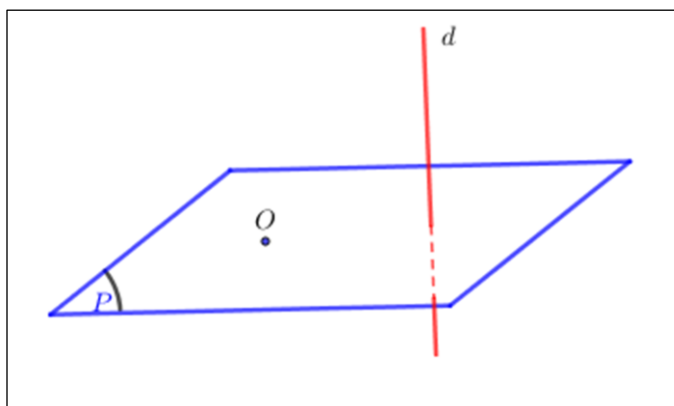
2. Cho hình chóp S.ABED có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy, H là hình chiếu vuông góc của A trên SD. Chứng minh:

- a. $ED \perp (SAD)$ b. $AH \perp (SED)$ c. $BD \perp (SAE)$

3. Cho hình chóp S.MNPQ có đáy là hình vuông, SM vuông góc với đáy, F là hình chiếu vuông góc của A trên SD. Chứng minh:

- a. $PQ \perp (SMQ)$ b. $AF \perp (SPQ)$ c. $NQ \perp (SMP)$

III. Tính chất

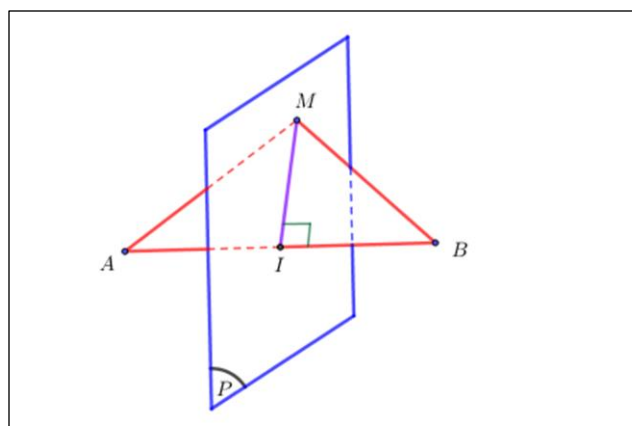


1. Tính chất 1

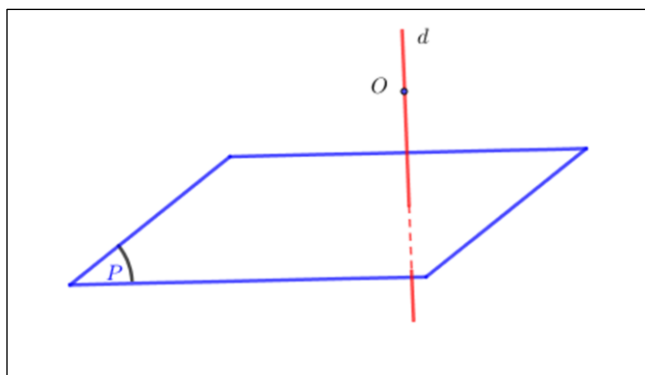
Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Mặt phẳng trung trực

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là mặt phẳng đi qua trung điểm I của AB và vuông góc với đường thẳng AB.



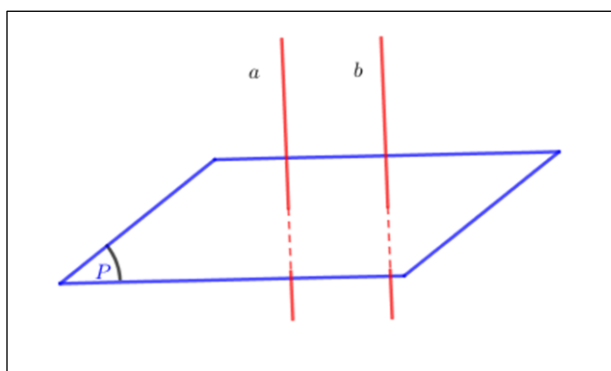
2. Tính chất 2



Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

IV. Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng

1. Tính chất 1



a. Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia

$$\begin{cases} a // b \\ (P) \perp a \end{cases} \Rightarrow (P) \perp b$$

b. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

$$\begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a // b$$

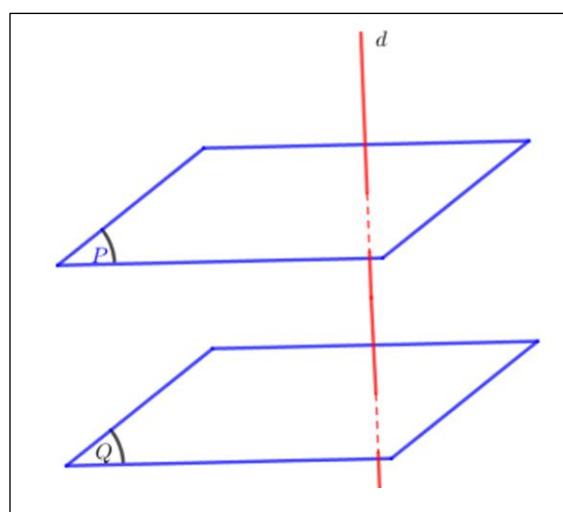
2. Tính chất 2

a. Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

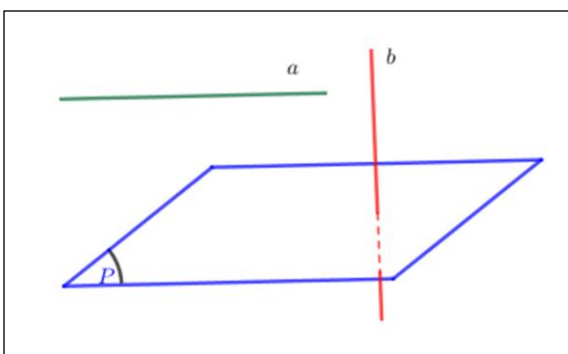
$$\begin{cases} (P) // (Q) \\ d \perp (P) \end{cases} \Rightarrow d \perp (Q)$$

b. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

$$\begin{cases} (P) \perp d \\ (Q) \perp d \end{cases} \Rightarrow (P) // (Q)$$



3. Tính chất 3



a. Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (P) thì cũng vuông góc với a .

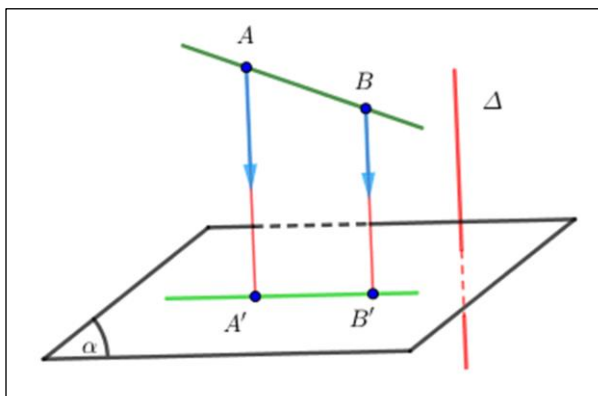
$$\begin{cases} a // (P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow b \perp a$$

b. Nếu một đường thẳng và mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau)

$$\begin{cases} a \perp b \\ (P) \perp b \end{cases} \Rightarrow a // (P)$$

V. Phép chiếu vuông góc và định lý ba đường vuông góc

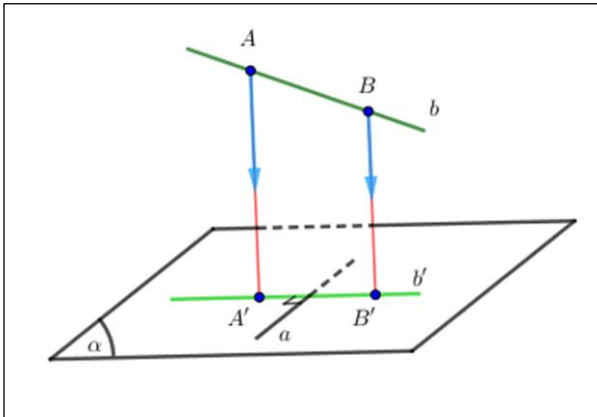
1. Phép chiếu vuông góc



- Cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α) . Phép chiếu song song theo phương của Δ lên mặt phẳng (α) được gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (α)

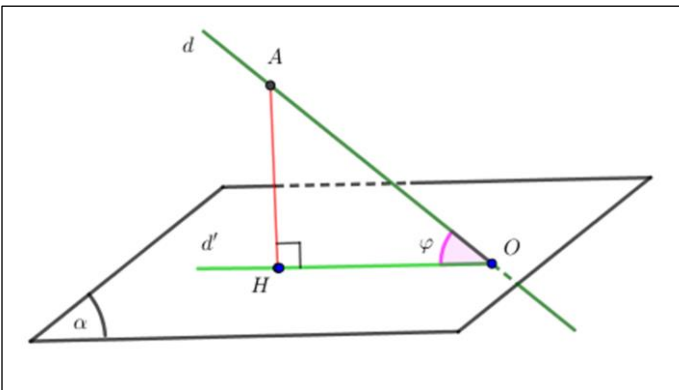
- “Phép chiếu lên mặt phẳng (α) ” thay cho “phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (α) ”.

2. Định lí ba đường vuông góc



Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và b là đường thẳng không thuộc (α) , đồng thời không vuông góc với (α) . Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (α) . Khi đó a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với b' .

3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng



Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) , d' là hình chiếu của d lên (α) .

- Nếu d vuông góc với (α) thì góc giữa d và (α) bằng 90°

- Nếu d không vuông góc với (α) thì góc giữa d và d' gọi là góc giữa d và (α)

$$(0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ)$$

Ví dụ 2

Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và SA vuông góc với đáy. M, N lần lượt là trung điểm của SC, CD .

- Chứng minh $OM \perp (ABCD)$
- Chứng minh $AB \perp (SAD)$
- Chứng minh $AB \perp (OMN)$
- Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên MN . Chứng minh $OH \perp (SCD)$
- Tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$

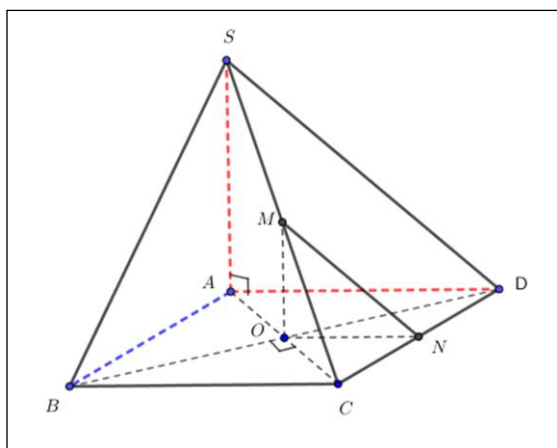
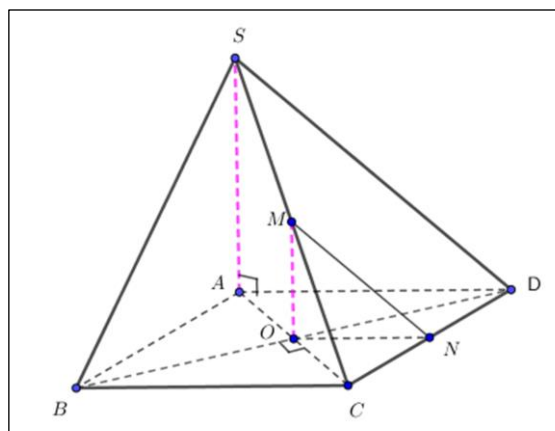
Giải

a. Chứng minh $OM \perp (ABCD)$

OM là đường trung bình của tam giác SAC.

Do đó $OM \parallel SA$

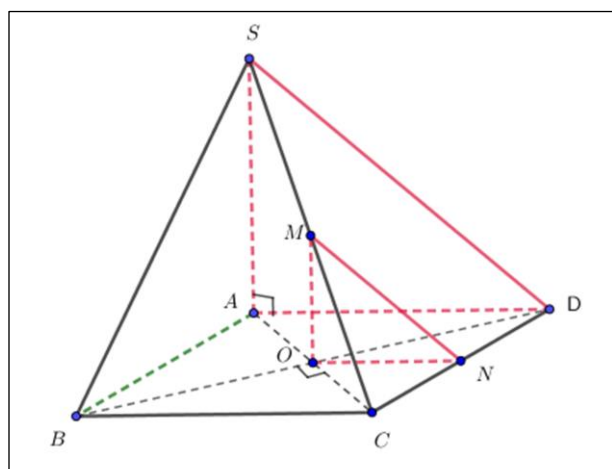
$$\begin{cases} OM \parallel SA \\ SA \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow OM \perp (ABCD)$$



b. Chứng minh $AB \perp (SAD)$

$$\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ AB \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SA \perp AB$$

$$\begin{cases} AB \perp SA \subset (SAD) \\ AB \perp AD \subset (SAD) \\ SA \cap AD = \{A\} \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD)$$



c. Chứng minh $AB \perp (OMN)$

OM là đường trung bình của tam giác SAC.

$$\Rightarrow OM \parallel SA$$

ON là đường trung bình của tam giác ACD.

$$\Rightarrow ON \parallel AD$$

$$OM \parallel SA \subset (SAD) \Rightarrow OM \parallel (SAD)$$

$$ON \parallel AD \subset (SAD) \Rightarrow ON \parallel (SAD)$$

$$\begin{cases} OM, ON // (SAD) \\ OM, ON \subset (OMN) \Rightarrow (OMN) // (SAD) \\ OM \cap ON = \{O\} \end{cases}$$

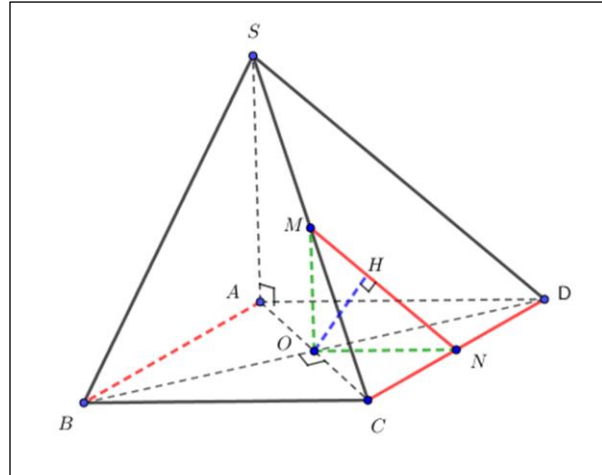
$$\begin{cases} (OMN) // (SAD) \\ AB \perp (SAD) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (OMN)$$

d. Chứng minh $OH \perp (SCD)$

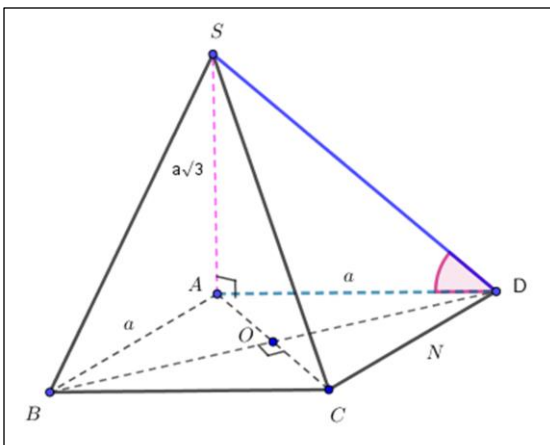
$$\begin{cases} AB \perp (OMN) \\ AB // CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (OMN)$$

$$\begin{cases} CD \perp (OMN) \\ OH \subset (OMN) \end{cases} \Rightarrow CD \perp OH$$

$$\begin{cases} OH \perp CD \subset (SCD) \\ OH \perp MN \subset (SCD) \Rightarrow OH \perp (SCD) \\ CD \cap MN = \{N\} \end{cases}$$



e. Tính góc giữa SD và (ABCD)



-SA vuông góc với mp(ABCD) và SD cắt mp(ABCD) tại D nên AD là hình chiếu vuông góc của SD lên mp(ABCD).

-Do đó góc giữa SD và AD là góc giữa SD và mp(ABCD).

$$(SD, AD) = SDA$$

$$\tan SDA = \frac{SD}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow SDA = 60^\circ$$

Áp dụng 2

1. Cho hình chóp S.ABCE, đáy ABCE là hình vuông tâm O và SA vuông góc với đáy. H, K lần lượt là trung điểm của SC, CE.

- a. Chứng minh $OH \perp (ABCE)$
- b. Chứng minh $AB \perp (SAE)$
- c. Chứng minh $AB \perp (OHK)$
- d. Gọi F là hình chiếu vuông góc của O trên HK. Chứng minh $OF \perp (SCE)$

2. Cho hình chóp S.ABEC, đáy ABEC là hình vuông tâm O và SA vuông góc với đáy. F, K lần lượt là trung điểm của SE, EC.

- a. Chứng minh $OF \perp (ABEC)$
- b. Chứng minh $AB \perp (SAC)$
- c. Chứng minh $AB \perp (OFK)$
- d. Gọi M là hình chiếu vuông góc của O trên FK. Chứng minh $OM \perp (SEC)$

3. Cho hình chóp S.MNPQ, đáy MNPQ là hình vuông tâm O và SM vuông góc với đáy. E, F lần lượt là trung điểm của SP, PQ.

- a. Chứng minh $OE \perp (MNPQ)$
- b. Chứng minh $MN \perp (SMQ)$
- c. Chứng minh $MN \perp (OEF)$
- d. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên EF. Chứng minh $OH \perp (SPQ)$

Bài tập

1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm I và có $SA=SB=SC=SD$. Chứng minh rằng:

- a. $SI \perp (ABCD)$
- b. $AC \perp (SBD), BD \perp (SAC)$

2. Cho tứ diện ABCD có AB, AC, AD đôi một vuông góc và K là chân đường vuông góc hạ từ A đến mặt phẳng (BCD). Chứng minh:

- a. K là trực tâm của tam giác BCD
- b. $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$

3. Trên mặt phẳng (α) , cho hình bình hành ABCD. Gọi O là giao điểm của AC và BD, S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng (α) sao cho $SA=SC; SB=SD$. Chứng minh rằng:

- a. $SO \perp (\alpha)$
- b. Nếu trong mặt phẳng (SAB), kẻ SH vuông góc với AB tại H thì AB vuông góc với mặt phẳng (SOH)

