

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ (BUỔI 2)

2. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

Định nghĩa: SGK/128

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$

3. Giới hạn vô cực của hàm số:

Định nghĩa: SGK/129

Một vài quy tắc về giới hạn vô cực: SGK/130, 131.

➤ Một số giới hạn cơ bản:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty, k \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty, k \text{ chẵn}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty, k \text{ lẻ}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^k} = 0 \ (k \in \mathbb{N}^*)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} c = c, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x^k} = 0 \ (k \in \mathbb{N}^*)$

Lưu ý:

- ❖ Việc tính giới hạn hàm số tại vô cực tương tự như giới hạn dãy số đã học.
- ❖ Nếu đề ghi $x \rightarrow \infty$ hay $x \rightarrow \pm\infty$ thì ta xét 2 trường hợp rõ ràng $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$

Ví dụ 1. Tính:

$$a) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x^2 - 3x + 1}{3x^2 + 2x + 3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x+1)^2(1-x)^4}{(2x-2)^5(x+3)}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x^4 + x^3 - 1}{x^4 - 3x^2 + 2}}$$

Giải:

$$a) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x^2 - 3x + 1}{3x^2 + 2x + 3}$$

Chia cả tử và mẫu cho x^2

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x^2 - 3x + 1}{3x^2 + 2x + 3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{6}{3} = 2$$

Chú ý: Với phân thức hữu tỉ, khi $x \rightarrow \pm\infty$ ta đều có duy nhất một kết quả L .

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x+1)^4 (1-x^2)^2}{(2x^3-2)(x+3)^5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x+1)^4 (1-x^2)^2}{(2x^3-2)(x+3)^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left(3 + \frac{1}{x}\right)^4 x^4 \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^2}{x^3 \left(2 - \frac{2}{x^3}\right) x^5 \left(1 + \frac{3}{x}\right)^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(3 + \frac{1}{x}\right)^4 \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^2}{\left(2 - \frac{2}{x^3}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right)^5} = \frac{3^4 (-1)^2}{2 \cdot 1^5} = \frac{81}{2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{2x^4 + x^3 - 1}{x^4 - 3x^2 + 2}}$$

$$\text{Vì: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + x^3 - 1}{x^4 - 3x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^4}}{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^4}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{Nên: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x^4 + x^3 - 1}{x^4 - 3x^2 + 2}} = \sqrt{2}$$

Bài tập áp dụng 1. Tính:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + 6x - x^2}{3x^2 + 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x - 3}{1 + x^2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^3 - 8x + 6}{1 - 2x^2 - 3x^3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 1}{x + x\sqrt{x}}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^4 + 2)(5x^2 + 3)^3}{(25x^5 + x^2 - 7)^2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{x+1}{8x-3}}$$

Ví dụ 2. Tính:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x + 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x + 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}{\sqrt[3]{x^3 - x + 1}}$$

Giải:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overset{|x|}{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}}}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overset{x}{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}}}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1}}{1} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{-\sqrt{1}}{1} = -1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x + 3}}{\sqrt[3]{x^3 - x + 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}}{\sqrt[3]{x^3 \left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x| \sqrt{\left(4 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}}{x \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}}$$

Khi $x \rightarrow +\infty \Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}}{x \cdot \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}}{\sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt[3]{1}} = 1$

Khi $x \rightarrow -\infty \Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}}{x \cdot \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}}{\sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}} = \frac{-\sqrt{1}}{\sqrt[3]{1}} = -1$

GIỚI HẠN DẠNG $\frac{\infty}{\infty}$

Phương pháp: Rút x bậc cao nhất của tử và mẫu ra làm nhân tử chung $\rightarrow$ Rút gọn.

Chú ý: $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & \text{khi } x \geq 0 \\ -x, & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

$$\sqrt[3]{x^3} = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{x^4} = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

Bài tập áp dụng 2. Tính:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{3x - 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 1 + 4x}{\sqrt{4x^2 + 1} + 2 - x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{6x^4 + x + 3}}{\sqrt[3]{5x^3 - 3x + 1}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2} + 1}{\sqrt[3]{1 - x^3}}$$

Ví dụ 3. Tính:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 3x^3 + x - 1}{3x^2 + 2x - 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{5x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 1}$$

Giải:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 3x^3 + x - 1}{3x^2 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)}{x^2 \left(3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \cdot \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}}{3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} \right) = +\infty$$

Vì: • $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}}{3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{3} > 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{5x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^4 \left(5 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^4}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^2 \sqrt{5 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^4}} \right) = +\infty$$

Vì: • $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{5 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^4}} = \sqrt{5} > 0$$

Bài tập áp dụng 3. Tính:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2 - 3x + 2}{x + 3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 4x + 5}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 - 3x^3 + x - 1}}{x + 3}$$

Ví dụ 4. Tính:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} \right)$$

Giải:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + x \sqrt{\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}\right) \right] = +\infty$$

Vì: • $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} \right) = 1 + \sqrt{1} = 2 > 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 - 2x + 2})(x - \sqrt{x^2 - 2x + 2})}{x - \sqrt{x^2 - 2x + 2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 2x + 2)}{x - \sqrt{x^2 - 2x + 2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 2}{x - \sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(2 - \frac{2}{x} \right)}{x + x \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{2}{x}}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}} = \frac{2}{2} = 1$$

Bài tập áp dụng 4. Tính:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3x + \sqrt{16x^2 - 7x + 3} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x - 2} - \sqrt{x^2 + 6} \right)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2} - x \right)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^2 - \sqrt{x^4 - 4} \right)$$