

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Giới hạn hữu hạn

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ khi và chỉ khi $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý kể từ một số hạng nào đó trở đi.

$$- \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - a) = 0$$

2. Giới hạn vô cực

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ khi và chỉ khi u_n có thể lớn hơn một số dương tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

$$- \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$$

Chú ý: thay cho $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$ ta viết $\lim u_n = a$, $\lim u_n = \pm\infty$

3. Các giới hạn đặc biệt

a) $\lim \frac{1}{n} = 0$, $\lim \frac{1}{n^k} = 0$, $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương

b) $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$ $\lim q^n = +\infty$ nếu $|q| > 1$

c) $\lim c = c$ (c là hằng số)

4. Định lý về giới hạn hữu hạn

- Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì

$$\lim(u_n + v_n) = a + b, \quad \lim(u_n - v_n) = a - b$$

$$\lim u_n \cdot v_n = a \cdot b, \quad \lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} (b \neq 0)$$

- Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$

5. Định lý liên hệ giữa giới hạn hữu hạn và giới hạn vô cực

- Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$

- Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n \cdot v_n = +\infty$

- Nếu $\lim u_n = a > 0$ và $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$

6. Cấp số nhân lùi vô hạn: là cấp số nhân có công bội q thỏa $|q| < 1$

Công thức tính tổng S của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n)

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1 - q}$$

B. BÀI TẬP

Bài 1. Tính các giới hạn

- a. $\lim \frac{n^2 + 3n - 1}{2n^2 + 5}$ b. $\lim \frac{n^2 + 3n - 1}{2n^4 + 5}$ c. $\lim \frac{n^3 + 3n - 1}{2n^2 + 5}$
- d. $\lim (n^3 + 2n - 5)$ e. $\lim (1 - 2n - n^3)$ f. $\lim \frac{(n-1)(1+2n)(3-n)}{(2n+3)(3-n^2)}$
- g. $\lim \frac{(n-1)^2(1+2n)^3(3-n)^4}{(2n^3+3)(3-n^2)^3}$ h. $\lim \frac{(n-1)^2(1+2n)^3(3-n)^4}{(2n^4+3)(3-n^2)^3}$
- i. $\lim \frac{(n^2-1)^2(1+2n)^3(3-n)^4}{(2n^3+3)(3-n^2)^3}$ j. $\lim \frac{2^n + 3^n - 5 \cdot 4^n}{5^n - 3^n}$ k. $\lim \frac{2^n + 5^{n+1} - 5 \cdot 4^{n-1}}{5^{n+2} - 3^{n+3}}$
- l. $\lim \frac{\sqrt{2n^2 - n} + 3n}{n + \sqrt{n^2 + 3n}}$ m. $\lim \frac{\sqrt{2n^2 - n} + 3n}{n^2 + \sqrt{n^2 + 3n}}$ n. $\lim \frac{\sqrt{2n^4 - n} + 3n}{n + \sqrt{n^2 + 3n}}$
- o. $\lim (\sqrt{n^2 + 3n} - n)$ p. $\lim (\sqrt{4n^2 + n - 3} - 2n)$ q. $\lim (\sqrt{9n^2 - 3n + 1} - 3n + 2)$
- r. $\lim (\sqrt[3]{n^3 - 5n + 2} - n + 1)$ s. $\lim \frac{\sqrt{n^2 + 2n - 1} - n}{n - \sqrt{n^2 - 3n}}$ t. $\lim \frac{\sqrt{4n^2 + 2n - 1} - 2n}{3n - \sqrt{9n^2 - 1}}$

Bài 2. Tính các giới hạn sau:

- a. $\lim \frac{4 \cdot 3^n + 7^n}{2 \cdot 5^n + 7^n}$ b. $\lim \frac{4 \cdot 3^n + 6^{n+1}}{5 \cdot 2^n - 6^n}$ c. $\lim \frac{4 \cdot 2^{n+1} - 10^{n+2}}{3 \cdot 5^n - 10^n}$
- d. $\lim \frac{3^n + 4}{3^n - 2 \cdot 5^n}$ e. $\lim \frac{3^{n+2} + 4}{3^{n+1} - 2 \cdot 5^{n+1}}$ f. $\lim \frac{5^n + 4 \cdot 5^{n+1}}{3^{n+1} - 2 \cdot 5^{n+3}}$

Bài 3. Tính các giới hạn sau:

- a. $\lim (\sqrt{n^2 + n} - n)$ b. $\lim (\sqrt{n^2 - 2n - 1} - \sqrt{n^2 - 7n + 3})$
- c. $\lim (\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + n})$ d. $\lim (\sqrt{n^2 - 3n + 1} - n - 1)$
- e. $\lim (\sqrt{n^2 - 3n + 1} - n + 2)$ f. $\lim (2n - 3 - \sqrt{4n^2 - 3n + 3})$
- g. $\lim (\sqrt{25n^2 - 7n + 1} - 5n - 1)$ h. $\lim (\sqrt{4n^2 - 3n + 7} - 2n + 1)$

i. $\lim(\sqrt{9n^2 + n} - 3n)$

j. $\lim(\sqrt[3]{n^3 + 1} - n)$

k. $\lim(\sqrt[3]{n^3 - 2n^2} - n)$

l. $\lim(\sqrt[3]{n^3 + n^2} - \sqrt{n^2 + 2n})$

m. $\lim(\sqrt{n^2 + 4n} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2})$

n. $\lim(\sqrt[3]{8n^3 + n^2 + 1} - \sqrt{4n^2 + 2n - 3})$

Bài 4. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim(n^2 + 5n - 6)$

b. $\lim(-7n^2 + n - 9)$

c. $\lim(2n^3 + 7n - 1)$

d. $\lim(2 + 3n - n^2)$

e. $\lim\left(n + \sqrt{n^2 + 3n + 5}\right)$

f. $\lim\left(\sqrt{n^2 + 3n} + \sqrt{3n^2 + 2n - 1}\right)$