**ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH**

***Chương I* . HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC**

***Bài 1.* HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

|  |  |
| --- | --- |
| **Hàm số y = sin x**  - Tập xác định : D= R  - Tập giá trị :  - Hàm số lẻ  - Hàm số tuần hoàn,chu kỳ: T = 2π  - sin x = 1  - sin x = 0  - sin x = – 1  - sin[f(x)] xác định khi f(x) xác định. | **Hàm số y = cos x**  - Tập xác định : D= R  - Tập giá trị :  - Hàm số chẵn  - Hàm số tuần hoàn,chu kỳ: T = 2π  - cos x = 1  - cos x = 0  - cos x = – 1  - cos[f(x)] các định khi f(x) xác định. |
| **Hàm số y = tan x**  - Tập xác định :D= R \  - Tập giá trị : R  - Hàm số lẻ  - Hàm số tuần hoàn,chu kỳ : T = π  **-** tan[f(x)] xác định khi f(x) xác định và | **Hàm số y = cot x**  - Tập xác định :  - Tập giá trị : R  - Hàm số lẻ  - Hàm số tuần hoàn,chu kỳ : T = π  - cot[f(x)] xác định khif(x) xác định và |

**B. Bài tập**

**Bài 1.** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

**01.** y = **02.**  **03.** y = cot  **04.** 



**05.**  **06.** **07.**  **08.** 

**09.** **10.**  **11.** **12.** 

**13.**  **14**.  **15.** 

**16**.  **17**.y=  **18**. 

**Bài 2.** Xác định tính chẵn, lẻ của các hàm số

**1.**  **2.**  **3.**  **4.** 

**5.**  **6.**  **7.**  **8.** 

**Bài 3.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau:  
 **01.** y = 3 +2 sin x **02.** y = 2 - 3 cos3x **03.** y= -4sinx +3

**04.** y= - 3sin() + 2 **05.** y =  **06**. y = 

**07.**  **08.**  **09.** y = 3 – 4 sin2xcos2x

**10.** y = sin4x + cos4x **11.** y = sin6x + cos6x **12.** y = sin4x - 2cos2x + 5

**13.** y = 2 sin2x – cos 2x **14.** y =  **15.**

**C. Bài tập tự luyện**

**Bài 4.** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

**01.**  **02.**  **03.** 

**04.**  **05.**   **06.**   
 **07.**   **08.**  **09.** 

**10.**  **11.** **12.** 

**Bài 5.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau:  
 **01.** y = 3 -2 sin5x **02.** y = -2 - 3cos3x **03.** y= -4sin2x -3

**04.** y= - 3sin() + 2 **05.** y =  **06.** y = 

**07.** **08.**  **09.** y = 3 – 4 sin2xcos2x

**10.** y = sin42x + cos42x **11.** y = sin63x + cos63x **12.** y = sin4x - 2cos2x -2

**13.** y = -2 sin2x – cos 2x **14.** y = - **15.**

***Bài 2.* PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN**

***A.* Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| **1. Phương trình sin x = a**  - phương trình vô nghiệm  - thay a = sin α sin x = sin α ⇔  - sin x = a ⇔  - sin x = sin αo  ⇔  ***+ Các trường hợp đặc biệt:***  - sin x = 1  - sin x = 0  - sin x = – 1  **- sin[f(x)]=sin[g(x)** |
| **2. Phương trình cos x = a**  - phương trình vô nghiệm  - thay a = cos α , cos x = cos α ⇔ x = ± α + k2π (k∈Z)  - cos x = a ⇔ x = ± arcos a + k2π (k∈Z)  - cos x = cos βo  ⇔ x = ± βo + k360o (k∈Z)  ***+ Các trường hợp đặc biệt:***  - cos x = 1  - cos x = 0  - cos x = – 1  - **cos[f(x)]=cos[g(x)]** |
| **3. Phương trình tan x = a** ( x ≠  - Thay a = tan α , ta có pt: tan x = tanα ⇔ x = α + kπ (k∈Z)  - Nếu a là giá trị không đặc biệt thì x = arctan a + kπ (k∈Z)  - tan x = tan βo  ⇔ x = βo + k180o (k∈Z)  - **tan[f(x)]=tan[g(x)]** |
| **4. Phương trình cot x = a** ( x ≠  - Thay a = cot α , ta có pt: cot x = cotα ⇔ x = α + kπ (k∈Z)  - Nếu a là giá trị không đặc biệt thì x = arccot a + kπ (k∈Z)  - cot x = cot βo  ⇔ x = βo + k180o (k∈Z)  - **cot[f(x)] = cot[g(x)]** ⇔ f(x) = g(x) + kπ (k∈Z) |

***B.* Bài tập**

**Bài 6.** Giải các phương trình:

**01.** **02**. ** 03.**  **04.**

**05.** **06**.  **07.  08.** 

**09.**  **10.**  **11.**  **12.** 

**13.** **14.**  **15.** 

**Bài 7.** Giải các phương trình:

**1.**  () **2.**  ()

**3. ** ()  **4.** cos 2x = ()



**5.**  ()  **6.**  ()

**7.** cot (3x – 45o) = -1 () **8.** cot =1 (****

**C. Bài tập tự luyện**

**Bài 8.** Giải các phương trình:

**01.** **02**.** 03.** **04.**

**05.** **06**.  **07. **

**08.**   **09.**  **10.** 

**11.**  **12.**  **13.**  **14.** 

**Bài 9.** Giải các phương trình:

**1.** () **2.** ()

**3. **()  **4.** cos 2x =  ()

**5.** ()  **6.** ()

**7.** cot (3x – 45o) = -1 () **8.** cot =1(****

**PHƯƠNG TRÌNH BIẾN ĐỔI VỀ PTLG CƠ BẢN**

**Bài 10.** Giải các phương trình sau:

**1.** **2.**  **3.**  **4.**

**5.**  **6.** **7.** cos 2x tan x = 0 **8.** sin 3x cot x = 0

**9.**   **10.** tan (x – 30o) cos (2x – 150o) = 0

**Bài 11.** Giải các phương trình sau:

**01.** sin 3x – cos 5x = 0 **02.** sin 3x = cos 2x

**03.** sin x + cos 2x = 0 **04.** cos 4x + cos 3x = 0

**05.**sin 2x+ cos x = 0 **06.** tan 3x + tan x = 0

**07.**  **08.** tan 3x + tan 

**09.** sin 6x + sin 4x = 0 **10.** tan (3x + 2) - cot 2x = 0

**Bài 12.** Giải các phương trình sau:

**01.** sinx + sin3x + sin5x = 0 **02.**

**03.** **04.**

**05.** **06.**

**07.** **08.**cos7x + sin8x = cos3x – sin2x

**C. Bài tập tự luyện**

**Bài 13.** Giải các phương trình sau:

**01.**  **02.**  **03.** 

**04.**  **05.**  **06.** 

**07.** cos 3x tan (x+1) = 0 **08.** sin 4x cot x = 0  **09.** 

**10.** tan (-x + 30o) cosx = 0  **11.** sin 2x – cos 3x = 0 1**2.** sin5x +cos2x = 0

**13.** cos2x + cos3x = 0  **14.** 

**15.**  **16.** 

**17.**  **18.** tan 3x -+cot



**19.**  **20.** 

**21.** sin2x + sin4x + sin6x = 0 **22.**

**23.**  **24.**

**25.**   **26.**

**27.**  **28.**cos5x + sin6x = cos3x – sin2x

***Bài 3.* MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

**1. Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác :**

- Dạng phương trình : at + b = 0

trong đó : a và b là các hằng số , a ≠ 0

t là một trong các hàm số lượng giác

- Cách giải : đưa về phương trình lượng giác cơ bản

**2. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác :**

- Dạng phương trình : at2 + bt + c = 0

trong đó : a , b , c là các hằng số , a ≠ 0 và t là một trong các hàm số lượng giác

- Cách giải :

+ giải phương trình bậc hai tìm t

Lưu ý : nếu t = sin x , t = cos x thì – 1 ≤ t ≤ 1

+ giải các phương trình lượng giác cơ bản

**3. Phương trình bậc nhất đối với sin x và cos x :**

- Dạng phương trình : a sin x + b cos x = c (1)

trong đó : a , b , c là các hằng số , a ≠ 0 , b ≠ 0

- Cách giải : đưa về phương trình cơ bản của sin hoặc cos

(1) ⇔ 

 với cos α = , sin α =



- Điều kiện để pt có nghiệm**:** 

**4. Phương trình đẳng cấp bậc 2 đối với sin và cos:**

- Dạng phương trình: 

+ Kiểm tra cosx =0  có phải là nghiệm của pt hay không

+ Xét . Chia 2 vế của phương trình cho , đưa về phương trình bậc hai theo tanx:



***B.*Bài tập**

**PHƯƠNG TRÌNH THEO MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC**

**Bài 14.** Giải các phương trình sau:

**1.** 2 sinx – = 0 **2. **  **3.**



**4.** **5.** ** 6.** tan 2x – 3 = 0



**Bài 15.** Giải các phương trình sau:

**01.**  **02.**



**03.** **04.**



**05.**  **06.**



**07.**  sin x – cos 2x – 2 = 0 **08.**



**09.**  **10.** 7 sin x + cos 2x = 6

**11.**  **12.** tan x + cot x = 2

**13.** tan x – 2 cot x + 1 = 0 **14.** 

 **16.** 

**PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI SINX VÀ COSX**

**Bài 16.** Giải các phương trình sau:

**01.** **02.** 

**03.** **04.** 



**05.** **06.**



**07.**  **08.**  

**09.**  **10.** 

**11**. **12.** 5 cos 2x + 12 sin 2x – 13 = 0

**PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP BẬC HAI ĐỐI VỚI SINX VÀ COSX**

**Bài 17.** Giải các phương trình sau:

**01.**  **02.** 4cos2x + sinx.cosx + 3sin2x – 3 = 0



**03.**   **04.** 

**05.**   **06.** 

**07.** **08.** 



**09.**  **10.** 

**11.** **12.** 



**13**.  **14.**



**C. Bài tập tự luyện**

**Bài 18.** Giải các phương trình sau:

**01.** 2 sinx +  = 0 **02. ** **03.** 

**04.**  **05.** ** 06.**  tan 2x + 3 = 0

**07.**  **08.** 

**09.**  **10.** 

**11.**  **12.** 

**13.**  sin2 x – cos 4x – 2 = 0 **14.** 

**15.**  **16.** 7 sin3x + cos6x = 6

**17.**  **18.** tan2 x + cot2 x = 2

**19.** tan5 x – 2 cot 5x + 1 = 0 **20.** 

 **22.** 

**23.** **24.** 

**25.**   **26.** 

**27.** **28.** 

**29.**  **30.**  

**31.** **32.** 

**33**. **34.** 5 cos 2x - 12 sin 2x – 13 = 0

**35.**  **36.** 

**37.**  **38.** 

**39.**  **40.** 

**41**.  **42.** 

**43.**  **44.** 

**TỔNG HỢP**

**Bài 19.** Giải các phương trình sau:

**01.**  **02.** 



**03.**  **04.**



**05.**  **06.** 

**07.**  **08.** 

**09.**  **10.** 

**11.**  **12.** 

**13.**  **14.** 

**15.** 

**16.** 

**17.**  **18.** 

**19.**  **20.** 

**Chương II . TỔ HỢP- XÁC SUẤT**

**Bài 1. QUY TẮC ĐẾM, HOÁN VỊ, TỔ HỢP, CHỈNH HỢP**

**A*.* Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| **I. Quy tắc đếm**  **1. Quy tắc cộng*:***Giả sử công việc có thể tiến hành theo một trong hai phương án A và B. Phương án A có thể thực hiện bởi n cách; phương án B có thể thực hiện bởi m cách. Khi đó, công việc được thực hiện theo n + m cách.  **2. Quy tắc nhân:** Giả sử công việc bao gồm hai công đoạn A và B. Công đoạn A có thể thực hiện bởi n cách; công đoạn B có thể thực hiện bởi m cách. Khi đó, công việc được thực hiện bởi n.m cách.  **II. Hoán vị – Chỉnh hợp – Tổ hợp**  **1. Hoán vị:**  **a. Định nghĩa:** Cho tập A có n phần tử. Mỗi sự sắp xếp của n phần tử đó theo một thứ tự định trước là một phép hoán vị các phần tử của tập A.  **b. Định lý:** Số phép hoán vị của tập hợp có n phần tử ,kí hiệu là Pn, Pn = n! = 1.2.3…n  **2. Chỉnh hợp:**  **a. Định nghĩa:** Cho tập hợp A có n phần tử. Xét số  mà. Khi lấy ra k phần tử trong số n phần tử rồi đem sắp xếp k phần tử đó theo một thứ tự định trước, ta được một phép chỉnh hợp chập k của n phần tử.  **b. Định lý:** Số chỉnh hợp chập k của n phần tử,kí hiệu là  .  **3. Tổ hợp:**  **a. Định nghĩa:** Cho tập hợp A có n phần tử và số  mà . Một tập hợp con của A có k phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.  **b. Định lý:** Số tổ hợp chập k của n phần tử, kí hiệu là    **c. Hai tính chất cơ bản của tổ hợp:** |

**B. Bài tập**

**01.** Một trung tâm tuyển sinh đại học có 5 cổng. Có bao nhiêu cách chọn để một thí sinh bắt

buộc vào một cổng và ra ở một cổng khác.

**02.** Ông X vào siêu thị để mua một áo sơ mi, theo cỡ 40 hoặc 41. Cỡ 40 có 3 màu khác nhau,

cỡ 41 có 4 màu khác nhau. Hỏi ông X có bao nhiêu cách chọn?

**03.** Ông X vào siêu thị để mua một bộ quần áo, quần theo size 32 hoặc 33, size 32 có 2

màu,size 33 có 3 màu. Áo sơ mi theo size 40 hoặc 41, size 40 có 3 màu khác nhau, size 41

có 4 màu khác nhau. Hỏi ông X có bao nhiêu cách chọn?

**04.** Có 4 con đường nối liền thành phố A và thành phố B, 2 con đường nối liền thành phố B và

C, 3 con đường nối liền thành phố C và D. Hỏi:

**a.** Có bao nhiêu cách đi từ A đến D mà qua B và C chỉ một lần?

**b.** Có bao nhiêu cách đi từ A đến D rồi quay lại A?

**05.** Có bao nhiêu cách chọn một lớp trưởng, một lớp phó, một thủ quỹ từ một lớp có 40 em?

**06.** Có bao nhiêu cách xếp 30 học sinh vào 30 cái ghế?

**07.** Có bao nhiêu cách sắp xếp 15 em học sinh thành hàng ngang trong đó có 4 em phải đứng

cạnh nhau?

**08**. Có 4 quyển sách toán, 5 quyển sách vật lý và 6 quyển sách hóa học. Hỏi có bao nhiêu cách

sắp xếp số sách trên lên kệ dài nếu:

**a.** Các quyển sách được xếp tùy ý **b.** Các quyển sách cùng môn được xếp kề nhau.

**09**. Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 nam và 5 nữ vào một ghế dài sao cho:

**a.** Nam nữ ngồi bất kỳ **b.** Nam,nữ ngồi xen kẽ

**c**. Hai nữ ngồi ở hai đầu **d.** Hai đầu là nam và nữ.

**10**. Một lớp có 45 học sinh gồm 25 nữ và 20 nam. Hỏi có bao nhiêu cách chọn đội văn nghệ

gồm:

**a**. 6 học sinh bất kỳ **b.** 6 học sinh trong đó phải có 4 nữ.

**c.** 6 học sinh có ít nhất 2 nữ

**11.** Một cái hộp có 5 quả cầu trắng, 4 quả cầu đỏ, 6 quả cầu xanh. Từ cái hộp trên, có bao

nhiêu cách chọn ra:

**a.** 6 quả cầu  **b.** 6 quả cầu trong đó có đúng 2 quả cầu trắng

**c.** 6 quả cầu trong đó có ít nhất 3 quả cầu trắng. **d.** 4 quả cầu có đủ 3 màu.

**12.** Một bình đựng 12 viên bi, trong đó có 7 bi vàng và 5 bi đỏ. Lấy ra 5 viên bi. Hỏi có bao

nhiêu cách chọn nếu:

**a.** 5 viên tùy ý. **b.** Có đúng 2 bi đỏ. **c.** Có nhiều nhất hai bi đỏ. **d.** Có ít nhất 3 bi đỏ.

**13**. Một lớp có 25 em học sinh nam và 25 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách chọn:

**a.** 1 ban cán sự lớp gồm 1 lớp trưởng, 1 lớp phó, 1 thủ quỹ và 4 uỷ viên

**b.** 1 ban văn nghệ gồm 5 em trong đó có đúng 2 em nữ

**c.** Một đội trực sao đỏ gồm 5 em sao cho có ít nhất 3 em nam

**d.** Một đội trực nhật gồm 4 em sao cho có nhiều nhất là 2 em nữ

**14.**Cho các số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Từ các chữ số trên, có thể lập được bao nhiêu :

**a.** Số có 5 chữ số **b.** Số có 5 chữ số khác nhau

**c.** Số lẻ gồm 4 chữ số khác nhau **d.** Số gồm 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 5.

**e.** Số gồm 4 chữ số và nhỏ hơn 5000.

**15.**Cho các số 0;1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Từ các chữ số trên, có thể lập được bao nhiêu :

**a.** Số có 5 chữ số **b.** Số có 5 chữ số khác nhau

**c.** Số lẻ gồm 4 chữ số khác nhau **d.** Số lẻ gồm 4 chữ số khác nhau

**e.** Số gồm 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 5.

**f.** Số gồm 4 chữ số và nhỏ hơn 5000..

**16.** Cho các số 0,1,2,3,4,5,6. Từ các số trên, có thể lập được bao nhiêu số:

**a.** Số gồm 4 chữ số khác nhau **b.** Số lẻ gồm 5 chữ số khác nhau

**c.** Số chẵn gồm 4 số khác nhau **d.** Số gồm 4 số khác nhau và nhỏ hơn 3500.

**17.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 2 chữ số mà cả hai đều là số chẵn?

**18.** Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ có 6 chữ số khác nhau?

**19.** Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 6 chữ số khác nhau?

**20.**Trong mặt phẳng cho 7 điểm A, B, C, D, E, M, N khác nhau. Có thể vẽ được bao nhiêu

đoạn thẳng,bao nhiêu vectơ từ các điểm đó?

**21.**Cho 7 điểm phân biệt không tồn tại ba điểm thẳng hàng. Từ 7 điểm trên có thể lập được

bao nhiêu tam giác?

**22.** Một tập thể gồm 6 nam và 8 nữ. Có bao nhiêu cách chọn chọn 1 tổ công tác gồm:

**a.** 6 người **b.** 6 người trong đó có 1 nhóm trưởng

**c.** 6 người, trong đó có 1 đội trưởng và 1 đội phó **d.** 6 người trong đó có cả nam lẫn nữ

**e.** 6 người sao cho có đúng 3 nam **f.** 6 người sao cho có ít nhất 2 nữ

**g.** 6 người, trong đó có 1 đội trưởng và luôn có mặt anh A

**h.** 6 người , trong đó có 1 tổ trưởng và anh A -chị B không đồng thời có mặt.

**23.** Có bao nhiêu cách xếp 5 bạn nam và 5 bạn nữ vào 10 chiếc ghế được kê thành hàng

ngang, sao cho:

**a.** Nam và nữ ngồi xen kẽ. **b.** Các bạn nam ngồi liền kề.

**24.** Trong mặt phẳng có bao nhiêu hình chữ nhật được tạo thành từ bốn đường thẳng song

song với nhau và năm đường thẳng vuông góc với bốn đường thẳng song song đó?

**25.** Giải các phương trình, bất phương trình và hệ phương trình

**01.** **02.**  **03.**

**04.  05.  06. **

**07.  08.  09. **

**10. 11.  12. **

**13.  14.  15. **

**16.  17.  18. **

**26.** Chứng minh rằng:

**1.**  **2.** 

**3.**  **4.** 

**5.**  **6.**  **7.** 

**C. Bài tập tự luyện**

**27.** Một trung tâm tuyển sinh đại học có 6 cổng. Có bao nhiêu cách chọn để một thí sinh bắt buộc

vào một cổng và ra ở một cổng khác.

**28.** Ông X vào siêu thị để mua một áo sơ mi, theo cỡ 40 hoặc 41. Cỡ 40 có 4 màu khác nhau,

cỡ 41 có 5 màu khác nhau. Hỏi ông X có bao nhiêu cách chọn?

**29.** Ông X vào siêu thị để mua một bộ quần áo, quần theo size 32 hoặc 33, size 32 có 3 màu,size

33 có 4 màu. Áo sơ mi theo size 40 hoặc 41, size 40 có 3 màu khác nhau, size 41 có 4 màu

khác nhau. Hỏi ông X có bao nhiêu cách chọn?

**30.** Có 4 con đường nối liền thành phố A và thành phố B, 3 con đường nối liền thành phố B và C,

3 con đường nối liền thành phố C và D. Hỏi:

**a.** Có bao nhiêu cách đi từ A đến D mà qua B và C chỉ một lần?

**b.** Có bao nhiêu cách đi từ A đến D rồi quay lại A?

**31.** Có bao nhiêu cách chọn một lớp trưởng, một lớp phó, một thủ quỹ từ một lớp có 45 em?

**32.** Có bao nhiêu cách xếp 40 học sinh vào 40 cái ghế?

**33.** Có bao nhiêu cách sắp xếp 20 em học sinh thành hàng ngang trong đó có 5 em phải đứng cạnh

nhau?

**34**. Có 5 quyển sách toán, 6 quyển sách vật lý và 8 quyển sách hóa học. Hỏi có bao nhiêu cách sắp

xếp số sách trên lên kệ dài nếu:

**a.** Các quyển sách được xếp tùy ý **b.** Các quyển sách cùng môn được xếp kề nhau.

**35**. Có bao nhiêu cách sắp xếp 6 nam và 6 nữ vào một ghế dài sao cho:

**a.** Nam nữ ngồi bất kỳ **b.** Nam,nữ ngồi xen kẽ

**c**. Hai nữ ngồi ở hai đầu **d.** Hai đầu là nam và nữ.

**36**. Một lớp có 45 học sinh gồm 20 nữ và 25 nam. Hỏi có bao nhiêu cách chọn đội văn nghệ

gồm:

**a**. 6 học sinh bất kỳ **b.** 6 học sinh trong đó phải có 4 nữ. **c.** 6 học sinh có ít nhất 2 nữ

**37.** Một cái hộp có 5 quả cầu trắng, 6 quả cầu đỏ, 7 quả cầu xanh. Từ cái hộp trên, có bao nhiêu

cách chọn ra:

**a.** 6 quả cầu  **b.** 6 quả cầu trong đó có đúng 2 quả cầu trắng

**c.** 6 quả cầu trong đó có ít nhất 3 quả cầu trắng. **d.** 4 quả cầu có đủ 3 màu.

**38.** Một bình đựng 12 viên bi, trong đó có 8 bi vàng và 4 bi đỏ. Lấy ra 5 viên bi. Hỏi có bao

nhiêu cách chọn nếu:

**a.** 5 viên tùy ý. **b.** Có đúng 3 bi đỏ. **c.** Có nhiều nhất hai bi đỏ. **d.** Có ít nhất 1 bi đỏ.

**39**. Một lớp có 20 em học sinh nam và 25 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách chọn:

**a.** 1 ban cán sự lớp gồm 1 lớp trưởng, 1 lớp phó, 1 thủ quỹ và 4 uỷ viên

**b.** 1 ban văn nghệ gồm 5 em trong đó có đúng 2 em nữ

**c.** Một đội trực sao đỏ gồm 5 em sao cho có ít nhất 3 em nam

**d.** Một đội trực nhật gồm 4 em sao cho có nhiều nhất là 2 em nữ

**40.**Cho các số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8. Từ các chữ số trên, có thể lập được bao nhiêu :

**a.** Số có 5 chữ số **b.** Số có 5 chữ số khác nhau

**c.** Số lẻ gồm 4 chữ số khác nhau **d.** Số gồm 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 5.

**e.** Số gồm 4 chữ số và nhỏ hơn 5000.

**41.**Cho các số 0;1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8. Từ các chữ số trên, có thể lập được bao nhiêu :

**a.** Số có 5 chữ số **b.** Số có 5 chữ số khác nhau

**c.** Số lẻ gồm 4 chữ số khác nhau **d.** Số lẻ gồm 4 chữ số khác nhau

**e.** Số gồm 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 5.

**f.** Số gồm 4 chữ số và nhỏ hơn 5000..

**42.**Cho các số 0;1;2;3;4;5;6;7;8. Từ các số trên, có thể lập được bao nhiêu số:

**a.** Số gồm 4 chữ số khác nhau **b.** Số lẻ gồm 5 chữ số khác nhau

**c.** Số chẵn gồm 4 số khác nhau **d.** Số gồm 4 số khác nhau và nhỏ hơn 3500.

**43.**  Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số mà cả hai đều là số chẵn?

**44.** Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ có 5 chữ số khác nhau?

**45.** Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 5 chữ số khác nhau?

**46.**Trong mặt phẳng cho 8 điểm A, B, C, D, E, F, M, N khác nhau. Có thể vẽ được bao nhiêu đoạn

thẳng,bao nhiêu vectơ từ các điểm đó?

**47.**Cho 6 điểm phân biệt không tồn tại ba điểm thẳng hàng. Từ 6 điểm trên có thể lập được bao

nhiêu tam giác?

**48.** Một tập thể gồm 6 nam và 10 nữ. Có bao nhiêu cách chọn chọn 1 tổ công tác gồm:

**a.** 6 người **b.** 6 người trong đó có 1 nhóm trưởng

**c.** 6 người, trong đó có 1 đội trưởng và 1 đội phó **d.** 6 người trong đó có cả nam lẫn nữ

**e.** 6 người sao cho có đúng 3 nam **f.** 6 người sao cho có ít nhất 2 nữ

**g.** 6 người, trong đó có 1 đội trưởng và luôn có mặt chị A

**h.** 6 người , trong đó có 1 tổ trưởng và chị A, anh B không đồng thời có mặt.

**49.** Có bao nhiêu cách xếp 6 bạn nam và 7 bạn nữ vào 10 chiếc ghế được kê thành hàng ngang,

sao cho:

**a.** Nam và nữ ngồi xen kẽ. **b.** Các bạn nữ ngồi liền kề.

**50.** Trong mặt phẳng có bao nhiêu hình chữ nhật được tạo thành từ năm đường thẳng song song

với nhau và sáu đường thẳng vuông góc với năm đường thẳng song song đó?

**51.** Giải các phương trình, bất phương trình và hệ phương trình

**01.** **02.**  **03.**

**04.  05.  06. **

**07.  08.  09. **

**10. 11.  12. **

**13.  14. **

**18. 19.**

**20. 21.**

**Bài 2. NHỊ THỨC NEWTON**

1. **Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| Khai triển nhị thức Newton:    ***Nhận xét:***   * Trong khai triển nhị thức Newton có n + 1 số hạng. * Trong một số hạng thì tổng số mũ của a và b bằng n. * Các hệ số của khai triểu nhị thức cách đếu số hạng đầu và cuối thì bằng nhau. * Số hạng tổng quát thứ k + 1 kí hiệu Tk+1 thì: |

**B. Bài tập**

**52.** Viết các khai triển của các nhị thức:

**a.**  **b. c.  d. e. f. **

**g. h. i. j. k. l.**

**53.** Tìm số hạng chứa x3 trong khai triển (11 + x)11.

**54.** Hãy tìm hệ số của  trong khai triển của :.

**55*.*** Tìm số hạng chứa  trong khai triển 

**56*.*** Tìm số hạng chứa  trong khai triển .

**57.** Tìm số hạng không chứa x trong khai triển:

**a.** **b.** **c.** **d.**  **e.** 



**f.** **g.**  **h.**  **i.**  **d.** 

**58.** Biết hệ số chứa  trong khai triển  là 90. Tìm n.

**59 .**

**a.** Tìm số hạng  không chứa x trong khai triển nhị thức , biết rằng 

**b.** Tìm hệ số của số hạng số hạng chứa trong khai triển của  biết 

**c.** Tìm hệ số của trong [khai triển nhị thức Niutơn](http://onthi.com/?a=OT&ot=LT&hdn_lt_id=899) của , biết rằng 

**60.** Tìm:

**a.** Hệ số của số hạng chứa trong khai triển:





**b.** Hệ số của số hạng chứa  trong khai triển:



**c.** Tìm hệ số của số hạng chứa x10 trong khai triển .

**61. Tính tổng:**

**a.**  **b.** 







**C. Bài tập tự luyện**

**62.** Viết các khai triển của các nhị thức:

**a.**  **b. c.  d.**

**e. f.  g. h.**

**63.** Tìm số hạng chứa x3 trong khai triển (10 + x)11.

**64.** Hãy tìm hệ số của  trong khai triển của :.

**65*.*** Tìm số hạng chứa  trong khai triển 

**66*.*** Tìm số hạng chứa  trong khai triển .

**67.** Tìm số hạng không chứa x trong khai triển:

**a.**  **b.** **c.** **d.**  **e.** 

**f.**  **g.**  **h.**  **i.**  **d.** 

**68 .**

**a.** Tìm số hạng  không chứa x trong khai triển nhị thức , biết rằng 

**b.** Tìm hệ số của số hạng số hạng chứa trong khai triển của  biết 

**c.** Tìm hệ số của trong [khai triển nhị thức Niutơn](http://onthi.com/?a=OT&ot=LT&hdn_lt_id=899) của , biết rằng 

**69.** Tìm:

**a.** Hệ số của số hạng chứa  trong khai triển:



**b.** Hệ số của số hạng chứa  trong khai triển:



**c.** Tìm hệ số của số hạng chứa x10 trong khai triển .

**70. Tính tổng:**

**a.**  **b.** 







**Bài 4. PHÉP THỬ VÀ BIẾN CỐ**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| **I. Phép thử**  Phép thử ngẫu nhiên là phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của nó mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó.  **II.Không gian mẫu**  Không gian mẫu là tập hợp các kết quả xảy ra của một phép thử và được kí hiệu là .  **III. Biến cố**  - Biến cố là một tập con của không gian mẫu  - Tập  là biến cố không thể(biến cố không), tập  là biến cố chắc chắn.  **IV. Phép toán trên các biến cố**  **-** Tậplà biến cố đối của biến cố A và được kí hiệu là .  **-**  gọi là giao của các biến cố A và B, gọi là hợp của các biến cố A và B.  - Nếu thì A và B xung khắc. |

**B. Bài tập**

**71.** Gieo 1 đồng xu cân đối và đồng chất và quan sát sự xuất hiện mặt sấp (S), mặt ngửa (N).

Hãy mô tả không gian mẫu

**72.** Gieo 1 đồng xu cân đối và đồng chất 2 lần và quan sát sự xuất hiện mặt sấp (S), mặt ngửa (N)

**a.** Mô tả không gian mẫu

**b.** Xác định các biến cố:

A: “ Lần gieo đầu xuất hiện mặt ngửa ”.

B: “ Hai lần xuất hiện các mặt như nha”.

**73.** Gieo 1 đồng xu 3 lần và quan sát sự xuất hiện mặt sấp (S), mặt ngửa (N)

**a.** Mô tả không gian mẫu

**b.** Xác định các biến cố:

A: “ Lần gieo đầu xuất hiện mặt ngửa “.

B: “ Hai lần xuất hiện các mặt như nhau “.

C: “ Đúng hai lần xuất hiện mặt ngửa “.

D: “ Ít nhất một lần xuất hiện mặt ngửa “.

**74.** Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất, quan sát số chấm xuất hiện.

**a.** Mô tả không gian mẫu.

**b.** Xác định các biến cố sau:

A: “ Số chấm trong lần gieo là số chẵn ”

B: “ Số chấm trong lần gieo là số lẻ”

**75.** Một con súc sắc được gieo 2 lần, quan sát số chấm xuất hiện.

**a.** Mô tả không gian mẫu.

**b.** Xác định các biến cố sau:

A: “ Tổng số chấm trong 2 lần gieo bằng 10 ”

B: “ Số chấm trong lần gieo thứ 2 bằng số chấm của lần gieo đầu tiên ”.

**76.** Một con súc sắc được gieo 3 lần, quan sát số chấm xuất hiện.

**a.** Mô tả không gian mẫu.

**b.** Xác định các biến cố sau:

A: “ Tổng số chấm trong 3 lần gieo bằng l5 ”

B: “ Số chấm trong lần gieo thứ 2 bằng tổng số chấm của lần gieo đầu tiên và lần

gieo thứ 3”.

**77.** Gieo 1 con súc sắc, sau đó gieo 1 đồng tiền quan sát sự xuất hiện số chấm xuất hiện trên con súc sắc và sự xuất hiện mặt sấp (S), mặt ngửa (N) của đồng tiền.

**a.** Mô tả không gian mẫu

**b.** Xác định các biến cố sau:

A: “ Con súc sắc xuất hiện mặt lẻ chấm và đồng tiền xuất hiện mặt sấp”.

B: “ Con súc sắc xuất hiện mặt chẵn chấm và đồng tiền xuất hiện mặt ngửa”.

C: “ Mặt 5 chấm xuất hiện “

**78.** Gieo một con súc sắc 2 lần:

**a.** Mô tả không gian mẫu.

**b.** Xác định các biến cố:

A: “ Tổng số chấm hai lần gieo là 7”.

B: “ Tổng số chấm hai lần gieo không vượt quá 5”.

C: “ Tổng số chấm hai lần gieo chia hết cho 3”

**c.** Phát biểu các biến cố sau dưới dạng mệnh đề:

D: 

E: 

F: .

**79.** Một hộp chứa bốn cái thẻ được đánh số 1, 2, 3, 4. Lấy ngẫu nhiên lần lượt hai thẻ.

**a.** Mô tả không gian mẫu.

**b.** Xác định các biến cố:

A: “Tổng các số trên hai thẻ là số chẵn”.

B: “Tích các số trên hai thẻ là số chẵn”.

C: “Tích các số trên hai thẻ chia hết cho 3”

**80.** Từ một hộp chứa 10 chiếc thẻ, trong đó các thẻ đánh số 1,2,3,4,5 màu đỏ, thẻ đánh số 6 màu xanh và các thẻ đánh số 7,8,9,10 màu trắng.Lấy ngẫu nhiên một thẻ.

**a.** Mô tả không gian mẫu.

**b.** Kí hiệu A,B,C là các biến cố sau:

A: “Lấy được thẻ màu đỏ”;

B: “Lấy được thẻ màu trắng”;

C: “Lấy được thẻ ghi số chẵn”.

Hãy biểu diễn các biến cố A, B, C bởi các tập con tương ứng của không gian mẫu.

**81.** Gieo một đồng xu liên tiếp cho đến khi lần đầu tiên xuất hiện mặt sấp hoặc cả bốn lần ngửa

thì dừng lại. Mô tả không gian mẫu.

**82.** Từ một hộp chứa năm quả cầu được đánh số 1, 2, 3, 4, 5, lấy ngẫu nhiên liên tiếp hai lần mỗi

lần một quả và xếp theo thứ tự từ trái sang phải.

**a.** Mô tả không gian mẫu.

**b.** Xác định các biến cố sau:

A: “ Chữ số sau lớn hơn chữ số trước”;

B: “Chữ số trước gấp đôi chữ số sau”;

C: “ Hai chữ số bằng nhau”;

D: “ Số có hai chữ số được tạo nên là một số lẻ”.

**83.** Hai xạ thủ cùng bắn vào bia. Kí hiệu Ak là biến cố:“ Người thứ k bắn trúng”, k=1,2.

Hãy biểu diễn các biến cố sau qua các biến cố A1, A2:

A: “Không ai bắn trúng”;

B: “Cả hai đều bắn trúng”;

C: “Có đúng một người bắn trúng”;

D: “Có ít nhất một người bắn trúng”.

**Bài 5. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| **I. Định nghĩa**  Xác suất của biến cố A được kí hiệu là P(A) và được xác định:  Trong đó:- n(A) là số phần tử của A hay số các kết quả thuận lợi cho biến cố A.  - là số phần tử của không gian mẫu hay số các kết quả xảy ra của phép thử.  **II. Tính chất**  **1.**  **2.** với mọi biến cố A.  **3.** nếu A và B xung khắc.  **- Hệ quả:**  **-** A và B là các biến cố độc lập |

**B. Bài tập**

**84.** Tiến hành gieo một đồng xu. Tính xác suất để xuất hiện mặt ngửa.

**85.** Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất để xuất hiện:

**a**. Mặt 2 chấm. **b**. Mặt có số chấm là số chẵn. **c**. Mặt có số chấm là số lẻ.

**d**. Mặt có số chấm nhỏ hơn 5 **e**. Mặt có số chấm là số chia hết cho 3.

**86.** Tung một đồng xu 2 lần.Tính xác suất để xuất hiện:

**a.** Mặt sấp **b.** Hai mặt sấp **c.** Mặt sấp ở lần đầu tiên.

**87**. Gieo lần lượt một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất để:

**a.** Lần thứ nhất xuất hiện mặt có số chấm là một số chẵn.

**b.** Cả hai lần đều xuất hiện mặt có số chấm là số chẵn.

**c.** Số chấm ở 2 lần giống nhau

**d.** Tổng số chấm ở hai lần gieo là một số lẻ.

**e.** Tổng số chấm ở hai lần gieo là một số chẵn.

**f.** Tổng số chấm ở hai lần gieo là một số chia hết cho 3.

**88**. Gieo đồng xu cân đối và đồng chất 3 lần. Tính xác suất để:

**a.** Lần đầu xuất hiện mặt sấp **b**. Ba lần xuất hiện các mặt như nhau

**c**. Đúng 2 lần xuất hiện mặt sấp. **d**. Ít nhất một lần xuất hiện mặt sấp.

**89.** Gieo một đồng xu rồi gieo một con súc sắc. Tính xác suất để:

**a.** Đồng xu xuất hiện mặt sấp. **b.** Đồng xu xuất hiện mặt sấp và con súc sắc xuất hiện mặt lẻ

**90.** Lấy ngẫu nhiên một thẻ từ một hộp chứa 20 thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Tính xác suất

để thẻ lấy được ghi số:

**a.** Chẵn **b.** Chia hết cho 5. **c.** Lẻ và chia hết cho 3.

**91.** Một con súc sắc cân đối và đồng chất được gieo 2 lần. Tính xác xuất sao cho

**a.** Tổng số chấm của 2 lần gieo l0 **b.** Ít nhất 1 lần gieo xuất hiện mặt 6 chấm.

**c.** Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo không bé hơn 10.

**92.** Gieo một đồng tiền cân đối và đồng chất 3 lần liên tiếp.

**a.** Mô tả không gian mẫu.

**b.** Tính xác suất của các biến cố sau:

A: “ mặt sấp xuất hiện đúng hai lần”;

B: “ Mặt ngửa xuất hiện ít nhất một lần”;

C: “ Mặt sấp xuất hiện nhiều nhất là hai lần”.

**93.** Có bốn tấm bìa được đánh số từ 1 đến 4. Rút ngẫu nhiên lần lượt 3 tấm:

**a.** Mô tả không gian mẫu.

**b.** Xác định các biến cố sau:

A: “Tổng các chấm trên 3 tấm bìa bằng 8”;

B: “Các số trên 3 tấm bìa là 3 số tự nhiên liên tiếp”;

C: “Các số trên 3 tấm bìa là một số tự nhiên chẵn”.

**c.** Tính P(A), P(B), P(C)

**94.** Một tổ có 8 nam và 5 nữ. Chọn ngẫu nhiên 5 người. Tìm xác suất sao cho trong 5 người đó.

**a.** Đều là nam **b.** Có đúng 1 người là nam **c.** Có ít nhất 1 người nam

**95**. Một hộp đựng 5 bi xanh, 8 bi vàng và 10 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 4 bi. Tính xác suất để lấy được:

**a.** 3 bi vàng **b.** 2 bi vàng, 1 bi xanh và 1 bi đỏ **c.** Ít nhất 1 bi vàng

**d**. 4 bi cùng màu **e.** 4 bi có đủ ba màu  **f**. 4 bi chỉ có hai màu.

**96.** Một hộp chứa 10 quả cầu đỏ được đánh số từ 1 đến 10, 20 quả cầu xanh được đánh số từ 1

đến 20. Lấy ngẫu nhiên 1 quả. Tìm xác suất sao cho quả được chọn:

**a.** Ghi số lẻ **b.** Màu xanh **c.** Màu đỏ hoặc ghi số lẻ **d.** Màu xanh và ghi số chẵn

**97.** Từ cỗ bài tú lơ khơ 52 con, rút ngẫu nhiên cùng lúc bốn con. Tính xác suất sao cho:

**a.** Cả bốn con đều là át. **b.** Được ít nhất một con át.

**c.** Được hai con át và hai con K. **d.** Có đúng một con át.

**98.** Chọn ngẫu nhiên hai chiếc giày từ bốn đôi giày cỡ khác nhau. Tính xác suất để hai chiếc

được chọn tạo thành một đôi.

**99.** Hai bạn nam và hai bạn nữ được xếp ngồi ngẫu nhiên vào bốn ghế xếp thành hai dãy

đối diện. Tính xác suất sao cho:

**a.** Nam, nữ ngồi đối diện nhau. **b**. Nữ ngồi đối diện nhau.

**100.** Xếp 10 người vào một bàn dài. Tính xác suất để anh A và chị B không ngồi cạnh nhau.

**101.** Xếp 10 người vào một bàn tròn. Tính xác suất để anh A và chị B không ngồi cạnh nhau.

**102.** Từ một hộp chứa 16 thẻ đánh số từ 1 đến 16, chọn ngẫu nhiên 4 thẻ. Tính xác suất để 4

thẻ được chọn đều đánh số chẵn

**103.** Để kiểm tra chất lượng sản phẩm từ một công ty sữa, người ta gởi đến bộ phận kiểm

nghiệm 5 hộp sữa cam, 4 hộp sữa dâu, 3 hộp sữa nho. Bộ phận kiểm nghiệm chọn ngẫu nhiên

3 hộp để phân tích mẫu. Tính xác suất để 3 hộp được chọn đủ cả 3 loại.

**104.** Lớp 10A có 40 học sinh trong đó có 30 học sinh nam, lớp 10B có 45 học sinh trong đó

có 20 nam. Mỗi lớp bầu ra 3 học sinh để vào ban chấp hành chi đoàn của lớp. Tính xác suất để

cả 6 học sinh đều là nữ.

**105.** Có hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 6 quả trắng, 4 quả đen. Hộp thứ hai

chứa 4 quả trắng , 6 quả đen. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên một quả.

Xét các biến cố:

A: “ Quả lấy từ hộp thứ nhất trắng”.

B: “ Quả lấy từ hộp thứ hai trắng”.

**a.** Tính xác suất sao cho hai quả cầu lấy ra cùng màu.

**b.** Tính xác suất sao cho hai quả cầu lấy ra khác màu.

**106.** Ba học sinh cùng trả lời một câu hỏi một cách độc lập. Xác suất trả lời đúng của ba học

sinh lần lượt là 0,6;0,7;0,8. Tính xác suất để có đúng hai học sinh trả lời đúng câu hỏi.

**107.** Ba xạ thủ cùng bắn vào một mục tiêu một cách độc lập. Xác suất bắn trúng đích của ba xạ

thủ lần lượt là 0,9;0,8;0,75. Tính xác suất để có một xạ thủ bắn trúng đích.

**C. Bài tâp tự luyện**

**108.** Tiến hành gieo một đồng xu. Tính xác suất để xuất hiện mặt sấp.

**109.** Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất để xuất hiện:

**a**. Mặt 3 chấm. **b**. Mặt có số chấm là số lẻ. **c**. Mặt có số chấm là số chẵn.

**d**. Mặt có số chấm nhỏ hơn 4 **e**. Mặt có số chấm là số chia hết cho 5.

**110.** Tung một đồng xu 2 lần.Tính xác suất để xuất hiện:

**a.** Mặt ngửa **b.** Hai mặt ngửa **c.** Mặt ngửa ở lần đầu tiên.

**111**. Gieo lần lượt một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất để:

**a.** Lần thứ nhất xuất hiện mặt có số chấm là một số lẻ.

**b.** Cả hai lần đều xuất hiện mặt có số chấm là số lẻ.

**c.** Số chấm ở 2 lần giống nhau

**d.** Tổng số chấm ở hai lần gieo là một số chẵn.

**e.** Tổng số chấm ở hai lần gieo là một số chia hết cho 5.

**f.** Tổng số chấm ở hai lần gieo là một số chia hết cho 2.

**112**. Gieo đồng xu cân đối và đồng chất 3 lần. Tính xác suất để:

**a.** Lần đầu xuất hiện mặt ngửa **b**. Ba lần xuất hiện các mặt như nhau

**c**. Đúng 2 lần xuất hiện mặt ngửa. **d**. Ít nhất một lần xuất hiện mặt ngửa.

**113.** Gieo một đồng xu rồi gieo một con súc sắc. Tính xác suất để:

**a.** Đồng xu xuất hiện mặt ngửa.

**b.** Đồng xu xuất hiện mặt ngửa và con súc sắc xuất hiện mặt chẵn

**114.** Lấy ngẫu nhiên một thẻ từ một hộp chứa 20 thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Tính xác suất

để thẻ lấy được ghi số:

**a.** Lẻ **b.** Chia hết cho 3. **c.** Chẵn và chia hết cho 3.

**115.** Một con súc sắc cân đối và đồng chất được gieo 2 lần. Tính xác xuất sao cho

**a.** Tổng số chấm của 2 lần gieo 9 **b.** Ít nhất 1 lần gieo xuất hiện mặt 4 chấm.

**c.** Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo không bé hơn 9.

**116.** Gieo một đồng tiền cân đối và đồng chất 3 lần liên tiếp.

**a.** Mô tả không gian mẫu.

**b.** Tính xác suất của các biến cố sau:

A: “ mặt ngửa xuất hiện đúng hai lần”;

B: “ Mặt sấp xuất hiện ít nhất một lần”;

C: “ Mặt ngửa xuất hiện nhiều nhất là hai lần”.

**117.** Có 5 tấm bìa được đánh số từ 1 đến 5. Rút ngẫu nhiên lần lượt 3 tấm:

**a.** Mô tả không gian mẫu.

**b.** Xác định các biến cố sau:

A: “Tổng các chấm trên 3 tấm bìa bằng 10”;

B: “Các số trên 3 tấm bìa là 3 số tự nhiên chẵn liên tiếp”;

C: “Các số trên 3 tấm bìa là một số tự nhiên lẻ”.

**c.** Tính P(A), P(B), P(C)

**118.** Một tổ có 10 nam và 5 nữ. Chọn ngẫu nhiên 5 người. Tìm xác suất sao cho trong 5 người

đó.

**a.** Đều là nữ **b.** Có đúng 1 người là nữ **c.** Có ít nhất 1 người nữ

**d.** Có ít nhất 2 người nữ **c.** Có ít nhất 2 người nam

**119**. Một hộp đựng 5 bi xanh, 7 bi vàng và 9 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 4 bi. Tính xác suất để lấy

được:

**a.** 4 bi vàng **b.** 1 bi vàng, 2 bi xanh và 1 bi đỏ **c.** Ít nhất 1 bi đỏ

**d**. 4 bi cùng màu **e.** 4 bi có đủ ba màu  **f**. 4 bi chỉ có hai màu.

**120.** Một hộp chứa 15 quả cầu đỏ được đánh số từ 1 đến 15, 10 quả cầu xanh được đánh số từ 1

đến 10. Lấy ngẫu nhiên 1 quả. Tìm xác suất sao cho quả được chọn:

**a.** Ghi số lẻ **b.** Màu xanh **c.** Màu đỏ hoặc ghi số lẻ **d.** Màu xanh và ghi số chẵn

**121.** Từ cỗ bài tú lơ khơ 52 con, rút ngẫu nhiên cùng lúc bốn con. Tính xác suất sao cho:

**a.** Cả bốn con đều là K. **b.** Được ít nhất một con K.

**c.** Được một con át và ba con K. **d.** Có đúng một con K.

**122.** Chọn ngẫu nhiên hai chiếc giày từ năm đôi giày cỡ khác nhau. Tính xác suất để hai chiếc

được chọn tạo thành một đôi.

**123.** Ba bạn nam và ba bạn nữ được xếp ngồi ngẫu nhiên vào bốn ghế xếp thành hai dãy

đối diện. Tính xác suất sao cho:

**a.** Nam, nữ ngồi đối diện nhau. **b**. Nữ ngồi đối diện nhau.

**124.** Từ một hộp chứa 20 thẻ đánh số từ 1 đến 20, chọn ngẫu nhiên 4 thẻ. Tính xác suất để 4

thẻ được chọn đều đánh số chẵn

**125.** Để kiểm tra chất lượng sản phẩm từ một công ty sữa, người ta gởi đến bộ phận kiểm

nghiệm 6 hộp sữa cam, 5 hộp sữa dâu, 3 hộp sữa nho. Bộ phận kiểm nghiệm chọn ngẫu nhiên 3

hộp để phân tích mẫu. Tính xác suất để 3 hộp được chọn đủ cả 3 loại.

**126.** Lớp 10A có 40 học sinh trong đó có 30 học sinh nam, lớp 10B có 45 học sinh trong đó

có 20 nam. Mỗi lớp bầu ra 3 học sinh để vào ban chấp hành chi đoàn của lớp. Tính xác suất để

cả 6 học sinh đều là nữ.

**127.** Có hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 6 quả trắng, 4 quả đen. Hộp thứ hai

chứa 4 quả trắng , 6 quả đen. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên một quả.

Xét các biến cố:

A: “ Quả lấy từ hộp thứ nhất đen”.

B: “ Quả lấy từ hộp thứ hai đen”.

**a.** Tính xác suất sao cho hai quả cầu lấy ra cùng màu.

**b.** Tính xác suất sao cho hai quả cầu lấy ra khác màu.

**128.** Ba học sinh cùng trả lời một câu hỏi một cách độc lập. Xác suất trả lời đúng của ba học

sinh lần lượt là 0,7;0,8;0,9. Tính xác suất để có đúng hai học sinh trả lời đúng câu hỏi.

**129.** Ba xạ thủ cùng bắn vào một mục tiêu một cách độc lập. Xác suất bắn trúng đích của ba xạ

thủ lần lượt là 0,9; 0,85; 0,75. Tính xác suất để có một xạ thủ bắn trúng đích.

**Chương III. DÃY SỐ, CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN**

**Bài 1. Phương pháp quy nạp toán học**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| **Nguyên lý quy nạp:**  Nếu mệnh đề thỏa mãn các điều kiện:  - P(n0) là mệnh đề đúng  - Nếu P(k) đúng () thì P(k+1) đúng.  Khi đó ta kết luận P(n) đúng với mọi  **Phương pháp chứng minh:**  - Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với n = n0.  - Bước 2: Giả sử mệnh đề đúng với n = k, k bất kỳ, . Nếu chứng minh được mệnh đề đúng với n = k+1 thì ta kết luận mệnh đề dung với mọi (đpcm) |

**B. Bài tập**

**1**. Chứng minh rằng với n N\* , ta có :

* 1. 2 + 5 + 8 + … + 3n – 1 = 
  2. 
  3.  +  +  + … +  = 
  4.  +  +  + … +  = 
  5. 



* 1. 

**2**. Chứng minh rằng với n N\* , ta có:

1.  + 3 + 5*n* chia hết cho 3
2.  + 11*n* chia hết cho 6
3.  chia hết cho 6

**3**. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n  2, ta có Bất đẳng thức :

* 1.  > 3*n* + 1
  2.  > 2*n* + 3

**4.** Cho = +  + … +với mọi n N\*

* 1. Tính , , 
  2. Dự đoán công thức và chứng minh bằng qui nạp.

**Bài 2. DÃY SỐ**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| **1. Cách cho một dãy số**  - Cho bằng công thức của số hạng tổng quát.  - Cho bằng phương pháp mô tả  - Cho bằng phương pháp truy hồi  **2. Dãy số tăng, dãy số giảm**  - Dãy số (un) gọi là dãy số tăng nếu  **-** Dãy số (un) gọi là dãy số giảm nếu  **3. Dãy số bị chặn**  - Dãy số (un) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho:  - Dãy số (un) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại số m sao cho:  - Dãy số (un) được gọi là bị chặn nếu nó vửa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới |

**B. Bài tập**

**5.** Viết 5 số hạng đầu của các dãy số có số hạng tổng quát sau:

**a.** =  **b.** = **c.** =  **d.** =



**6.** Cho dãy số () biết := -1, = +3 với *n* 1



**a.** Viết 5 số hạng đầu của dãy số**. b.** Chứng minh bằng qui nạp = 3*n* – 4



**7.** Cho dãy số () biết = 1, = + 2n + 1 với *n* 1



**a.** Viết 5 số hạng đầu của dãy số. **b.** Chứng minh bằng qui nạp = n .



**8.** Xét tính tăng giảm của dãy số () biết :



**a.**  =  - 2 **b.** =  **c.**  = **d.** =



**e.**  =  **f.**  =  **g.**  =  **h.**  = 

**9.** Xét tính bị chặn của dãy số sau :

**a.** = - 1  **b.**  = **c.**  = sin*n* + cos*n* **d.** =



**e.** =   **f.**  =  **g.**  **h.** = 

**Bài 3. CẤP SỐ CỘNG**

1. **Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| **1. Ñònh nghóa:**  - Caáp soá coäng laø moät daõy soá (höõu haïn hay voâ haïn), trong ñoù, keå töø soá haïng thöù hai, moãi soá haïng ñeàu laø toång cuûa soá haïng ñöùng ngay tröôùc noù vôùi moät soá khoâng ñổi d goïi laø coâng sai.  - Theo ñònh nghóa ta coù: un+1 = un + d (n = 1, 2, ...).  *Ñaëc bieät*: Khi d = 0 thì caáp soá coäng laø moät daõy soá trong ñoù taát caû caùc soá haïng ñeàu baèng nhau.  - Ñeå chæ raèng daõy soá (un) laø moät caáp soá coäng, ta kí hieäu  u1, u2, ..., un, ....  **2, Soá haïng toång quaùt**  **Ñònh lí:** Soá haïng toång quaùt un cuûa moät caáp soá coäng coù soá haïng ñaàu u1 vaø coâng sai d ñöôïc cho bôûi coâng thöùc: un = u1 + (n - 1)d,  **3. Tính chaát caùc soá haïng cuûa caáp soá coäng**  **Ñònh lí:** trong moät caáp soá coäng, moãi soá haïng keå töø soá haïng thöù hai ( vaø tröø soá haïng cuoái cuøng ñoái vôùi caáp soá coäng höõu haïn), ñeàu laø trung bình coäng cuûa hai soá haïng keà beân noù, töùc là  ø  (k  2).  **4. Toång n soá haïng ñaàu cuûa moät caáp soá coäng**  **Ñònh lí:** Ñeå tính Sn tacoù hai coâng thöùc sau:  - Sn tính theo u1 vaø d :  - Sn tính theo u1 vaø un : |

**B. Bài tập**

**10.** Trong các dãy số () sau dãy nào là cấp số cộng? Tính số hạng đầu và công sai của nó.



**a.** = 5 - 2*n*  **b*.*** =   **c.** = **d*.*** = 



**11**. Cho cấp số cộng có . Tìm ,,



**12.** Cho , = 9



**a.** Tìm số hạng thứ 98. **b.** Tính tống 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

**13.** Tìm và d của cấp số cộng biết :



**a**. **b**. **c**. **d**.



**e**. **f**.  **g**. **h**. 



**14.** Cho cấp số cộng. Tìm biết:



**a.** **b.** **c.** **d.**



**e.** **f.**  **g.** Sn = 5n2 + 3  **h.**



**15.**

**a.** Định *x* để ba số *x* + 1, 3*x* -2, -1 theo thứ tự cộng thành một cấp số cộng.



**b.** Cho một cấp số cộng biết công sai d = 4; an = 43; Sn = 252. Tím n ?

**c.** Giữa hai số 7 và 35, hãy đặt thêm sáu số để được một cấp số cộng.

**d.** Tìm ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng biết rằng a + b + c = 21 và a2 + b2 + c2 = 155.

**e.** Số đo các góc của một tam giác lập thành một cấp số cộng, góc lớn nhất có số đo bằng 5/3

số đo của góc nhỏ nhất.Tính các góc của tam giác đó.

**16**. Cho a, b, c lập thành một cấp số cộng. CMR :

**a.** a2 + 8bc = (2b + c)2

**b.** a2 + 2bc = c2 + 2ab

**c.** Ba số: a2 + ab + b2 ; a2 + ac + c2 ; c2 + bc + b2 lập thành một cấp số cộng  
  **17**. CMR : Ba số a2 ; b2 ; c2 lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi ba số



lập thành một cấp số cộng

**C. Bài tập tự luyện**

**18.** Tìm ,d,S100 của cấp số cộng biết :

**a**.  **b**.  **c**.  **d**. 

**e**.  **f**.  **g**.  **h**. 

**19.** Cho cấp số cộng.Tìm ,S20 biết:

**a.**  **b.**  **c.**  **d.** 

**e.**  **f.**  **g.** Sn = 3n2 -12  **h.** Sn = 2n2 +5n

**Bài 4. CẤP SỐ NHÂN**

**A.Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| **1. Ñònh nghóa:**  Caáp soá nhaân laø moät daõy soá (höõu haïn hay voâ haïn), tronh ñoù keå töø soá haïng thöù hai moãi soá haïng ñeàu laø tích cuûa soá haïng ñöùng ngay tröôùc noù vôùi moät soá khoâng ñổi q goïi laø coâng boäi.  Theo ñònh nghóa ta coù: un+1 =un.q (n = 1, 2, ...).  *Ñaëc bieät:*  - Khi q = 0 thì caáp soá nhaân laø moät daõy soá daïng u1, 0, 0, ..., 0, ...  - Khi q = 1 thì caáp soá nhaân laø moät daõy soá daïng u1, u1, ..., u1, ...  - Neáu u1 = 0 thì vôùi moïi q, caáp soá nhaân laø daõy soá 0, 0, ..., ...  Ñeå chæ daõy soá (un) laø moät caáp soá nhaân ta thöôøng duøng kí hieäu :  u1, u2, ..., un, ....  **2. Soá haïng toång quaùt**  **Ñònh lí:** Soá haïng toång quaùt cuûa moät caáp soá nhaân ñöôïc cho bôûi coâng thöùc:  un = u1 (q)  **3. Tính chaát caùc soá haïng cuûa caáp soá nhaân**  **Ñònh lí:** Trong moät caáp soá nhaân, moãi soá haïng keå töø soá haïng thöù hai (tröø soá haïng cuoái ñoái vôùi caáp soá nhaân höõu haïn) ñeàu coù giaù trò tuyeät ñoái laø trung bình nhaân cuûa hai soá haïng keà beân noù, töùc laø:    **4. Toång n soá haïng ñaàu cuûa moät caáp soá nhaân.**  Cho moät caáp soá nhaân vôùi coâng boäi q  1  u1, u2, ...,un, ...  **Ñònh lí:** Ta coù:  (q 1) |

**B. Bài tập**

**20.** Chứng minh các dãy số : ,,là những cấp số nhân, tìm công bội của chúng.

**21.** Dãy số nào sau đây là cấp số nhân, tìm công bội (nếu có):

**a.** **b.**   **c.** với  **d.**  với 

**22.** Cho cấp số nhân có () với công bội q.

**a.** Biết , . Tìm q, , 

**b.** Biết q =,  . Tìm , .

**c.** Biết  = 3, q = -2. Hỏi 192 là số hạng thứ mấy?

**23.** Tìm cấp số nhân có 5 số hạng biết;

**a.** = 3,  = 27 **b.** 

**24.** Xác định số hạng đầu tiên , công bội của cấp số nhân và tìm biết :

**a.**  **b.** 

**c**.  **d**. 

**e**.  **f**. 

**g.**  **h .**

**25**.**a.** Cho biết q = 3 ; an = 972 ; Sn = 1456. Tìm n và a1 .

**b.** Tìm cấp số nhân có 6 số hạng, biết tổng của 3 số hạng đầu là 168 và tổng của 3 số hạng

sau là 21

**c**.Tìm ba số a, b, c liên tiếp của một cấp số nhân biết abc = 729 và a + b + c = – 21

**d**. Cho ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân biết abc = 64 và a + b + c = 14.

Tìm a, b, c.

**e.** Tìm ba số liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 14 và tổng các bình

phương của chúng là 84.

**26**. Cho ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân. Chứng minh :

**a.** (a + b + c)(a – b + c) = a2 + b2 + c2

**b.** (a2 + b2)(b2 + c2) = (ab + bc)2

**c.** (bc + ca + ab) = abc(a + b + c)3

**d.** Ba số  lập thành một cấp số nhân.

**27.a**. Cho ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng, ba số a, c, b lập thành một cấp số nhân và

a+b+c = 30. Tính 3 số đó.

**b**. Cho ba số  lập thành một cấp số cộng. CMR : a, b, c lập thành một csn

**c.** Tìm hai số a, b biết 1, a, b lập thành một cấp số nhân và 1, a+8, b lập thành một csc .

**d**. Các số a, b, c phải thỏa điều kiện gì để chúng vừa tạo thành một cấp số cộng vừa tạo

thành một cấp số nhân.

**C. Bài tập tự luyện**

**28.** Xác định số hạng đầu tiên , công bội của cấp số nhân và tìm biết :

**a.**  **b.**  **c**.

**d**. **e**.  **f**.

**g.**  **h.**  **i.** 

**Chương IV. GIỚI HẠN**

**Bài 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| * + - 1. **Giới hạn hữu hạn**   - khi và chỉ khi có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý kể từ một số hạng nào đó trở đi.  -   * + - 1. **Giới hạn vô cực**   -  khi và chỉ khi u có thể lớn hơn một số dương tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.  -  **Chú ý:** thay cho ,  ta viết lim u *= a, lim u =*   * + - 1. **Các giới hạn đặc biệt**   a) lim = 0, lim = 0, lim n = + ∞ với k nguyên dương  b) lim q = 0 nếu  lim q =+∞ nếu  c) lim c = c ( c là hằng số)   * + - 1. **Định lý về giới hạn hữu hạn**   - Nếu limun = a và lim*v = b* thì    - Nếu u ≥ 0 với mọi n và lim *u=a* thì a ≥ 0 và   * + - 1. **Định lý liên hệ giữa giới hạn hữu hạn và giới hạn vô cực**   - Nếu lim u = a và lim v = thì lim =0  - Nếu lim u = +∞ và lim v = *a >0* thì lim u. v =+∞  - Nếu lim u =a>0 và lim v = *0* và v *>0* với mọi n thì lim =+∞   * + - 1. **Cấp số nhân lùi vô hạn:** là cấp số nhân có công bội q thỏa   Công thức tính tổng S của cấp số nhân lùi vô hạn (u ) |

1. **Bài tập**

**Bài 1.** Tính các giới hạn sau:

**a.** **b.** **c.**



**d.** **e.**  **f.**



**g.** **h.** **i.**



**j.** **k**. **l.**



**m.** **n**.



**Bài 2. Tính các giới hạn sau:**

**a**. **b.** **c.**



**d.**  **e.**  **f.** 



**Bài 3. Tính các giới hạn sau**:

**a.**  **b.** lim 

**c.** **d.**



**e.**  **f.**



**g.**  **h.**



**i.**  **j.**



**k.**   **l**.



**m.** **n.** 



**Bài 4.** Tính các giới hạn sau:

**a.** **b.**  **c.** 



**d.**  **e.**  **f.** 



**C. Bài tập tự luyện**

**Bài 5. Tính các giới hạn**

**01.**  **02**.   **03**. 

**04**.  **05**.  **06**. 

**07**.  **08**.  **09**. 

**10.**  **11**.  **12**. 

**13**.  **14**.  **15**. 

**16**.  **17**.  **18**. 

**19**.  **20**.  **21**. 

**22**.  **23**.  **24**. 

**25**.  **26**.  **27**. 

**28**.  **29**.  **30**. 

**31**.  **32**. 

**33**.  **34**. 

**35.**  **36**. 

**37**.  **38**. 

**Bài 2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| **1. Định lí về giới hạn**  **a. Định lí 1**  - Giả sử . Khi đó:+)  +)  +)  - Nếu  và  thì  và .  **b. Định lí 2**    **2. Một vài giới hạn đặc biệt**  **a.**  **b**. (k lẻ)  **c**. (k chẵn)  **3. Quy tắc về giới hạn vô cực** |

**B. Bài tập**

**Giới hạn của hàm số tại một điểm**

**Bài 6. Tính các giới hạn sau:**

**a.  b.  c. **

**d.  e. f.**

**g.  h.  i. **

**Dạng vô định** 

**Bài 7.** Tính các giới hạn sau:

**a. b.  c.**

**d. e.  f.**

**g. h. i.**

**Bài 8.** Tính các giới hạn sau:

**a.  b.  c. **

**d.  e.  f.**

**g.  h.  i.**



**j.  k.  l. **

** n.  o.**

**p.  q.  r. **

**s.  t.  u. **

**Bài 9.** Tính các giới hạn sau:

**a.  b.  c. **

**d. e.  f.**

**g. h.  i.**

**j.  k.  m.**

**n.  o.  p. **

**Dạng vô định **

**Bài 10.** Tính các giới hạn

**a. b. c.**



**d. e. f.**

**g.  h.**

**i.  j. **

**k. l. m.**



**g.  h.  i. **

**Bài 11.** Tính các giới hạn

**a. b. c.**

**d.  e.  f. **

**g. h. i.**

**j. k. l.**

**Dạng vô định **

**Bài 12.** Tính các giới hạn

**a.  b.**

**c.  d. **

**e. f. **

**g. h. **

**i.  j. **

**k.  l.**

**m.  n.**

**o. p.**

**q. r.**

**Giới hạn một bên**

**Bài 13.** Tính các giới hạn

**a. b. c. d.**

**e. f. g. h.**

**C. Bài tập tự luyện**

**Bài 14.** Tính các giới hạn

**01.  02.  03. **

**04.  05. 06.**

**07.  08.  09. **

**10. 11.  12.**

**13. 14.  15.**

**16. 17. 18.**

**19.  20.  21. **

**22.  23.  24.**

**25.  26.  28. **

**29.  30.  31. **

**32. 33.  34. **

**35.  36.  37. **

**38.  39.  40. **

**41. 42.  43.**

**44.  45.  46.**

**47.  48.  49.**

**50.  51. 52.**

**53. 54. 55.**

**60. 61. 62.**

**63.  64.  65. **

**66. 67. 68.**

**69.  70.  71. **

**72. 73. 74.**

**75. 76. 77.**

**78.  79.**

**80.  81. **

**82.  83.**

**84.  85. **

**86. 87. **

**88. 89. **

**90.  91. **

**92.  93.**

**94.  95.**

**96. 97.**

**Bài 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC**

**A.Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| **1. Định nghĩa**  Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng K và x ∈ K  f(x) liên tục tại x ⇔  - Hàm số liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó  - Hàm số liên tục trên đoạn [a;b] nếu nó liên tục trên khoảng (a;b) và ,  **2. Các định lý**  **a. Định lý 1**  - Hàm đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực.  - Hàm phân thức hữu tỉ và hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng  **b.** **Định lý 2**  Giả sử y=f(x)và y=g(x) là hai hàm số liên tục tại điểm xo . Khi đó:  - Các hàm số f(x)+g(x), f(x)-g(x), f(x). g(x) cũng liên tục tại xo.  - Hàm số liên tục tại xo nếu g(xo)**≠** 0  **c.** **Định lý 3**  Nếu hàm số y=f(x) liên tục trên đoạn [a;b] và f(a)f(b) < 0 thì tồn tại ít nhất một điểm c ∈ (a;b) sao cho f(c)=0. |

**B. Bài tập**

**Bài 15.** Xét tính liên tục của hàm số tại x :

**a.  ,**  x0 = 4  **b. ** , x = 1

**c. ** , x = 1 **d. **, x = 1

**e. ** , x0 = 2  **f. ** , x0 = 1

**g.** , x0 = 1  **h.** , x0 = 2

**Bài 16.** Tìm m để các hàm số sau đây liên tục tại x :

**a. ** , x0 = 1 **b.**, x0 = 1

**c. ** , x0 = -1 **d. ,** xo = 2

**e. ** , xo = 0

**Bài 17.** Chứng minh rằng:

**a.** Pt  coù ít nhaát 1 nghieäm

**b.** Pt  coù 3 nghieäm thuoäc 

**c.** Pt  coù ít nhaát 2 nghieäm thuoäc 

**d.** Pt  coù 2 nghieäm thuoäc 

**e.** Pt  coù 5 nghieäm phaân bieät

**f.** Pt x5 - 3x4 + 5x – 2 = 0 coù ít nhaát 3 nghieäm trong khoaûng (-2; 5)

**g.** Pt  coù nghieäm

**h.** Pt  coù nghieäm

**B. Bài tập tự luyện**

**Bài 18.** Xét tính liên tục của hàm số tại x :

**a.  ,** x0 = 5 **b. ** , x = 6

**c. ** , x = 1 **d.** , x = 1

**e. **  , x0 = 2  **f. **  , x0 = 1

**Bài 19.** Tìm m để các hàm số sau đây liên tục tại x :

**a. ** , x0 = 1 **b.**, x0 = 1

**c. ** , x0 = -1 **d. ** , xo =2

**e. ** , xo = 0

**Chương V. ĐẠO HÀM**

**A. Tóm tắt lý thuyêt**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **1. Định nghĩa:**    **2. Cách tính đạo hàm bằng định nghĩa:**  Bước 1: Với Δ*x* là số gia của đối số tại xo, tính Δ*y= f(xo+Δx)-f(xo).*  Bước 2: Lập tỉ số  Bước 3: Tính  **3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm:**  **-** là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số *y=f(x)* tại điểm M*(xo, f(xo))*  - Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm M*(xo, f(xo))* là:  - Tiếp tuyến song song với đường thẳng d: thì hệ số góc của tiếp tuyến  - Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng d: thì hệ số góc của tiếp tuyến   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | **4. Các quy tắc tính đạo hàm** | **5. Công thức tính đạo hàm**   |  |  | | --- | --- | |  |  | |   **6. Đạo hàm cấp cao:** |

**B. Bài tập**

**1.** Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của các hàm số sau:

**a.** y = f(x) = x2 – 3x taïi xo = 1 **b.** y = f(x) = x3 taïi xo =-2

**c.** y = f(x) =  taïi xo = –1  **d.** y =  taïi xo = 2

**2.** Tính ñaïo haøm caùc haøm soá sau taïi  (duøng coâng thöùc) :

**a.**  **b.**

**c.**  **d.**, x =2

e.  **f.** , 

**3.** Tính ñaïo haøm caùc haøm soá sau:

**a**. y = f(x) = 3x2 – 5x + 1 **b.** y **=** f(x) = x4 –x3 + 1

**c. y = f(x) =  d.**

**e.  f. **

**g. h. **

**i.  j. **

**k.  l. **

**m.  n. **

**o. p. **

**q. r. **

**s.  t. **

**4.** Tính ñaïo haøm caùc haøm soá sau:

**a.** **b.** **c.**

**d.** **e.** **f.**

**g.** **h**. **i**.

**j.** **k**. **l**.

**m.** **n.** **o.**

**p**. **q.** **r.**

**s.** **t.** **u.**

**5.** Tính ñaïo haøm caùc haøm soá sau:

**a.** **b.**

**c.** **d.**

**e.** **f.**

**g**. **h.** **i.**

**j**. **k.** **l.**

**m**. **n.** **o.**

**p**. **q.**  **r.**

**s**. **t**. **u**.

**v.** **x.** **y.**

**6.** Giải các bất phương trình sau:

**a.**  với  **b.**  với 

**c.** với  **d.** với 

**7. a.** Cho . Tính f”(2), f’(-1)+2f”(1).

**b.** Cho f(x)=sin3x. Tính f”(-  ), f”(0), f”()

**8.** Tính đạo hàm cấp 2 của các hàm số sau:

**a.** **b.** **c.** **d.**

**e.** y= tanx **f.** y= cos x **g.** **h.**

**9.** Cho các hàm số sau, hãy chứng minh đẳng thức:

**a.**. CMR: 

**b.** CMR: y y”+1=0

**c.** y=xsinx. CMR: xy-2(y’-sinx)+xy”=0

**d.** y=2xcosx. CMR: y’sinx-ycosx+2x-sin2x=0.

**10.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị các hàm số sau:

**a.**  tại điểm có hoành độ x =2.

**b.** tại điểm có hoành độ x =-2.

**c.** tại điểm có tung độ y =3.

**d.** tại điểm có hoành độ y =1.

**11.** Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung:

**a.**  **b.** 

**c.**  **d.** 

**12**. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành:

**a.** **b.**

**c.** **d.**

**13.** Viết phương trình tiếp tuyến của (C) :

**a.** biết tiếp tuyến có hệ số góc k=9.

**b**. (C): y= x biết tiếp tuyến có hệ số góc k=3.

**c.** (C)y= biết tiếp tuyến có hệ số góc k= - .

**14**.Viết phương trình tiếp tuyến của  biết:

**a.** Tieáp tuyeán song song vôùi ñöôøng thaúng 

**b.** Tieáp tuyeán vuoâng goùc vôùi ñöôøng thaúng 

**15**. Cho (C) : y = f(x) =  .

**a.** Viết phương trình tiếp tuyến cuûa (C) vuoâng goùc vôùi ñöôøng thaúng y = 

**b.** Viết phương trình tiếp tuyến cuûa (C) song song vôùi ñöôøng thaúng 3x+y-7=0.

**16.** Cho . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết:

**a.** Tieáp tuyeán song song vôùi ñöôøng phaân giaùc thöù hai cuûa heä truïc toïa ñộ.

**b.** Tieáp tuyeán vuoâng goùc vôùi .

**C. Bài tập tự luyện**

**17.** Tính đạo hàm của các hàm số sau

  

  

  

  

  

  

  

  

  

  

  

  

  

  

  

  

**18.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị các hàm số sau:

**a.**  tại điểm có hoành độ x = -2.

**b.** tại điểm có hoành độ x = 1.

**c.** tại điểm có tung độ y = -3.

**d.** tại điểm có hoành độ y =1.

**e.** tại điểm có hoành độ y = 2.

**f.**  tại điểm có hoành độ x = -2.

**g.**  tại điểm có tung độ y = 2.

**h.**  tại điểm có hoành độ x = -1.

**i.**  tại điểm có tung độ y = -1.

**19**. Cho hàm số  có đồ thị (C)

**a.** Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm A(0;4).

**b**. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc k = 3

**20**. Cho hàm số  có đồ thị (C)

**a.** Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm có tung độ bằng 4.

**b**. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng

d: y = 3x+9.

**21**. Cho hàm số  có đồ thị (C)

**a.** Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng 0.

**b**. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng

d: y = 5x-1.

**22**. Cho hàm số  có đồ thị (C)

**a.** Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm M(-1;2).

**b**. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng

d: 2x-y+9=0.

**23**.Viết phương trình tiếp tuyến của  biết:

**a.** Tieáp tuyeán song song vôùi ñöôøng thaúng 

**b.** Tieáp tuyeán vuoâng goùc vôùi ñöôøng thaúng 

**24**. Cho (C) :  .

**a.** Viết phương trình tiếp tuyến cuûa (C) vuoâng goùc vôùi ñöôøng thaúng 

**b.** Viết phương trình tiếp tuyến cuûa (C) song song vôùi ñöôøng thaúng 20x-y +1=0.

**25**.Cho . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết:

**a.** Tieáp tuyeán song song vôùi .

**b.** Tieáp tuyeán vuoâng goùc vôùi .

**26.** Cho hàm số . Giải bất phương trình:

**27.** Cho hàm số . Giải phương trình:

**28.** Cho hàm số . Giải phương trình:

**29.** Cho hàm số . Giải phương trình:

**30.** Cho hàm số . Giải phương trình:

**31.** Cho hàm số . Giải phương trình:

**32.** Cho hàm số . Giải phương trình:

**33.** Cho hàm số . Giải bất phương trình:

**34.** Cho hàm số . Giải bất phương trình:

**35.** Cho hàm số . Giải phương trình:

**36.** Cho hàm số . Chứng minh:

**a.** .

**b.** .

**37.** Cho hàm số . Chứng minh:.

**38.** Cho hàm số . Chứng minh:.

**39.** Cho hàm số . Chứng minh:.

**40.** Cho hàm số . Chứng minh:.

**41.** Cho hàm số . Chứng minh:.

**42.** Cho hàm số . Chứng minh:.

**43.** Cho hàm số . Chứng minh:.

**HÌNH HỌC**

**Chöông 1.Pheùp dôøi hình vaø pheùp ñoàng daïng trong maët phaúng**

**BAØI 1: PHEÙP TÒNH TIEÁN**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| **1. Ñònh nghóa:** Trong maët phaúng cho vecto . Pheùp bieán hình bieán moãi ñieåm M thaønh ñieåm M’ sao cho  ñöôïc goïi laø pheùp tònh tieán theo vecto . Kí hieäu  **2. Tính chaát:**  1.  2. Neáu  vaø  thì  töø ñoù suy ra  3. Baûo toaøn khoaûng caùch giöõa 2 ñieåm baát kì  4. Pheùp tònh tieán bieán ñöôøng thaúng thaønh ñöôøng thaúng song song hoaëc truøng vôùi noù, bieán ñoaïn thaúng thaønh ñoaïn thaúng baèng noù,bieán tam giaùc thaønh tam giaùc baèng noù, bieán ñöôøng troøn thaønh ñöôøng troøn coù cuøng baùn kính.  \*Bieåu thöùc toïa ñoä: Cho , M(x,y), M’(x’,y’)    x’-x = a x’=x+ a    y’-y = b y’=y+a |

**B. Bài tập**

1. Cho tam giaùc ABC, M laø trung ñieåm BC,.
   1. Xaùc ñònh aûnh cuûa tam giaùc ABC qua pheùp tònh tieán theo vectô .
   2. Xaùc ñònh ñieåm N sao cho pheùp tònh tieán theo vectô bieán N thaønh A.
2. Cho tam giaùc ABC coù G laø troïng taâm .

a. Xaùc ñònh aûnh cuûa tam giaùc ABC qua pheùp tònh tieán theo vectô .

b. Xaùc ñònh ñieåm D sao cho pheùp tònh tieán theo vectô  bieán D thaønh A.

1. Cho vectô .
2. Tìm toïa ñoä aûnh cuûa caùc ñieåm  qua pheùp tònh tieán theo vectô .
3. Tìm toïa ñoä aûnh cuûa caùc ñieåm  qua pheùp tònh tieán theo vectô .
4. Tìm toïa ñoä cuûa ñieåm N sao cho  laø aûnh cuûa N qua pheùp tònh tieán theo vectô .
5. Tìm toïa ñoä cuûa ñieåm M sao cho  laø aûnh cuûa M qua pheùp tònh tieán theo vectô .
6. Cho A(-3; 4) B(2; -1).
7. Tìm toïa ñoä aûnh cuûa A, B qua pheùp tònh tieán theo vectô 
8. Tìm toïa ñoä C, D sao cho A, B laàn löôït laø aûnh cuûa C, D qua pheùp tònh tieán theo vectô .
9. Tìm toïa ñoä vectô  sao cho A laø aûnh cuûa B qua pheùp tònh tieán .
10. Cho 
11. Vieát phöông trình ñöôøng thaúng (d’) laø aûnh cuûa (d): 2x- y+4=0 qua pheùp tònh tieán theo vectô .
12. Vieát phöông trình ñöôøng thaúng () laø aûnh cuûa (): x - 3y- 3=0 qua pheùp tònh tieán 
13. Vieát phöông trình ñöøông thaúng (D’) laø aûnh cuûa (D):  qua pheùp tònh tieán theo vectô .
14. Cho .
    1. Vieát phöông trình ñöôøng troøn (C’) laø aûnh cuûa ñöôøng troøn (C):  qua pheùp tònh tieán theo vectô .
    2. Vieát phöông trình ñöôøng troøn (C’) laø aûnh cuûa ñöôøng troøn (C):  qua pheùp tònh tieán theo vectô .
    3. Vieát phöông trình ñöôøng troøn (C’) laø aûnh cuûa ñöôøng troøn (C):  qua pheùp tònh tieán theo vectô .
    4. Vieát phöông trình ñöôøng troøn (C’) laø aûnh cuûa ñöôøng troøn (C), bieát (C) coù taâm I(-3;1) baùn kính baèng 7.
15. Cho 
    1. Tìm toïa ñoä aûnh cuûa M(0; -1) vaø N(1; -2) qua .
    2. Tìm toïa ñoä P, Q laàn löôït laø aûnh cuûa M, N qua .
    3. Vieát phöông trình ñöôøng thaúng (d’) laø aûnh cuûa (d): x-4y+1=0 qua 
    4. Vieát phöông trình ñöôøng troøn (C’) laø aûnh cuûa (C): qua .

**Baøi 4. PHEÙP QUAY**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| **1. Ñònh nghóa:** Cho ñieåm O vaø goùc löôïng giaùc . Pheùp bieán hình bieán ñieåm O thaønh chính noù, bieán moãi ñieåm M khaùc O thaønh M’ sao cho OM’= OM vaø goùc löôïng giaùc (OM,OM’) baèng ñöôïc goïi laø pheùp quay taâm O goùc  .      Kí hieäu :    **2. Tính chaát:**  - Pheùp quay bieán ñöôøng thaúng thaønh ñöôøng thaúng, bieán ñoaïn thaúng thaønh ñoaïn thaúng baèng noù,bieán tam giaùc thaønh tam giaùc baèng noù, bieán ñöôøng troøn thaønh ñöôøng troøn coù cuøng baùn kính. |

**B. Bài tập**

* 1. Cho hình vuoâng ABCD taâm O.

a. Tìm aûnh cuûa B qua pheùp quay taâm A goùc  vaø qua pheùp quay taâm A goùc 

b. Tìm aûnh cuûa ñöôøng thaúng CD qua pheùp quay taâm O goùc 

c. Goïi E laø trung ñieåm AB. Tìm aûnh cuûa tam giaùc AOE qua pheùp quay taâm O goùc 

* 1. Cho luïc giaùc ñeàu ABCDEF (thöù töï caùc ñænh theo chieàu ngöôïc chieàu quay cuûa kim ñoàng hoà) coù taâm O , I laø trung ñieåm cuûa AB
     1. Tìm aûnh cuûa tam giaùc AIF qua pheùp quay taâm O goùc 
     2. Tìm aûnh cuûa tam giaùc AOF qua pheùp quay taâm E goùc 
  2. Cho , , ñöôøng thaúng (d):  vaø ñöôøng troøn (C) 
     + 1. Tìm aûnh cuûa A, B qua pheùp quay taâm O goùc 
       2. Tìm aûnh cuûa (d) vaø (C) qua pheùp quay taâm O goùc 
  3. Cho ñieåm , ñöôøng thaúng (d) :  vaø ñöôøng troøn (C) .
     + 1. Haõy xaùc ñònh aûnh cuûa M, d, (C) qua pheùp quay taâm O goùc 
       2. Haõy xaùc ñònh aûnh cuûa M vaø (C) qua pheùp quay taâm O goùc 

**Bài 5. PHEÙP DÔØI HÌNH VAØ HAI HÌNH BAÈNG NHAU**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| **1. Ñònh nghóa**: Pheùp dôøi hình laø pheùp bieán hình baûo toaøn khoaûng caùch giöûa 2 ñieåm baát kì.  - Caùc pheùp tònh tieán, ñoái xöùng truïc, ñoái xöùng taâm vaø pheùp quay ñeàu laø nhöõng pheùp dôøi hình.  - Pheùp dôøi hình coù ñöôïc baèng caùch thöïc hieän lieân tieáp 2 pheùp dôøi hình cuõng laø 1 pheùp dôøi hình.  **2. Tính chất:** Hai hình ñöôïc goïi laø baèng nhau neáu coù 1 pheùp dôøi hình bieán hình naøy thaønh hình kia. |

**B. Bài tập**

1. Trong mp toïa ñoä Oxy, cho ñieåm A(2,-3) , I(1;4) vaø ñöôøng thaúng d: 2x – y + 4 = 0 vaø ñöôøng troøn (C) 

Tìm aûnh cuûa A, d vaø (C) qua :

1. Pheùp dôøi hình coù ñöôïc baèng caùch thöïc hieän lieân tieáp pheùp ñoái xöùng truïc Oy vaø pheùp tònh tieán theo 
2. Pheùp dôøi hình coù ñöôïc baèng caùch thöïc hieän lieân tieáp pheùp tònh tieán  vaø pheùp ñoái xöùng taâm I
3. Pheùp dôøi hình coù ñöôïc baèng caùch thöïc hieän lieân tieáp pheùp ñoái xöùng taâm O vaø pheùp tònh tieán theo .
4. Cho ñieåm M(-2;1), N(3;2) , ñöôøng thaúng (d):x - 3y + 1 = 0 vaø ñöôøng troøn (C) taâm I(-1;4) baùn kính R=5

Tìm aûnh cuûa M, (d), (C) qua:

* 1. Pheùp dôøi hình coù ñöôïc baèng caùch thöïc hieän lieân tieáp pheùp tònh tieán  vaø pheùp ñoái xöùng taâm N
  2. Pheùp dôøi hình coù ñöôïc baèng caùch thöïc hieän lieân tieáp pheùp ñoái xöùng truïc Oy vaø pheùp tònh tieán 

**BAØI 6. PHEÙP VÒ TÖÏ**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| **1. Ñònh nghóa**: Cho ñieåm O vaø soá  . Pheùp bieán hình bieán moãi ñieåm M M’ sao cho  ñöôïc goïi laø pheùp vò töï taâm O tæ soá k .  Kí hieäu :  **2**. **Tính chaát:**  - Neáu pheùp vò töï tæ soá k bieán 2 ñieåm M,N tuøy yù theo thou töï thaønh M’, N’ thì  vaø .  - Pheùp vò töï tæ soá k:  + Bieán 3 ñieåm thaúng haøng thaønh 3 ñieåm thaúng haøng vaø baûo toaøn thöù töï giöõa caùc ñieåm aáy.  + Bieán ñöôøng thaúng thaønh ñöôøng thaúng song song hoaëc truøng vôùi noù, bieán tia thaønh tia, bieán ñoaïn thaúng thaønh ñoaïn thaúng  + Bieán tam giaùc thaønh tam giaùc ñoàng daïng vôùi noù, bieán goùc thaønh goùc baèng noù  + Bieán ñöôøng troøn baùn kính R thaønh ñöôøng troøn baùn kính .  \* Taâm vò töï cuûa 2 ñöôøng troøn: Sgk |

**B. Bài tập**

1. Cho tam giaùc ABC coù 3 goùc nhoïn. H laø tröïc taâm. Tìm aûnh cuûa tam giaùc ABC qua pheùp vò töï taâm H tæ soá ½.
2. Cho O(0,0), I (2,-5))
3. Tìm aûnh cuûa A(1, 3) , B(-1,5) qua pheùp vò töï taâm O tæ soá 4
4. Tìm aûnh cuûa A(1, 3) , B(-1,5) qua pheùp vò töï taâm I tæ soá -2
5. Tìm aûnh cuûa A(1, 3) , B(-1,5) qua pheùp vò töï taâm I tæ soá 1/2

3.

a Tìm aûnh cuûa d:2x+y-1=0 qua pheùp vò töï taâm O tæ soá -3

b Tìm aûnh cuûa d:2x+y-1=0 qua pheùp vò töï taâm I(2,3) tæ soá -2

c) Tìm aûnh cuûa (C) : qua pheùp vò töï taâm I(2,3) tæ soá 2

d) Tìm aûnh cuûa (C) : qua pheùp vò töï taâm I(1,-2) tæ soá 2

4. Cho ñieåm A(-2;3), ñöôøng thaúng d:2x+y-1=0, vaø ñöôøng troøn (C:

a) Tìm aûnh cuûa A, d, (C) qua pheùp vò töï taâm O tæ soá -1/2

b) Tìm aûnh cuûa A, d, (C) qua pheùp vò töï taâm I( 3, 5) tæ soá 2

**Bài 7. KHÁI NIEÄM PHEÙP ÑOÀNG DAÏNG VAØ HAI HÌNH ÑOÀNG DAÏNG**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| **1, Ñònh nghóa:** Pheùp bieán hình F ñöôïc goïi laø pheùp ñoàng daïng tæ soá k (k>0) neáu vôùi 2 ñieåm baát kì M, N vaø aûnh M’, N’ töông öùng chuùng ta luoân coù M’N’=kMN  - Pheùp dôøi hình laø pheùp ñoàng daïng tæ soá k = 1  - Pheùp vò töï tæ soá k laø pheùp ñoàng daïng tæ soá .  **2. Tính chất:** Hai hình ñöôïc goïi laø ñoàng daïng vôùi nhau neáu coù 1 pheùp ñoàng daïng bieán hình naøy thaønh hình kia. |

**B. Bài tập**

* + 1. Cho tam giaùc ABC. Xaùc ñònh aûnh cuûa noù qua pheùp ñoàng daïng coù ñöôïc baèng caùch thöïc hieän lieân tieáp pheùp vò töï taâm B tæ soá ½ vaø pheùp ñoái xöùng qua ñöôøng trung tröïc BC.
    2. Cho ñieåm M(2;-3), ñöôøng thaúng d:2x+y-4=0

a. Tìm toaï ñoä aûnh cuûa M qua pheùp vò töï taâm O tæ soá 4, vaø pheùp vò töï taâm I(-3;2) tæ

soá -2

b. Tìm toïa ñoä aûnh cuûa M qua pheùp bieán hình coù ñöôïc baèng caùch thöïc hieän lieân tieáp pheùp ñoái xöùng taâm I(-3,2) vaø pheùp vò töï taâm O tæ soá 3

c. Vieát phöông trình ñöôøng thaúng  laø aûnh cuûa d qua pheùp bieán hình coù ñöôïc baèng caùch thöïc hieän lieân tieáp pheùp ñoái xöùng truïc Oy vaø pheùp vò töï taâm I tæ soá 3

**OÂN TAÄP CHÖÔNG 1**

* 1. Cho luïc giaùc ñeàu ABCDEF taâm O. Tìm aûnh cuûa tam giaùc AOF
  2. Qua pheùp tònh tieán  b.Qua pheùp ñoái xöùng qua ñöôøng BEc.Qua pheùp quay taâm O goùc 120 ñoä.

2. Trong maët phaúng toïa ñoä Oxy cho ñieåm A(-1,2) vaø ñöôøng thaúng d coù phöông trình

3x+y+1=0. Tìm aûnh cuûa A vaø d

1. Qua pheùp tònh tieán  c. Qua pheùp ñoái xöùng truïc Oy.
2. Qua pheùp ñoái xöùng taâm O d. Qua pheùp vò töï taâm O tæ soá -2

3. Trong maët phaúng toïa ñoä Oxy, cho ñöôøng troøn (C) taâm I(3,-2), baùn kính 3.

a. Vieát phöông trình ñöôøng troøn (C ) . b. Tìm aûnh cuûa ( C) qua pheùp tònh tieán 

c. Tìm aûnh cuûa ( C) qua pheùp ñoái xöùng truïc Ox

d. Tìm aûnh cuûa ( C) qua pheùp ñoái xöùng qua goác toïa ñoä

e. Tìm aûnh cuûa ( C) qua pheùp vi töï taâm O tæ soá 3.

4. Trong maët phaúng toïa ñoä Oxy cho ñieåm M(-1,4) vaø ñöôøng thaúng d coù phöông trình

3x-y+2=0. Tìm aûnh cuûa A vaø d

1. Qua pheùp tònh tieán  d. Qua pheùp ñoái xöùng truïc Ox.
2. Qua pheùp ñoái xöùng taâm I(4,-3) e. Qua pheùp vò töï taâm I(2,-3) tæ soá -1/2 .
3. Qua pheùp ñoái xöùng truïc d’: 2x+5y+1=0.

5. Trong maët phaúng toïa ñoä Oxy, cho ñöôøng troøn (C): 

a. Vieát phöông trình ñöôøng troøn (C ) .

b. Tìm aûnh cuûa ( C) qua pheùp tònh tieán 

c. Tìm aûnh cuûa ( C) qua pheùp ñoái xöùng truïc Ox

d. Tìm aûnh cuûa ( C) qua pheùp ñoái xöùng qua I(3,2)

e. Tìm aûnh cuûa ( C) qua pheùp vi töï taâm I(1,-2) tæ soá 3.

f. Tìm aûnh cuûa ( C) qua pheùp ñoái xöùng truïc d’: 2x-3y+1=0.

**CHÖÔNG II** .**ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN .**

**QUAN HỆ SONG SONG**

**1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| **Các tính chất thừa nhận**  **1.** Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt  **2.** Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng  **3.** Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó  **4.** Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng  **5.** Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa. |

**B. Bài tập**

**Tìm giao tuyếN của hai mặt phẳng**

|  |
| --- |
| **Phương pháp:** *Tìm 2 điểm chung của 2 mp. Đường thẳng qua 2 điểm chung đó là giao tuyến của 2mp* |

1. Cho ñieåm A khoâng naèm trong maët phaúng () chöùa tam giaùc BCD. Laáy E, F laø caùc ñieåm laàn löôït naèm treân caùc caïnh AB,AC.

a/ Chöùng minh EF naèm trong mp (ABC)

b/ Cho EF vaø BC caét nhau taïi I. Chöùng minh I laø ñieåm chung cuûa 2 mp (BCD) vaø (DEF)

1. Cho hình chop SABCD , tứ giác ABCD lồi . Xaùc ñònh giao tuyeán cuûa :

a/ (SAC) ∩ (SBD) b/ (SAB) ∩ (SCD) c/ (SAD) ∩ (SBC)

1. Cho hình choùp SABC. Goïi D, E, F laàn löôït laø trung ñieåm AB, BC, SA. Tìm

a/ (SCD) ∩ (SAE) b/ (SCD) ∩ (FBC)

1. Cho töù dieän ABCD, I, J, K treân AB, BC, CD sao cho khoâng coù söï song song. Tìm giao tuyeán cuûa (IJK) vôùi (DAC) vaø (ABD)
2. Cho AB vaø CD cheùo nhau. M ∈ AB , N ∈ CD . Tìm giao tuyeán (MCD) vaø (NAB).
3. Cho hình choùp S.ABC. Treân SA, SB, SC laàn löôït laáy A’, B’, C’ sao cho: 

a Xaùc ñònh giao tuyeán (ABC) vaø (A’B’C’). b. Xaùc ñònh giao tuyeán cuûa (ABC’) vaø (A’B’C)

1. Cho hình choùp S.ABCD coù ñaùy laø töù giaùc coù caùc caëp caïnh ñoái dieän khoâng song song . M laø ñieåm thuoäc mieàn trong cuûa tam giaùc SCD.
2. Tìm giao tuyeán cuûa caùc caëp maët phaúng: (SAD) vaø (SBC); (SAC) vaø (SBD); (SAB) vaø (SCD).
3. Tìm giao tuyeán cuûa caùc caëp maët phaúng: (SBM) vaø (SCD); (ABM) vaø (SCD); (ABM) vaø (SAC)

**giao ñieåm cuûa ñöôøng thaúng vaø maët phaúng**

|  |
| --- |
| **Phương pháp:**  - Muốn tìm giao điểm của đt a và mp (P), ta tìm trong mp(P) một đt b nào đó cắt a tại A thì A là giao điểm của đt a và mp (P).  - Nếu b chưa có sẵn thì ta chon mp phụ (Q) qua a sao cho giao tuyến d của (P) và (Q) dễ xác định. Trong mặt phẳng phụ (Q) đt a cắt d tại A thì A là giao điểm của a và (P). |

**CHỨNG MINH 3 ĐIỂM THẲNG HÀNG , 3 ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY**

|  |
| --- |
| **Phương pháp:**  - Muốn chứng minh 3 điểm thẳng hàng, ta chứng minh điểm đó là các điểm chung của 2 mp phân biệt.  - Muốn chứng minh 3 đt đồng quy, ta chứng minh giao điểm của 2 đt là điểm chung của 2 mp chứa 2 đt (nghĩa là tìm 2 mp chứa 2 đt đó) và 2mp có giao tuyến là đường thứ 3 |

1. Cho töù dieän ABCD. Goïi M, N laàn löôït laø trung ñieåm cuûa AC vaø BC,   
   K ∈ BD sao cho K khoâng laø trung ñieåm cuûa BD. Döïng giao ñieåm cuûa

a/ CD ∩ (MNK) b/ AD ∩ (MNK)

1. Cho töù dieän ABCD. Treân AB, AC laáy 2 ñieåm M, N sao cho MN khoâng song song vôùi BC. Goïi O laø 1 ñieåm trong Δ BCD

a/ Xaùc ñònh (OMN) ∩ (BCD) b/ Xaùc ñònh giao ñieåm BD, DC vôùi mp (OMN)

1. Cho töù dieän SABC. Goïi M ∈ SA, N ∈ (SBC), P ∈ (ABC)

a/ Xaùc ñònh MN ∩ (ABC) suy ra giao tuyeán (MNP) ∩ (ABC)

b/ Tìm giao ñieåm AB ∩ (MNP), NP ∩ (SAB)

1. Cho töù dieän SABC, M ∈ SA. N ∈ SB sao cho MN caét AB , O laø ñieåm trong (ABC)

a/ Xaùc ñònh : (MNO) ∩ (ABC), (MNO) ∩ (SBC)

b/ Ñònh giao ñieåm cuûa (MNO) vôùi AB, BC, AC, SC.

c/ Tìm MO ∩ (SBC)

1. Cho hình thang ABCD (AB//CD), S  (ABCD), O laø giao ñieåm cuûa AC,BD , M ∈ SB

a/ Xaùc ñònh giao tuyeán cuûa : (SAD) ∩ (SBC), (SAC) ∩ (SBD),

b/ Tìm giao ñieåm cuûa SO vôùi (MDC) , SA vôùi (MDC).

1. Cho hình bình hành ABCD . S là điểm không thuộc (ABCD) ,M và N lần lượt là trung điểm của đoạn AB và SC .

a. Xác định giao điểm I = AN ∩ (SBD) b. Xác định giao điểm J = MN ∩ (SBD)

c. Chứng minh I , J , B thẳng hàng

1. Cho hình choùp S.ABCD vôùi ñaùy ABCD laø hình vuoâng. Goïi I, J laø 2 ñieåm naèm treân SB vaø SD sao cho , . Tìm :

a/ IJ ∩ (ABCD) b/ IJ ∩ (SAC) c/  d/  e/ 

1. Cho hình choùp S.ABCD vôùi ABCD laø hình bình haønh. Goïi M laø ñieåm baát kyø treân SB, N ñieåm trong (SCD)

a/ Xaùc ñònh MN ∩ (ABCD) b/ SC ∩ (MAN) suy ra SD ∩ (MAN) c/ SA ∩ (CMN)

1. Cho töù giaùc ABCD naèm trong maët phaúng (P) sao cho AB vaø CD khoâng song song, 1 ñieåm S naèm ngoaøi mp(P). Goïi M laø trung ñieåm SC.
   1. Tìm giao ñieåm cuûa AM vaø (SBD)
   2. Tìm giao ñieåm N cuûa SD vaø (ABM)
   3. Goïi O laø giao ñieåm cuûa AC vaø BD. Chöùng minh SO, AM, BN ñoàng quy.
2. Cho töù dieän SABC. Goïi I,J, K laàn löôït laø 3 ñieåm laàn löôït naèm trong 3 maët phaúng : (SAB) ; (SBC) ; (ABC)

a/ Tìm IJ ∩ (ABC) b/ Tìm (IJK) ∩ (ABC) suy ra giao ñieåm cuûa (IJK) vôùi AC, AB, BC.

1. Cho hình choùp S.ABCD. Goïi O laø giao ñieåm cuûa AC vaø BD. Moät maët phaúng α caét caùc caïnh SA, SB, SC, SD laàn löôït taïi A’, B’, C’, D’. AB caét CD taïi E. A’B’ caét C’D’ taïi F. Chöùng minh S, E, F thaúng haøng.
2. Cho hình choùp S.ABCD. Goïi O laø giao ñieåm cuûa AC vaø BD. Moät maët phaúng α caét caùc caïnh SA, SB, SC, SD laàn löôït taïi A’, B’, C’, D’. Chöùng minh A’C’, B’D’, SO ñoàng qui.
3. Cho hình thang ABCD, đáy lớn AB, S không thuộc (ABCD). Trên SA. SB lần lượt lấy M,N sao cho MN không song song với AB. Gọi O là giao điểm của AC và BD. ( Gợi ý lấy điểm M, N gần B, A).
4. Tìm giao điểm của AB với (MNO).
5. Tìm giao tuyến của (MNO) với (SBC), (SAD).
6. Gọi K lả giao điểm của 2 giao tuyến trên, E là giao của AD, BC.Chứng minh: S, K, E thẳng hàng.

**thieát dieän**

|  |
| --- |
| **1.Định nghĩa:** Một mặt phẳng cắt mặt nào (mặt bên hay mặt đáy) của hình chóp thì chúng sẽ có 1 đoạn giao tuyến. Các đoạn giao tuyến này khép kín tạo thành đa giác phẳng gọi là thiết diện (hay mặt cắt).  **2.Phương pháp xác định thiết diện của và hình chóp.**  - Từ điểm chung có sẵn, xác định gaio tuyến thứ nhất của  với một mặt hình chóp.  - Cho giao tuyến này cắt các cạnh của mặt đó  các điểm chung mới của  với các mặt khác của hình chóp  đoạn giao tuyến. Từ đó xác định được giao tuyến với các mặt còn lại. Tiếp tục cho đến khi các đoạn giao tuyến khép kín ta được thiết diện. |

1. Cho hình choùp töù giaùc S.ABCD, ñieåm M thuộc SD .

a/ Tìm giao tuyeán cuûa 2 mp (SAC) ; (SBD) , (SAB) ;(SCD) , (SBM) vaø (SAC)

b/ Tìm thieát dieän cuûa hình choùp vôùi mp (ABM)

1. Cho hình choùp S.ABCD coù ñaùy ABCD laø 1 hình bình haønh. Goïi H vaø K laàn löôït laø trung ñieåm caùc caïnh CB vaø CD, M laø ñieåm baát kyø treân caïnh SA.
2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) , (SBD).
3. Tìm giao điểm của AB , (MHK) ; AD , (MHK)
4. Tìm thieát dieän cuûa hình choùp vôùi mp (MHK)
5. Cho hình choùp ñænh S coù ñaùy laø hình thang ABCD vôùi ñaùy lôùn AB. Goïi M, N laàn löôït laø trung ñieåm cuûa caùc caïnh SB vaø SC

a/ Tìm (SAD) ∩ (SBC) ; SD ∩ (AMN)

b/ Tìm thieát dieän cuûa hình choùp S.ABCD vôùi mp (AMN)

**ÑÖÔØNG THAÚNG SONG SONG- HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| **I. Vò trí töông ñoái giöõa hai ñöôøng thaúng**  Cho hai ñöôøng thaúng a vaø b.  ***Tröôøng hôïp 1:*** *Coù moät maët phaúng chöùa caû a vaø b*  a//b ⇔ a vaø b khoâng coù ñieåm chung  a caét b ⇔ a vaø b coù duy nhaát 1 ñieåm chung  a ≡ b ⇔ a vaø b coù voâ soá ñieåm chung.  ***Tröôøng hôïp 2:*** *Khoâng coù maët phaúng naøo chöùa a vaø b:*  Khi ñoù ta noùi a vaø b cheùo nhau.  Vaäy a vaø b cheùo nhau ⇔ a, b khoâng ñoàng phaúng.  ***Toùm laïi:*** giöõa hai ñöôøng thaúng coù 4 vò trí töông ñoái:  a//b ⇔ a, b ñoàng phaúng vaø a ∩b = ∅  a cắt b ⇔ a ∩ b = {A}  a ≡ b ⇔ a ∩ b = a  a cheùo b ⇔ a, b khoâng ñoàng phaúng.  Hai ñöôøng thaúng ñöôïc goïi laø song song neáu chuùng ñoàng phaúng vaø  khoâng coù ñieåm chung.  **III. Caùc ñònh lyù:**  **1. Ñònh lyù döïng hình:** Töø moät ñieåm naèm ngoaøi  **II. Ñònh nghóa:**  ñöôøng thaúng, ta döïng ñöôïc duy nhaát moät ñöôøng thaúng song song  vôùi ñöôøng thaúng ñaõ cho.  Heä quaû: Cho moät ñöôøng thaúng a naèm trong maët phaúng (α), ta döïng ñöôøng thaúng song song vôùi a thì ñöôøng thaúng vöøa döïng chöùa trong (α).  Ta coù:  **2. Ñònh lyù baéc caàu**: Hai ñöôøng thaúng phaân bieät cuøng song song vôùi ñöôøng thaúng thöù ba thì song song vôùi nhau.  Ta coù:  **3. Ñònh lyù giao tuyeán 1:** Neáu 2 maët phaúng caét nhau laàn löôït chöùa 2 ñöôøng thaúng song song thì giao tuyeán cuûa noù song song vôùi hai ñöôøng thaúng ñoù.  Ta coù: |

**PHÖÔNG PHAÙP GIAÛI TOAÙN**

***Baøi toaùn 2*:** **Chöùng minh 2 ñöôøng thaúng song song**

Phöông phaùp: Coù 3 phöông phaùp chöùng minh 2 ñöôøng thaúng song song:

*Phöông phaùp 1:* Ñöa 2 ñöôøng thaúng ñoù veà cuøng maët phaúng roài aùp duïng caùc tính chaát ñaõ coù trong hình hoïc phaúng.

*Phöông phaùp 2:* Chöùng minh hai ñöôøng thaúng ñoù cuøng song song vôùi ñöôøng thaúng thöù ba.

*Phöông phaùp 3:* AÙp duïng ñònh lí veà giao tuyeán:  

***Ví duï 2:*** Cho töù dieän ABCD. M, N laø trung ñieåm cuûa AB, AC. Maët phaúng (α) chöùa MN

caét DC, DB taïi E vaø F.

a. Chöùng minh MNEF laø hình thang.

b. Xaùc ñònh (α) ñeå MNEF laø hình thang.

***Baøi toaùn 3:* Tìm giao tuyeán cuûa 2 maët phaúng**

Phöông phaùp: Ñeå giao tuyeán cuûa 2 maët phaúng ta tìm moät ñieåm chung vaø phöông cuûa giao tuyeán.

Tìm moät ñieåm chung cuûa 2 maët phaúng.

Duøng ñònh lyù veà giao tuyeán, chöùng minh giao tuyeán song song vôùi moät ñöôøng thaúng cho tröôùc.

Giao tuyeán laø ñöôøng thaúng qua ñieåm chung vaø song song vôùi ñöôøng thaúng ñoù.

Ta coù: ⇒ giao tuyeán cuûa (α), (β) laø ñöôøng thaúng qua A song song a, b.

***Ví duï 3.***Cho hình choùp S.ABCD vôùi ABCD laø hình bình haønh. Tìm giao tuyeán cuûa 2 maët phaúng (SAB) vaø (SCD).

**B. Bài tập**

**1**. Cho hình choùp S.ABCD coù ñaùy laø hình bình haønh. Goïi M, N, P , Q laø caùc ñieåm laàn löôït treân BC, SC, SD, AD sao cho MN//BS, NP//CD, MQ//CD.

1. Chứng minh PQ // SA
2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).
3. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).
4. Tìm giao điểm của đường thẳng AN và ( SBD).
5. Goïi K laø giao ñieåm cuûa MN vaø PQ. Chöùng minh SK//AD//BC

**2** . Cho hình choùp S.ABCD coù ñaùy laø hình ABCD laø hình thang, AB laø ñaùy lôùn. Goïi M, N laàn löôït laø trung ñieåm cuûa SA, SB.

1. Chöùng minh: MN // CD
2. Tìm giao tuyến của hai mp (SAC) và (SBD) .
3. Tìm giao tuyến của hai mp (SAB) và (SCD) .
4. Tìm giao ñieåm K cuûa SC vaø maët phaúng AND. Keùo daøi AN vaø DK caét nhau taïi I. Chöùng minh : SI//AB//CD. Töù giaùc SABI laø hình gì?

**3** . Cho hình choùp S.ABCD coù ñaùy ABCD laø hình bình haønh. Goïi H, K laàn löôït laø trung ñieåm cuûa SA vaø SB.

a. Chöùng minh: HK//CD

b. Goïi M laø ñieåm treân caïnh SC vaø khoâng truøng vôùi S. Tìm giao tuyeán cuûa 2 maët phaúng (HKM) vaø (SCD).

c. Tìm giao tuyeán cuûa 2 maët phaúng (SAB) vaø (SCD).

d. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi (MHK) .

**4.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một hình bình hành tâm O.Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC.Gọi (P) là mặt phẳng qua 3 điểm M,N và B

1. Tìm các giao tuyến (P)  (SAB) và (P)  (SBC)
2. Tìm giao điểm I của đường thẳng SO với mặt phẳng (P) và giao điểm K của đường thẳng SD với mặt phẳng (P)
3. Xác định các giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng (SAD) và mặt phẳng (SDC)
4. Xác định các giao điểm E, F của các đường thẳng DA,DC với (P).  
    Chứng minh rằng E ,B ,F thẳng hàng
5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một tứ giác lồi.Gọi M ,N ,E ,F lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA ,SB ,SC ,và SD

a) Chứng minh rằng ME//AC , NF//BD

b) Chứng minh rằng ba đường thẳng ME ,NF ,và SO(O là giao điểm của AC và BD) đồng qui

c) Chứng minh rằng 4 điểm M,N,E,F đồng phẳng

**Baøi 3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| **I. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng**  Có 3 vị trí tương đối gữa đường thẳng và mặt phẳng:  - Đường thẳng nằm trong mặt phẳng  - Đường thẳng cắt mặt phẳng  - Đường thằng song song với mặt phẳng  **II. Định nghĩa**  Đường thẳng song song với mặt phẳng nếu chúng không có điểm chung.  **III. Các định lí**  **1. Ñònh lyù cô baûn:** Ñieàu kieän caàn vaø ñuû ñeå ñöôøng thaúng song song maët phaúng khoâng chöùa noù laø song song vôùi moät ñöôøng thaúng naøo ñoù naèm trong maët phaúng  Chú ý: Đường thẳng a song song maët phaúng (α) khoâng coù nghóa laø a song song vôùi moïi ñöôøng thaúng naèm trong  **2. Định lí giao tuyến 2:** Neáu moät ñöôøng thaúng song song vôùi maët phaúng thì noù song song vôùi giao tuyeán cuûa maët phaúng ñoù vaø maët phaúng baát kyø chöùa  **3. Định lí giao tuyến 3**: Nêu một đường thẳng song song với 2 mặt phẳng cắt nhau thì nó song song với giao tuyến của hai mặt phẳng đó  **4. Định líù döïng hình 2**: Neáu a, b laø 2 ñöôøng thaúng cheùo nhau thì qua a, coù moät vaø chæ moät maët phaúng song song vôùi b. |

**PHÖÔNG PHAÙP GIAÛI TOAÙN**

**Baøi toaùn 1:** *Chöùng minh ñöôøng thaúng song song vôùi maët phaúng*

Phöông phaùp: Ñeå chöùng minh ñöôøng thaúng song song vôùi maët phaúng ta duøng ñònh lyù cô baûn:

 

**Baøi toaùn 2:** *Chöùng minh 2 ñöôøng thaúng song song:*

Phöông phaùp: Ngoøai 3 phöông phaùp chöùng minh ñöôøng thaúng song song ñaõ bieát ôû baøi tröôùc, ta coù theâm 2 phöông phaùp môùi laø:

**Phöông phaùp 1:** Duøng ñònh lyù giao tuyeán 2:  ⇒ a//d

**Phöông phaùp 2:**Duøng ñònh lí giao tuyeán 3  

**Baøi toaùn 3:** *Tìm giao tuyeán cuûa 2 maët phaúng:*

Phöông phaùp: Ñeå tìm giao tuyeán cuûa 2 maët phaúng ta tìm moät ñieåm chung vaø phöông phaùp cuûa giao tuyeán.

Tìm moät ñieåm chung cuûa 2 maët phaúng.

Duøng ñònh lyù veà giao tuyeán, chöùng minh giao tuyeán song song vôùi moät ñöôøng thaúng cho tröôùc.

Giao tuyeán laø ñöôøng thaúng qua ñieåm chung vaø song song vôùi ñöôøng thaúng ñoù.

Ta thöôøng aùp duïng ñònh lyù giao tuyeán 2 ñeå tìm phöông cuûa giao tuyeán.

Ta coù: 

⇒ giao tuyeán cuûa (α), (β) laø ñöôøng thaúng qua A song song a.

**B. Bài tập**

**1**. Cho hình chóp SABCD. ABCD là hình bình hành tâm O , M,N là trung điểm SA, SB . Chứng minh

a) AD // (SBC). b) CD // ( SAB) c) MN // (ABCD) d) MN // ( SDC) e) OM //( SCD)

**2**. Cho töù dieän ABCD. Goïi G1, G2 laø troïng taâm cuûa caùc tam giaùc ACD vaø BCD. Chöùng minh G­1G2 song song vôùi caùc maët phaúng (ABC) vaø (ABD).

**3**. Cho hình choùp S.ABCD coù ñaùy ABCD laø hình bình haønh. Goïi M, N ,P laàn löôït laø trung ñieåm cuûa AB vaø CD và SA .

a. Chöùng minh MN song song vôùi caùc maët phaúng (SBC) vaø (SAD).

b. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

c. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

d. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (PMN) .

e. Tìm giao điểm của CP và (SBD).

f. Tìm thiết điện của hình chóp cắt bởi (MNP).

**4**. Cho 2 hình bình haønh ABCD vaø ABEF khoâng cuøng naèm trong moät maët phaúng. Goïi O, O’ laàn löôït laø taâm cuûa ABCD vaø ABEF.

a. Chöùng minh: OO’ // (ADF) vaø OO’//(BCE).

b. Goïi M,N laø 2 ñieåm treân AE vaø BD sao cho  vaø 

i. Tìm giao tuyeán cuûa 2 maët phaúng (AMN) vaø (CDEF).

ii. Chöùng minh: MN//(CDEF).

**5**. Cho hình choùp S.ABCD coù ñaùy ABCD laø hình thang coù ñaùy lôùn laø AD. Goïi M laø moät ñieåm baát kyø treân caïnh AB. (α) laø maët phaúng qua M vaø song song vôùi AD vaø SB.

1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .
2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) .
3. Maët phaúng (α) caét hình choùp S.ABCD theo thieát dieän laø hình gì?.
4. Chöùng minh SC // (α)

**6.** Cho hình choùp S.ABCD, coù ñaùy ABCD laø hình bình haønh. Goïi G laø troïng taâm cuûa tam giaùc SAB vaø I laø trung ñieåm cuûa AB. Laáy ñieåm M treân ñoaïn AD sao cho AD=3AM.

a. Tìm giao tuyeán cuûa 2 maët phaúng (SAD) vaø (SBC).

b. Ñöôøng thaúng qua M vaø song song vôùi AB caét CI taïi N. Chöùng minh raèng NG//(SCD).

c. Chöùng minh: MG//(SCD).

**7** . Cho hình choùp S.ABCD coù ñaùy ABCD laø hình thang, ñaùy lôùn laø AD vaø AD = 2BC. Goïi O laø giao ñieåm cuûa AC vaø BD, G laø troïng taâm cuûa tam giaùc SCD.

a. Chöùng minh raèng OG//(SBC).

b. Goïi M laø trung ñieåm cuûa SD. Chöùng minh raèng CM//(SAB).

c. Giaû söû I naèm trong ñoaïn SC sao cho  Chöùng minh raèng SA//(BID).

**Baøi 4. MAËT PHAÚNG SONG SONG**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

**I. Vò trí töông ñoái giöõa 2 maët phaúng:**

*Tröôøng hôïp 1:* Hai maët phaúng truøng nhau ( α) ≡ (β) ⇔ ( α) ∩ (β) = ( α)

*Tröôøng hôïp 2:* Hai maët phaúng caét nhau ( α) caét (β) ⇔ ( α) ∩ (β) = a

*Tröôøng hôïp 3:* Hai maët phaúng song song ( α) // (β) ⇔ ( α) ∩ (β) = ∅

**II. Ñònh nghóa:** Hai maët phaúng ñöôïc goïi laø song song neáu chuùng khoâng coù ñieåm chung.

**III. Caùc ñònh lyù**

1. Ñònh lyù cô baûn: Ñieàu kieän caàn vaø ñuû ñeå 2 maët phaúng song song laø trong maët phaúng naøy chöùa 2 ñöôøng thaúng caét nhau cuøng song song vôùi maët phaúng kia.

( α) // (β) ⇔ ∃Ox, Oy ⊂ ( α): Ox// ( α), Oy // (β).

*Chuù yù:* Hai maët phaúng song song khoâng coù nghóa laø baát kyø 2 ñöôøng thaúng naèm trong 2 maët phaúng naøy song song vôùi nhau.

Heä quaû: Ñieàu kieän caàn vaø ñuû ñeå 2 maët phaúng song song vôùi nhau laø trong maët naøy chöùa 2 ñöôøng thaúng caét nhau song song vôùi 2 ñöôøng thaúng cuûa maët kia.

2. Ñònh lyù giao tuyeán 4: Cho 2 maët phaúng song song. Maët phaúng naøo caét maët phaúng naøy thì cuõng caét maët phaúng kia vaø 2 giao tuyeán song song vôùi nhau.

Ta coù:  

* 1. Ñònh lyù veà moái lieân heä giöõa ñöôøng thaúng song song maët phaúng vaø 2 maët phaúng song song: Neáu 2 maët phaúng song song vôùi nhau thì moïi ñöôøng thaúng naèm trong maët phaúng naøy ñeàu song song vôùi maët phaúng kia.
  2. Ñònh lyù döïng hình: Qua moät ñieåm A khoâng thuoäc maët phaúng (P) coù duy nhaát moät maët phaúng song song vôùi (P).

**Baøi toaùn 1:*****Chöùng minh 2 maët phaúng song song:***

Phöông phaùp: Ñeå chöùng minh 2 maët phaúng song song ta duøng ñònh lyù cô baûn:  Hay heä quaû cuûa noù: 

**Baøi toaùn 2:*****Chöùng minh ñöôøng thaúng song song vôùi maët phaúng:***

Phöông phaùp: Ñeå chöùng minh ñöôøng thaúng song song maët phaúng ta chöùng minh ñöôøng thaúng naèm trong maët phaúng song song vôùi maët phaúng caàn chöùng minh 

**Baøi toaùn 3:*****Chöùng minh 2 ñöôøng thaúng song song***

Phöông phaùp: Ngoaøi caùc phöông phaùp chöùng minh ñöôøng thaúng song song ñöôøng thaúng ñaõ bieát ôû baøi tröôùc, ta coù theâm moät phöông phaùp môùi laø: duøng ñònh lyù giao tuyeán 4: 

**Baøi toaùn 4:*****Tìm giao tuyeán cuûa 2 maët phaúng :*** Ñeå tìm giao tuyeán cuûa 2 maët phaúng ta tìm moät ñieåm chung vaø phöông cuûa giao tuyeán.

Tìm moät ñieåm chung cuûa hai maët phaúng.

Duøng ñònh lyù veà giao tuyeán, chöùng minh giao tuyeán song song vôùi moät ñöôøng thaúng cho tröôùc.

Giao tuyeán laø ñöôøng thaúng qua ñieåm chung vaø song song vôùi ñöôøng thaúng ñoù.

Ta thöôøng aùp duïng ñònh lyù giao tuyeán 4 ñeå tìm phöông cuûa giao tuyeán.

Ta coù: ⇒ giao tuyeán cuûa (α), (β) laø ñöôøng thaúng qua A song song a.

**B. Bài tập**

**1.** Cho hình choùp S.ABCD coù ñaùy laø hình bình haønh taâm O. Goïi M, N laàn löôït laø trung ñieåm cuûa SA, SD.

a. Chöùng minh raèng: (OMN) // (SBC)

b. Goïi K laø trung ñieåm OM. Chöùng minh raèng: NK//(SBC).

2. Cho hình choùp S.ABCD coù ñaùy laø hình bình haønh taâm O. Goïi M, N laàn löôït laø trung ñieåm cuûa SA vaø CD.

a. Chöùng minh raèng : (OMN) // (SBC)

b. Goïi I laø trung ñieåm cuûa SC, J laø ñieåm treân (ABCD) vaø caùch ñeàu AB, CD. Chöùng minh IJ//(SAB).

**3.** Cho 2 hình vuoâng ABCD vaø ABEF khoâng cuøng naèm trong moät maët phaúng. Goïi M, N, P, Q laàn löôït laø trung ñieåm cuûa AD, BC, BE, AF. Chöùng minh:

a. (ADF) // (BNP)

b. (MNPQ) // (CDE).

**4.** Cho 2 hình vuoâng ABCD vaø ABEF khoâng cuøng naèm trong moät maët phaúng. Treân AC, BF laáy caùc ñieåm M, N sao cho AM = BN . Maët phaúng (α) MN vaø song song vôùi AB caét AD vaø AF laàn löôït taïi M’ vaø N’.

a. Töù giaùc MNN’M’ laø hình gì?

b. Chöùng minh M’N’ // EC

c. Chöùng minh MN//(DEF)

**5.** Cho hình choùp S.ABCD coù ñaùy ABCD laø hình bình haønh. Goïi G laø troïng taâm cuûa tam giaùc SAB vaø I laø trung ñieåm cuûa AB. Laáy ñieåm M treân ñoaïn AD sao cho AD = 3 AM.

a. Tìm giao tuyeán cuûa 2 maët phaúng (SAD) vaø (SBC).

b. Ñöôøng thaúng M vaø song song vôùi AB caét CI taïi N. Chöùng minh raèng NG // (SCD).

c. Chöùng minh: MG//(SCD).

**6.** Cho hình choùp S.ABCD coù ñaùy laø hình bình haønh taâm O. Goïi M, N laàn löôït laø trung ñieåm cuûa SA, SD.

a. Chöùng minh raèng (OMN) // (SBC)

b. Goïi P, Q laø trung ñieåm cuûa AB vaø ON. Chöùng minh raèng PQ song song vôùi (SBC).

**7.** Cho hình choùp S.ABCD, ñaùy laø hình bình haønh taâm O. Goïi M, N laàn löôït laø trung ñieåm cuûa SA vaø CD.

a. Chöùng minh raèng: (OMN) // (SBC)

b. Goïi I laø trung ñieåm cuûa SD, J laø moät ñieåm treân (ABCD) vaø caùch ñeàu AB vaø CD. Chöùng minh : IJ // (SAB).

c. Giaû söû tam giaùc SAD, ABC ñeàu caân taïi A. Goïi AE , AF laø caùc ñöôøng phaân giaùc trong cuûa caùc tam giaùc ACD vaø SAB. Chöùng minh raèng EF // (SAC).

**Baøi 4. HÌNH LAÊNG TRUÏ – HÌNH CHOÙP CUÏT**

**A.Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| **I. Hình laêng truï**  *1.Ñònh nghóa:* Hình laêng truï laø hình coù 2 maët naèm trong 2 maët phaúng song song, goïi ñaùy vaø taát caû caùc caïnh khoâng thuoäc ñaùy ñeàu song song vôùi nhau.  **2. Tính chaát**  Caùc caïnh beân song song vaø baèng nhau  Caùc maët beân laø nhöõng hình bình haønh  Hai ñaùy laø 2 ña giaùc baèng nhau  **3. Phaân loaïi**  Neáu ñaùy cuûa laêng truï laø tam giaùc, töù giaùc, nguõ giaùc,… thì laêng truï töông öùng goïi laø laêng truï tam giaùc, laêng truï töù giaùc, laêng truï nguõ giaùc,…  **4. Hình hoäp**  Hình laêng truï coù ñaùy laø hình bình haønh ñöôïc goïi laø hình hoäp.  Hình hoäp coù caùc maët beân laø hình chöõ nhaät ñöôïc goïi laø hình hoäp chöõ nhaät.  Hình hoäp chöõ nhaät coù caùc caïnh baèng nhau goïi laø hình laäp phöông.  **II. Hình choùp cuït**  **1. Ñònh nghóa:** Hình choùp cuït laø phaàn hình choùp naèm giöõa ñaùy vaø moät maët phaúng caét caùc caïnh cuûa hình choùp song song vôùi ñaùy.  **2. Tính chaát**  Hai ñaùy laø hai ña giaùc coù caùc caïnh töông öùng song song vaø tæ soá caùc caïnh töông öùng baèng nhau.  Caùc maët beân laø nhöõng hình thang.  Caùc ñöôøng thaúng chöùa caùc caïnh beân ñoàng quy taïi moät ñieåm. |

**B. Bài tập**

**1**. Cho hình laêng truï ABC.A’B’C’. Goïi H laø trung ñieåm cuûa A’B’.

a. Chöùng minh CB’//(AHC’).

b. Tìm giao tuyeán d cuûa (AB’C’) vaø (ABC).

**2.** Cho hình laêng truï ABC.A’B’C’. Goïi M, M’ laàn löôït laø trung ñieåm cuûa BC vaø B’C’.

a. Chöùng minh raèng : AM// A’M’.

b. Tìm giao ñieåm cuûa maët phaúng (AB’C’) vôùi ñöôøng thaúng A’M.

c. Tìm giao tuyeán d cuûa 2 maët phaúng (AB’C’) vaø (BA’C’).

d. Tìm giao ñieåm G cuûa d vaø (AA’M). Chöùng minh G laø troïng taâm cuûa tam giaùc AB’C’.

**3.** Cho hình hoäp ABCD. A’B’C’D’. Hai ñieåm M, N laàn löôït naèm treân 2 caïnh AD vaø CC’ sao cho 

a. Chöùng minh: MN // (ACB’).

b. Goïi (α) laø maët phaúng qua MN vaø song song (ACB’). Xaùc ñònh thieát dieän taïo bôûi (α) vaø hình hoäp.

**4.** Cho hình laêng truï ABC.A’B’C’. Goïi I, K, G laàn löôït laø troïng taâm cuûa caùc tam giaùc ABC, A’B’C’, AC’C.

a. Chöùng minh : (IKG)//(BB’,CC’)

b. Xaùc ñònh thieát dieän cuûa laêng truï vaø maët phaúng (IKG).

c. Chöùng minh : (A’KG) // (AIB’)

**5.** Cho hình hoäp ABCD.A’B’C’D’

a. Chöùng minh : (BDA’) // (B’D’C)

b. Chöùng minh ñöôøng cheùo AC’ qua troïng taâm G1; G2 cuûa 2 tam giaùc BDA’ vaø B’D’C.

c. Chöùng minh G1, G2 chia ñoaïn AC’ thaønh 3 phaàn baèng nhau.

d. Goïi O, I laàn löôït laø taâm cuûa hình bình haønh ABCD vaø ACC’A’. Xaùc ñònh thieát dieän cuûa maët phaúng (A’IK) vaø hình hoäp.

**CHÖÔNG 3: QUAN HEÄ VUOÂNG GOÙC**

**§1: VECTÔ TRONG KHOÂNG GIAN**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| **I. Ñònh nghóa:**  Vectô trong khoâng gian laø moät ñoaïn thaúng ñònh höôùng. Ñoù laø ñoaïn thaúng ñöôïc chæ roõ ñieåm ñaàu vaø ñieåm cuoái.  Caùc khaùi nieäm coù lieân quan ñeán vectô, ñoä daøi cuûa vectô, hai vectô cuøng phöông, hai vectô baèng nhau, vectô – khoâng ñöôïc ñònh nghóa töông töï nhö trong maët phaúng.  **II. Pheùp coäng hai vectô trong khoâng gian:**  **1. Ñònh nghóa:** Pheùp coäng 2 vectô trong khoâng gian ñöôïc ñònh nghóa töông töï nhö pheùp coäng 2 vectô trong maët phaúng.  **Tính chaát:**  (i)  (giao hoaùn) (ii)  (keát hôïp) (iii)  **2.Caùc ñònh lyù:**  **a.Quy taéc ba ñieåm** ( heä thöùc Chasles): A, B, C ta coù:  **b.Quy taéc hình bình haønh:**  ABCD hình bình haønh  **III.Pheùp nhaân vectô vôùi moät soá:**  **1.Ñònh nghóa:** Pheùp nhaân vectô vôùi moät soá trong khoâng gian ñöôïc ñònh nghóa töông töï nhö pheùp nhaân vectô vôùi moät soá trong maët phaúng.  **Tính chaát:**  1.  ;  2.  3. (k + 1)  4.  **2.Caùc ñònh lyù:**  **a.Quy taéc trung ñieåm**: Cho I laø trung ñieåm cuûa AB vaø O laø ñieåm tuyø yù. Ta luoân coù:  **b.Quy taéc troïng taâm:**  Goïi G laø troïng taâm tam giaùc ABC, ta coù:  i.  ii.  **IV.Söï ñoàng phaúng cuûa 3 vectô**  **1.Ñònh nghóa:**Ba vectô ñöôïc goïi laø ñoàng phaúng neáu 3 ñöôøng thaúng chöùa chuùng cuøng song song vôùi moät maët phaúng.  *Chuù yù:* Cho 3 vectô . Laáy moät ñieåm O tuøy yù, döïng . Khi ñoù  ñoàng phaúng khi vaø chæ khi 4 ñieåm O, A, B, C ñoàng phaúng.  **2.Ñònh lyù 1:**Cho 3 vectô  trong ñoù  khoâng cuøng phöông. Khi ñoù:  ñoàng phaúng .  **3.Ñònh lyù 2:**Cho 3 vectô khoâng ñoàng phaúng . Khi ñoù vôùi moïi vectô  ta ñeàu coù  trong ñoù  xaùc ñònh moät caùch duy nhaát.  **V.Tích voâ höôùng cuûa 2 vectô trong khoâng gian:**  **1.Ñònh nghóa:** Cho hai vectô .Tích voâ höôùng cuûa  vaø  laø moät soá thöïc, kyù hieäu , ñöôïc xaùc ñònh nhö sau:  **2.Tính chaát:**  i.  (giao hoaùn)  ii.  (Phaân phoái ñ/v pheùp coäng)  iii. |

**PHÖÔNG PHAÙP GIAÛI TOAÙN**

***Baøi toaùn 1:*** *Chöùng minh ñaúng thöùc vectô:*

Phöông phaùp:

Söû duïng quy taéc 3 ñieåm  ñeå ñöa caùc vectô veà cuøng goác. Khoâng neân choïn goác laø trung ñieåm hay troïng taâm.

Duøng quy taéc hình bình haønh, quy taéc trung ñieåm, quy taéc troïng taâm ñeå bieán ñoåi thaønh ñaúng thöùc vectô ñuùng

***Ví duï 1****:* Cho töù dieän ABCD. Goïi E, F laø trung ñieåm cuûa AB vaø CD. G laø trung ñieåm EF (G goïi laø troïng taâm cuûa töù dieän). Chöùng minh: 

***Baøi toaùn 2:*** *Phaân tích moät vectô theo caùc vectô cuøng goùc cho tröôùc:*

Phöông phaùp: Phaân tích vectô  theo caùc vectô  cuøng goác

Bieán ñoåi caùc giaû thieát thaønh heä thöùc vectô

Bieán ñoåi vectô  veà goác chung.

Trieät tieâu trung ñieåm, troïng taâm.

Thay theá caùc giaû thieát vaøo.

***Ví duï 2:***Cho töù dieän ABCD. Treân caùc caïnh AB, AC, AD laàn löôït laáy caùc ñieåm M, N, P sao cho MA=2MB, AC=4AN, PD=3PA. Goïi G laø troïng taâm tam giaùc MNP. Phaân tích  theo .

***Baøi toaùn 3:*** *Moät soá aùp duïng cuûa tích voâ höôùng:*

Chöùng minh 2 vectô vuoâng goùc: Ñeå chöùng minh 2 vectô  vuoâng goùc, ta chöùng minh .

Tính ñoä daøi ñoaïn thaúng: Ñeå tính ñoä daøi ñoaïn thaúng AB ta tính .

Tính goùc taïo bôûi 2 vectô: Ta duøng coâng thöùc 

***Ví duï 3:***Cho töù dieän ABCD.

a. Chöùng minh raèng: 

b. Chöùng minh raèng neáu töù dieän ABCD coù 2 caëp caïnh ñoái vuoâng goùc thì caëp caïnh ñoái hou 3 cuõng vuoâng goùc.

**B. Bài tập**

1. Cho hình hoäp ABCD.A’B’C’D’. Laáy ,  sao cho , . Tính  theo caùc vectô .
2. Cho hình laäp phöông ABCD.A’B’C’D’

a. M, N laàn löôït laø trung ñieåm cuûa AD vaø BB’. Chöùng minh .

b. Goïi E, F laàn löôït laø 2 ñieåm thuoäc AD vaø BB’ sao cho AE=BF. Chöùng minh  ñoàng phaúng.

1. Cho hình hoäp ABCD.A’B’C’D’. Goïi I, K laàn löôït laø taâm cuûa hình bình haønh AA’B’B vaø BCC’B’. Chöùng minh raèng:  ñoàng phaúng.
2. Cho hình choùp S.ABCD coù ñaùy laø hình vuoâng. Taát caû caùc caïnh cuûa hình choùp ñeàu baèng a. Tính caùc tích voâ höôùng sau: , , .

**§2: HAI ÑÖÔØNG THAÚNG VUOÂNG GOÙC**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| **I.Goùc giöõa 2 ñöôøng thaúng trong khoâng gian** : Goùc giöõa 2 ñöôøng thaúng trong khoâng gian laø goùc hôïp bôûi hai ñöôøng thaúng cuøng phöông vôùi chuùng, xuaát phaùt töø cuøng moät ñieåm. Kyù hieäu:  *Chuù yù:*  -Ñeå xaùc ñònh goùc giöõa 2 ñöôøng thaúng, ta coù theå choïn ñieåm O thuoäc moät trong 2 ñöôøng thaúng, qua O döïng ñöôøng thaúng song song vôùi ñöôøng thaúng coøn laïi.  -  **II.Hai ñöôøng thaúng vuoâng goùc:**  **Ñònh nghóa:** Hai ñöôøng thaúng goïi laø vuoâng goùc neáu goùc cuûa chuùng laø .    ***Chuù yù:***    b) Hai ñöôøng thaúng vuoâng goùc coù theå cheùo nhau. |

**PHÖÔNG PHAÙP GIAÛI TOAÙN**

***Baøi toaùn 1:*** *Tính goùc giöõa 2 ñöôøng thaúng a vaø b:*

Phöông phaùp:

B1: Döïng goùc taïo bôûi a vaø b:

Choïn ñieåm O tuøy yù (thöôøng ta choïn O thuoäc moät trong 2 ñöôøng thaúng a, b)

Qua O döïng .

Ta coù 

B2: Tính goùc:

Tính goùc  baèng caùch ñaët vaøo moät tam giaùc roài duøng ñònh lyù haøm cos, caùc heä thöùc löôïng trong tam giaùc vuoâng ñeå tính.

Neáu  thì 

Neáu  thì 

***Ví duï 1:***Cho hình choùp S.ABC coù SA=SB=SC=AB=AC=a vaø BC=. Tính goùc taïo bôûi 2 ñöôøng thaúng SC vaø AB.

***Baøi toaùn 2:*** *Chöùng minh 2 ñöôøng thaúng vuoâng goùc:*

|  |
| --- |
| Phöông phaùp: Ñeå chöùng minh 2 ñöôøng thaúng vuoâng goùc ta thöôøng xaùc ñònh goùc giöõa 2 ñöôøng thaúng ñoù roài duøng ñònh lyù Py-ta-go ñeå chöùng minh goùc ñoù laø goùc vuoâng |

***Ví duï 2:***Cho hình choùp S.ABC coù SA=SB=SC vaø . Chöùng minh raèng: 

**B. Bài tập**

1. Cho töù dieän ABCD, goïi M, N laø trung ñieåm cuûa BC vaø AD. Bieát AB=CD=2a vaø . Tính goùc taïo bôûi AB vaø CD.
2. Cho töù dieän ABCD ñeàu caïnh a. Goïi I, J, K laø trung ñieåm cuûa BC, CA, AD.

a. Tính IK

b. Chöùng minh tam giaùc IJK vuoâng caân. Suy ra caùc caëp caïnh ñoái trong töù dieän ñeàu vuoâng goùc vôùi nhau.

1. Cho töù dieän ABCD coù AB=CD=a, AC=BD=b, AD=BC=c.

a. Chöùng minh caùc ñoaïn noái trung ñieåm caùc caëp caïnh ñoái thì vuoâng goùc vôùi 2 caïnh ñoù.

b. Tính cos goùc taïo bôûi AB vaø CD.

1. Cho töù dieän ABCD ñeàu caïnh a, goïi M laø trung ñieåm cuûa BC, O laø taâm ñöôøng troøn ngoaïi tieáp tam giaùc BCD. Tìm goùc taïo bôûi 2 ñöôøng thaúng AB vaø DM, goùc taïo bôûi 2 ñöôøng thaúng AO vaø CD.
2. Cho hình choùp S.ABCD coù ñaùy ABCD laø hình vuoâng. Taát caû caùc caïnh beân vaø caïnh ñaùy ñeàu baèng a. Chöùng minh:  vaø 

**§3: ÑÖÔØNG THAÚNG VUOÂNG GOÙC MAËT PHAÚNG**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

**Baøi toaùn 1: Chöùng minh ñöôøng thaúng vuoâng goùc maët phaúng:**

Phöông phaùp : Ñeå chöùng minh ñöôøng thaúng vuoâng goùc maët phaúng ta chöùng minh ñöôøng thaúng vuoâng goùc vôùi 2 ñöôøng thaúng naèm trong maët phaúng. 

**Baøi toaùn 2: Chöùng minh 2 ñöôøng thaúng vuoâng goùc:**

Phöông phaùp: Ñeå chöùng minh 2 ñöôøng thaúng vuoâng goùc ta chöùng minh ñöôøng thaúng naøy naèm trong maët phaúng vuoâng goùc vôùi ñöôøng thaúng kia. 

***Ví duï 2:***Cho töù dieän S.ABC coù tam giaùc ABC vuoâng taïi B vaø .

a. Chöùng minh: 

b. Chöùng minh tam giaùc SBC laø tam giaùc vuoâng taïi B.

c. Goïi AH laø ñöôøng cao cuûa tam giaùc SAB. Chöùng minh: .

**Bài toán 3 :** **Phöông phaùp xaùc ñònh goùc giữa đường thẳng và maët phaúng**

|  |
| --- |
| *Tröôøng hôïp 1: Đường thẳng vuông góc với mp thì góc giữa chúng bằng 900*  *Tröôøng hôïp 2: Đường thẳng không vuông góc với mp thì*  B1: Tìm a’ là hình chiếu của a lên (P) .  B2: Góc giữa đường thẳng a và mp (P) là góc giữa đường thẳng a và a’ ( hình chiếu của a lên (P) ) |

**B. Bài tập**

1. Cho hình chóp SABCD , ABCD là hình vuông cạnh a , . Chứng minh

a) b)  c) 

1. Cho hình chóp SABCD , ABCD là hình vuông cạnh a , , SB = 2a .Goi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B lên SA , SC . Chứng minh

a) b)  c)  d)

e) Xác định và tính góc giữa SC và (ABCD) .

f) Xác định và tính góc giữa SD và (ABCD) .

g) Xác định và tính góc giữa SO và (ABC) .

h) Xác định và tính góc giữa AC và (SBD) .

1. Cho töù dieän ABCD coù 2 maët ABC vaø DBC laø 2 tam giaùc caân chung ñaùy BC, goïi I laø trung ñieåm BC.

a. Chöùng minh  b. Keû ñöôøng cao AH trong tam giaùc ADI. Chöùng minh 

1. Cho hình choùp SABCD coù ñaùy ABCD laø hình vuong taâm O, cạnh a , vôùi SA = SC, SB = SD, SB = 2a , Chöùng minh:

a.  b.  c. Tính góc giữa đường thẳng SD và ( ABCD).

1. Cho töù dieän ABCD coù . Goïi H laø tröïc taâm tam giaùc BCD. Chöùng minh:

a.  b. 

1. Cho hình choùp SABC coù  vaø caùc caïnh coøn laïi ñeàu baèng a. Goïi I laø trung ñieåm BC.

a. Chöùng minh:  b.Chöùng minh c. Tính góc giũa SA và (ABC).

1. Cho töù dieän OABC coù caùc caïnh OA, OB, OC ñoâi 1 vuoâng goùc vôùi nhau. Goïi H laø ñieåm thuoäc (ABC) sao cho . Chöùng minh raèng:

a.  b. H laø tröïc taâm tam giaùc ABC c. 

1. Cho hình choùp SABCD coù ñaùy ABCD laø hình vuoâng taâm O, cạnh 2a ,  . Goïi H, I, K laàn löôït laø hình chieáu vuoâng goùc cuûa A treân SB, SC, SD.

a. Chöùng minh: 

b. Chöùng minh AH, AK cuøng vuoâng goùc vôùi SC. Töø ñoù suy ra 3 ñöôøng thaúng AH, AK ,AI cuøng chöùa trong 1 maët phaúng.

c. Chöùng minh:  töø ñoù suy ra .

d. Tính góc giữa SD và ( ABCD). e . Tính góc giữa SC và ( ABCD).

f. Tính góc giữa CB và ( SAB). g. Tính góc giữa AC và ( SAB).

1. Cho töù dieän SABC coù . Goïi H, K laàn löôït laø tröïc taâm tam giaùc ABC vaø SBC. Chöùng minh raèng: a. AH, SK vaø BC đồng quy. b.  c. 

8. Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc (ABCD), . Tính góc giữa:

a) SC và (ABCD) b)SC và (SAB) c)SB và (SAC) d)ACvà (SBC).

9. Cho hình chóp SABC, SA vuông góc đáy, tam giác ABC vuông tại B, AB = a, AC = 2a, . Tính góc giữa:

a) SB và (ABC) b)SC và (ABC) c)SC và (SAB)

§**4 : HAI MAËT PHAÚNG VUÔNG GÓC**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| **I.Ñònh nghóa:**  Goùc giöõa 2 maët phaúng laø goùc taïo bôûi 2 ñöôøng thaúng laàn löôït vuoâng goùc vôùi 2 maët phaúng. Kyù hieäu laø:    **II.Phöông phaùp xaùc ñònh goùc taïo bôûi 2 maët phaúng:**  *Tröôøng hôïp 1: Hai maët phaúng song song:* Neáu (P)//(Q) thì  *Tröôøng hôïp 2: Hai maët phaúng caét nhau:*  B1: Tìm giao tuyeán  cuûa (P) vaø (Q).  B2: Döïng maët phaúng  vuoâng goùc vôùi .  B3: Tìm giao tuyeán a cuûa (P) vaø , giao tuyeán b cuûa (Q) vaø . Goùc giöõa a vaø b laø goùc giöõa (P) vaø (Q).  **III. Ñònh lyù veà dieän tích hình chieáu:**  Goïi S laø dieän tích cuûa ña giaùc (H) trong maët phaúng (P) vaø S’ laø dieän tích hình chieáu (H’) cuûa (H) treân (P’). Khi ñoù ta coù:  ***IV. Chöùng minh 2 maët phaúng vuoâng goùc:***  Phöông phaùp : Ñeå chöùng minh 2 maët phaúng vuoâng goùc ta chöùng minh maët phaúng naøy chöùa ñöôøng thaúng vuoâng goùc vôùi maët phaúng kia. |

**B.Bài tập**

1. Cho hình choùp S.ABCD coù ñaùy laø hình thang vuoâng taïi A, B vôùi AB = BC = a, AD = 2a,  vaø . Goïi I laø trung ñieåm SC.

a. Chöùng minh: 

b. Tính goùc giöõa 2 maët phaúng (ABCD) vaø (SCD)

1. Cho hình choùp S.ABC coù ñaùy laø tam giaùc vuoâng taïi C, maët beân SAC laø tam giaùc ñeàu vaø naèm trong maët phaúng vuoâng goùc vôùi maët phaúng (ABC).

a. Chöùng minh: 

b. Goïi I laø trung ñieåm cuûa SC. Chöùng minh raèng 

1. Cho töù dieän ABCD coù caïnh AB vuoâng goùc vôùi maët phaúng (BCD). Trong tam giaùc BCD, veõ ñöôøng cao BE vaø DF caét nhau taïi O. Trong maët phaúng (ACD) veõ DK vuoâng goùc AC taïi K. Goïi H laø tröïc taâm cuûa tam giaùc ACD.

a. Chöùng minh , 

b. Chöùng minh .

1. Cho hình choùp S.ABCD coù ñaùy laø hình thoi taâm I, caïnh a vaø goùc A baèng 60, caïnh  vaø vuoâng goùc vôùi maët phaúng (ABCD).

a. Chöùng minh 

b. Trong tam giaùc SAC keû IK vuoâng goùc vôùi SA taïi K. Tính ñoä daøi IK.

c. Chöùng minh . Töø ñoù suy ra .

1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh *a*,  H là trung điểm của AB, SH = HC, SA = AB. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD) .
2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD cạnh a góc BAD = 600 và SA = SB = SD = 
3. CMR: (SAC)(ABCD)
4. CMR SBBC
5. Tính tan của góc giữa hai mp(SBD) và (ABCD)
6. Cho hình chóp S.ABCD có (SAB) và (ABCD) nằm trong hai mp vuông góc, ABCD là hình vuông cạnh a, tam giác SAB cân tại S. Gọi M,N là trung điểm của AB và DC
7. Chứng minh DC(SMN)
8. Tính góc giữa đường thẳng SN với mp(ABCD)
9. Tính góc giữa 2mp(SMC) và (ABCD)

**KHOẢNG CÁCH**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| * Tính các khoảng cách giữa một điểm và mặt phẳng   *Phương pháp :* Để tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng , ta phải đi tìm đoạn vuông góc vẽ từ điểm đó đến mặt phẳng , ta hay dùng một trong hai cách sau :   * *Cách 1 :* d(M, (P)) = MH   + - Tìm một mặt phẳng *(Q)* chứa *M* và vuông góc với *(P)* .     - Xác định .     - Dựng ,     - suy ra *MH* là đoạn cần tìm .      * *Cách 2:* Dựng    + *Chú ý :* * Nếu . * Nếu * Khoảng cách từ một đường thẳng đến một mặt phẳng: * *Khi*  . * *Khi*   với  .   * Khoảng cách từ một mặt phẳng đến một mặt phẳng : * *Khi*  . * *Khi*    với  . * Khoảng cách giữa hai đường thẳng * *Khi*  . * *Khi*  với  .   ***Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau :***   * Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau  và  là đường thẳng  cắt ở và cắt   ở  đồng thời vuông góc với cả và . * Đoạn  được gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường  thẳng chéo nhau và . * Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn  vuông góc chung của hai đườngthẳng đó .   ***Phương pháp :***   * *Cách 1 :* Dựng mặt phẳng *(P)* chứa đường thẳng *a* và song song với *b* .Tính khoảng cách từ *b* đến *mp(P) .* * *Cách 2 :* Dựng hai mặt phẳng song song và lần lượt chứa hai đường thẳng . Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là khoảng cách cần tìm . * Cách 3 : Dựng đoạn vuông góc chung và tính độ dài đoạn đó .   Cách dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau :   * *Cách 1:* Khi * Dựng một tại *H* . * Trong *(P)* dựng tại *K* . * Đoạn *HK* là đoạn vuông góc  chung của *a*  và *b* . * *Cách 2:* * Dựng . * Dựng , bằng cách lấy  dựng đoạn  , lúc đó *a’* là  đường thẳng đi qua *N* và song song *a* . * Gọi , dựng   là đoạn vuông góc chung cần tìm . |

**B. Bài tập**

**1.** Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình vuông cạnh a, , SA = 2a,

a) Tính  b) Tính  c.Tính d( B,(SCD))

**2.** Cho lăng trụ ABCD.A’B’C’D’, ABCD là hình chữ nhật, . Hình chiếu vuông góc của A’ trên (ABCD) trùng với giao điểm của AC và BD. Tính 

**3.** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, ,  là tam giác đều cạnh a, . Tính 

**4.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, AB = AD = a, CD = 2a, , SD = a.

a) Tính  b) Tính 

**5.** Cho hình chóp  có đáy  là hình thang vuông tại  và ,, các mặt phẳng  và  cùng vuông góc với mặt phẳng .  
 a) Chứng minh  .  
 b) Chứng minh .  
 c) Chứng minh các mặt bên của hình chóp  đều là các tam giác vuông .  
 d) Khi  . Tính góc giữa  với mặt phẳng  và góc giữa hai mặt phẳng  và  .   
 e) Tính các khoảng cách : 

**6.** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, BA = 3a, BC = 4a, . Tính 

**7.** Cho tứ diện ABCD có AB = a, tất cả các cạnh còn lại bằng 3a. Tính 

**8.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD, H là giao điểm của CN và DM, . Tính 

**9.** Cho hình lăng trụ đứng ABC.A’B’C’, đáy ABC là tam giác đều cạnh a, . Tính 

**10.** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên bằng . Tính 

**11.** Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tam giác SAD là tam giác đều, (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính 

**ÔN TẬP CUỐI NĂM**

**1.** Cho hình chóp tam giác S.ABC có ABC vuông cân *tại A, AB = , SC ⊥ (ABC), SC = 2a.* M là trung điểm của BC.

1. Chứng minh: AM ⊥ SB.
2. Gọi H là hình chiếu của M trên SB. Chứng minh: (SAB) ⊥ (AMH)
3. Tính tang của góc hợp bởi (SBC) và (SBA).
4. Tính khoảng cách từ M đến (SAB).

**2.** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a.

1. Chứng minh: BD ⊥ SC
2. Tình cos góc giữa mặt bên và mặt đáy.
3. Tính của góc giữa cạnh bên và mặt đáy.
4. Tính cosin của góc hợp bởi hai mặt bên.
5. Tính khoảng cách giữa BD và SC.
6. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAD).

**3.** Cho hình chóp tam giác S.ABC có ABC là tam giác đều cạnh *2a, SB* ⊥ (ABC)*, SB = a.* Hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC.

1. Chứng minh: AC ⊥ SN.
2. Chứng minh: (SAB) ⊥ (SCM)
3. Tính góc hợp bởi (SCM) và (CBA).
4. Tính tang của góc hợp bởi (SCA) và (SBA).
5. Tính khoảng cách từ A đến (SCM).

**4 .** Cho hình chóp tam giác S.ABC có ABC là tam giác vuông tại C, góc ABC = 300, SA *⊥ (ABC),*

*SA = AC = a.* Hai điểm H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SC, SB.

1. Chứng minh SBC là tam giác vuông
2. Chứng minh: (AHK) ⊥ (SBC).
3. Chứng minh: (AHK) ⊥ (SAB)
4. Tính sin của góc hợp bởi (SAB) và (SBC).
5. Tính khoảng cách từ H đến (SAB).

**5.** Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình chữ nhật, AB = , AD = *2a*. Điểm H là trung điểm của AD, SH ⊥ (ABCD) và SH = *a*.

1. Chứng minh SAD là tam giác vuông cân.
2. Chứng minh: (SAD) ⊥ (SAB).
3. Tính góc hợp bởi (SAB) và (ABCD), (SBC) và (ABCD).
4. Tính khoảng cách giữa AB và SD.
5. Tính khoảng cách giữa AD và SB.

**6 .** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, SA⊥(ABCD). Biết SA = AB = *a, BC =* .

1. Chung minh: BD⊥SC và AD⊥SB.
2. Chứng minh: (SAD) ⊥(SCD).
3. Tính góc giữa SB và (SAD).
4. Tính tang của góc giữa (SBD) và (ABCD).
5. Tính khoảng cách giữa AB và SC.
6. Tính khoảng cách từ C đến (SBD).

**7**. Cho hình chóp  có đáy  là hình thang vuông tại  và , các mặt phẳng  và  cùng vuông góc với mặt phẳng .  
a) Chứng minh  .  
b) Chứng minh .  
c) Chứng minh các mặt bên của hình chóp  đều là các tam giác vuông .  
 d) Khi  . Tính góc giữa  với mặt phẳng  và góc giữa hai mặt phẳng  và  .   
e) Tính các khoảng cách :  .