

CHƯƠNG I ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

BÀI 5 :

KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

A - KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I - Khảo sát hàm đa thức

Sơ đồ khảo sát hàm đa thức

B1: Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.

B2: Tính đạo hàm y' , tìm nghiệm x_0 của phương trình $y' = 0$, tính $y(x_0)$.

B3: Lập bảng biến thiên

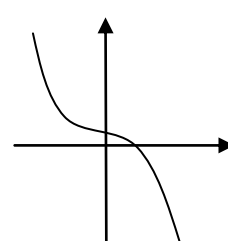
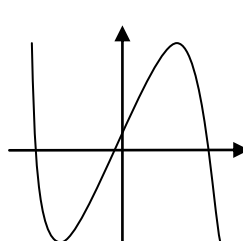
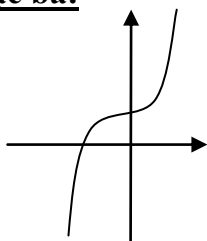
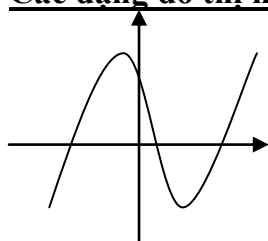
x	Ghi tập xác định và nghiệm của phương trình $y' = 0$
$f'(x)$	Xét dấu y'
$f(x)$	Ghi khoảng tăng giảm, cực trị của hàm số

B4: Đối với hàm bậc 3. Tính đạo hàm cấp 2, tìm nghiệm $y' = 0 \Rightarrow$ Điểm uốn.

B5: Tìm điểm đặc biệt (thường lấy 5 điểm đối xứng nhau qua điểm uốn)

B6: Vẽ đồ thị

Các dạng đồ thị hàm bậc ba:



$$\begin{cases} y' = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt} \\ a > 0 \end{cases}$$

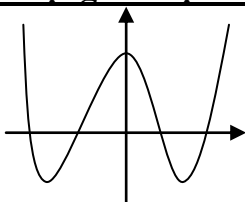
$$\begin{cases} y' \geq 0 \forall x \\ a > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt} \\ a < 0 \end{cases}$$

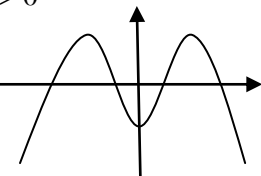
$$\begin{cases} y' \leq 0 \forall x \\ a < 0 \end{cases}$$

Chú ý: Đồ thị hàm bậc ba nhận điểm uốn làm tâm đối xứng.

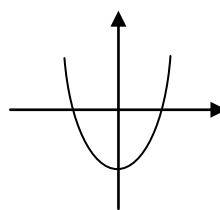
Các dạng đồ thị hàm trùng phương



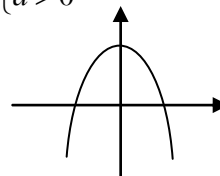
$$\begin{cases} y' = 0 \text{ có 3 nghiệm phân biệt} \\ a > 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y' = 0 \text{ có 3 nghiệm phân biệt} \\ a < 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y' = 0 \text{ có 1 nghiệm đơn} \\ a > 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y' = 0 \text{ có 1 nghiệm đơn} \\ a < 0 \end{cases}$$

Chú ý: Đồ thị hàm trùng phương nhận trục tung Oy làm trục đối xứng.

II. Khảo sát hàm nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

B1: TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\}$ (Nghiệm mẫu)

B2: Tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c}$. Tiệm cận đứng $x = \frac{-d}{c}$.

B3: Tính $y' = \frac{a.d - b.c}{(cx + d)^2} \Rightarrow$ tính đơn điệu của hàm số.

B4: Lập bảng biến thiên

x	Ghi TXĐ và nghiệm mẫu
$f'(x)$	Xét dấu y'
$f(x)$	Vẽ mũi tên tăng hoặc giảm và ghi các giới hạn

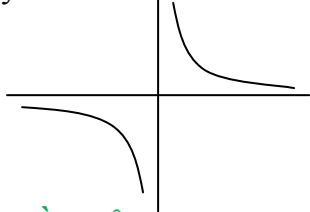
B5: Tìm giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ , lấy thêm 2 điểm đặc biệt để vẽ

B6: Vẽ đồ thị.

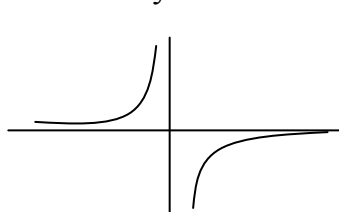
Lưu ý: Đồ thị nhận giao điểm hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Dạng đồ thị hàm $y = \frac{ax + b}{cx + d}$.

$y' < 0 \quad \forall x \in D$



$y' > 0 \quad \forall x \in D$



B. BÀI TẬP

Dạng 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số bậc ba.

Bài 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

a) $y = x^3 - 3x$.

Giải: TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1).$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -2 \\ x = -1 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên: .

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

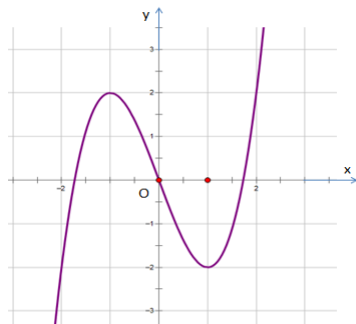
Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên $(-1; 1)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $(-1; 2)$, cực tiểu tại điểm $(1; -2)$.

Điểm đặc biệt

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	2	0	-2	2

Đồ thị



b) $y = -x^3 + 3x$.

c) $y = x^3 - 3x - 3$ Học sinh làm tương tự câu a.

d) $y = x^3 + x - 2$.

Giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 + 1$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ pt vô nghiệm.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$	
y'	+	+	+	
y	$-\infty$			$+\infty$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$

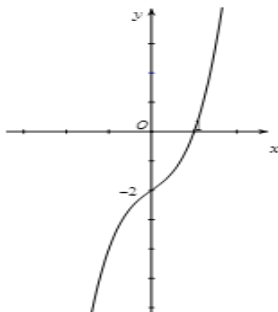
Hàm số không có cực trị.

Tính $y'' = 6x$. Cho $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = -2$

Điểm đặc biệt

x	-1	0	1
y	-4	-2	0

Đồ thị



Bài 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số .

a) $y = -2x^4 + 4x^2 - 1$

Giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = -8x^3 + 8x = -8x(x^2 - 1).$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x = \pm 1 \Rightarrow y = 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	0	-
y	$-\infty \nearrow 1 \searrow -1 \nearrow 1 \searrow -\infty$				

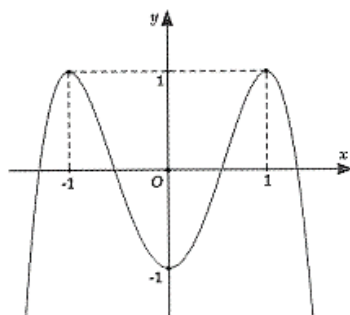
Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$, nghịch biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$

Hàm số đạt cực đại tại các điểm $(-1; 1)$; $(1; 1)$, cực tiểu tại điểm $(0; -1)$.

Điểm đặc biệt

x	-2	-1	0	1	2
y	-17	1	-1	1	-17

Đồ thị



b) $y = x^4 - 2x^2 - 3$

Giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1).$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -3 \\ x = \pm 1 \Rightarrow y = -4 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+	0	+
y	$+\infty \searrow -4 \nearrow -3 \searrow -4 \nearrow +\infty$				

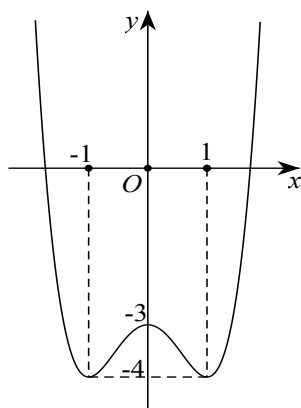
Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$, đồng biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$

Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $(-1; -4)$; $(1; -4)$, cực đại tại điểm $(0; -3)$.

Điểm đặc biệt

x	-2	-1	0	1	2
y	5	-4	-3	-4	5

Đồ thị



c) $y = -x^4 - 2x^2 + 3$

Giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = -4x^3 - 4x = -4x(x^2 + 1).$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow -4x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 3.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+	-	-
y	$-\infty$	3	$-\infty$

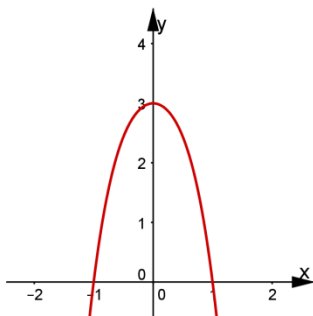
Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$, nghịch biến trên $(0; +\infty)$

Hàm số đạt cực đại tại các điểm $(0; 3)$;

Điểm đặc biệt

x	-1	0	1
y	0	3	0

Đồ thị



Bài 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số .

a) $y = \frac{x+1}{x-1}$.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Tiệm cận đứng $x = 1$.

Tiệm cận ngang $y = 1$.

$$y' = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'	+		-		-
y	↘			↘	
			$-\infty$		1

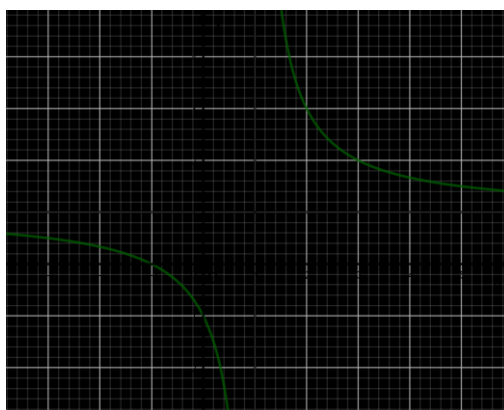
Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

Điểm đặc biệt

x	-1	0	1	2	3
y	0	-1		3	2

Đồ thị



b) $y = \frac{x-1}{2x+1}$.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$.

Tiệm cận đứng $x = -\frac{1}{2}$.

Tiệm cận ngang $y = \frac{1}{2}$.

$$y' = \frac{3}{(2x+1)^2} > 0, \forall x \neq -\frac{1}{2}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'	+		+		+
y	↗			↗	
			$+\infty$		$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$		$-\infty$		

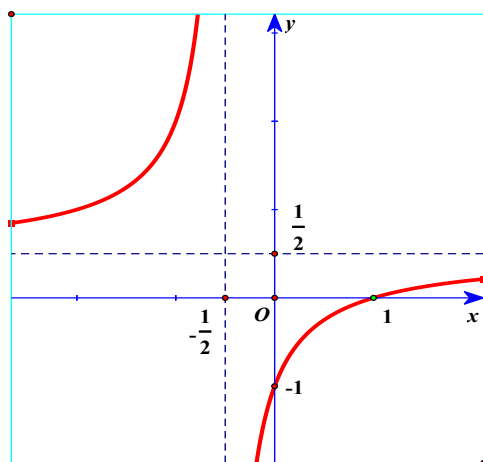
Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

Điểm đặc biệt

x	-1	0	1/2	1	2
y	2	-1		0	1/5

Đồ thị



Nhận xét : Đồ thị nhận giao điểm 2 đường tiệm cận $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ làm tâm đối xứng.

c) $y = \frac{2x+1}{x+1}$. Học sinh làm tương tự.

d) $y = \frac{1-2x}{x+1}$

III. Khảo sát hàm số chưa dấu giá trị tuyệt đối.

Dạng 1: Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$.

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}$$

◆ B1: Vẽ đồ thị (C): $y = f(x)$.

◆ B2: Khi $f(x) \geq 0$: $|f(x)| = f(x) \Rightarrow$ Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía trên Ox.

◆ B3: Khi $f(x) < 0$: $|f(x)| = -f(x) \Rightarrow$ Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm phía dưới Ox qua Ox, bỏ phần đồ thị nằm phía dưới Ox.

Dạng 2: Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$.

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

◆ B1: Vẽ đồ thị (C): $y = f(x)$.

◆ B2: Khi $x \geq 0$: $y = f(|x|) = f(x) \Rightarrow$ Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm bên phải Oy

◆ B3: Khi $x < 0$: $y = f(|x|) = f(-x) \Rightarrow$ Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm bên phải Oy qua Oy, bỏ phần đồ thị nằm bên trái Oy.

Dạng 3: Đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{|P(x)|}{Q(x)}$.

$$y = f(x) = \frac{|P(x)|}{Q(x)} = \begin{cases} \frac{P(x)}{Q(x)} & \text{khi } P(x) \geq 0 \\ -\frac{P(x)}{Q(x)} & \text{khi } P(x) < 0 \end{cases}.$$

◆ B1: Vẽ đồ thị (C): $y = f(x)$.

◆ B2: Khi $P(x) \geq 0$: $y = \frac{|P(x)|}{Q(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow$ Giữ nguyên phần đồ thị (C) ứng với $P(x) \geq 0$.

◆ B3: Khi $P(x) < 0$: $y = \frac{|P(x)|}{Q(x)} = -\frac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow$ Lấy đối xứng phần đồ thị (C) ứng với $P(x) < 0$ qua Ox, bỏ phần đồ thị ứng với $P(x) < 0$.

Bài 4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số .

a) $y = \left| \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right|$.

Xét $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$.

Giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$y' = x^2 - 4x + 3$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = \frac{4}{3} \\ x = 3 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$.

Bảng biến thiên: .

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow \frac{4}{3}$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$	

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$, nghịch biến trên $(1; 3)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $(1; 4/3)$, cực tiểu tại điểm $(3; 0)$.

Điểm đặc biệt

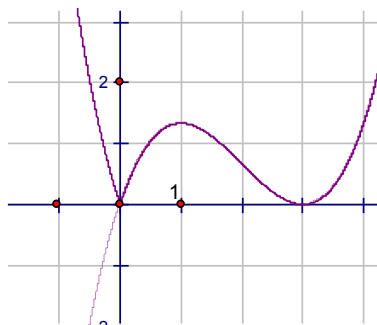
x	0	1	2	3	4
y	0	4/3	2/3	0	4/3

Đồ thị hàm số: $y = \left| \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right| = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \\ -\left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right) \end{cases}$.

♦ Vẽ đồ thị (C): $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$.

♦ Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía trên Ox.

♦ Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm phía dưới Ox qua Ox, bỏ phần đồ thị nằm phía dưới Ox.



b) $y = |x^3| - 3|x|$

Xét $y = x^3 - 3x$.

Giải: TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -2 \\ x = -1 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	2		-2	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên $(-1; 1)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $(-1; 2)$, cực tiểu tại điểm $(1; -2)$.

Điểm đặc biệt

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	2	0	-2	2

Đồ thị $y = |x^3| - 3|x|$.

$y = |x^3| - 3|x| = \begin{cases} x^3 - 3x & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^3 + 3x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$.

♦ Vẽ đồ thị (C): $y = x^3 - 3x$.

♦ Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm bên phải Oy

◆ Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm bên phải Oy qua Oy, bỏ phần đồ thị nằm bên trái Oy .

