

PHÉP BIẾN HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẪNG

§6 KHÁI NIỆM VỀ PHÉP DỜI HÌNH VÀ HAI HÌNH BẰNG NHAU

Tuần 3: Từ 20/9-25/9/2021

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 KHÁI NIỆM VỀ PHÉP DỜI HÌNH.

Định nghĩa. Phép dời hình là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ.

Nếu phép dời hình $\mathcal{F}$ biến các điểm M, N lần lượt thành các điểm M', N' thì $MN = M'N'$.

Nhận xét

- ① Các phép đồng nhất, tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm và phép quay đều là những phép dời hình.
- ② Phép biến hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép dời hình cũng là một phép dời hình.

Tính chất 1. Phép dời hình:

- ① Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm;
- ② Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó; Biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến góc thành góc bằng nó;
- ③ Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.



- a. Nếu một phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ thì nó cũng biến trọng tâm, trục tâm, tâm các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác ABC tương ứng thành trọng tâm, trục tâm, tâm các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác $A'B'C'$.
- b. Phép dời hình biến đa giác n cạnh thành đa giác n cạnh, biến đỉnh thành đỉnh, biến cạnh thành cạnh.

2 KHÁI NIỆM HAI HÌNH BẰNG NHAU

Định nghĩa. Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

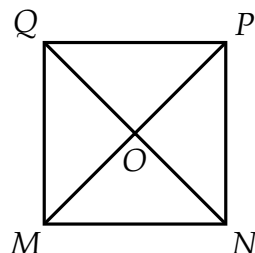
6. KHÁI NIỆM VỀ PHÉP DỜI HÌNH VÀ HAI HÌNH BẰNG NHAU

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định ảnh của một hình qua một phép dời hình

◆◆◆ VÍ DỤ MẪU DẠNG 1 ◆◆◆

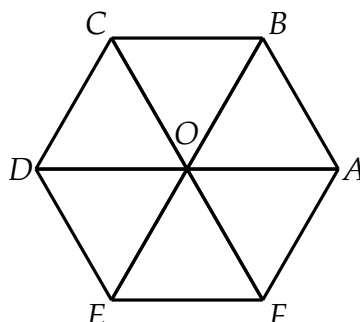
● **Ví dụ 1.** Cho hình vuông $MNPQ$ tâm O . Tìm ảnh của điểm M qua phép dời hình có được khi thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua trục QN và phép quay tâm O góc -90° .



☞ Lời giải.

Gọi $\mathcal{F}$ là phép dời hình có được khi thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua trục QN và phép quay tâm O góc -90° . Ta có $\mathcal{D}_{QN}(M) = P$ và $Q_{(O, -90^\circ)}(P) = N$, cho nên $\mathcal{F}(M) = N$. $\square$

● **Ví dụ 2.** Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Tìm ảnh của tam giác BCD qua phép dời hình có được khi thực hiện liên tiếp và phép quay tâm O góc 120° và phép đối xứng qua trục AD



☞ Lời giải.

Gọi $\mathcal{F}$ là phép dời hình có được khi thực hiện liên tiếp và phép quay tâm O góc 120° và phép đối xứng qua trục AD . Phép quay $Q_{(O, 120^\circ)}$, lần lượt biến các điểm B, C, D thành D, E, F , phép đối xứng qua trục AD lần lượt biến các điểm D, E, F thành D, C, B . Vậy $\mathcal{F}$ biến tam giác BCD thành tam giác DCB . $\square$

● **Ví dụ 3.** Cho đường tròn $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$. Tìm ảnh của $(\mathcal{C})$ khi thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{u} = (-2; 1)$ và phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (1; 3)$.

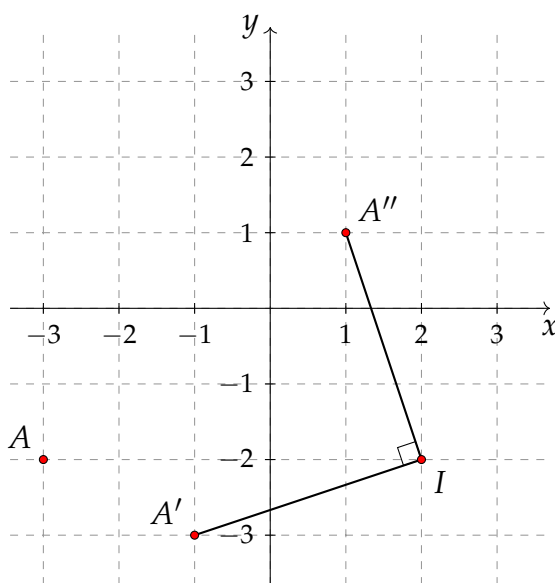
☞ Lời giải.

Ta có $(\mathcal{C}) : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$, đường tròn $(\mathcal{C})$ có tâm $I(2; -1)$, bán kính $R = 1$. Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{u} = (-2; 1)$ biến I thành $I'(0; 0)$, phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (1; 3)$ biến I' thành $I''(1; 3)$, phép tịnh tiến biến đường tròn thành đường tròn có tâm $I''(1; 3)$, bán kính 1, cho nên ảnh của đường tròn $(\mathcal{C})$ là đường tròn có phương trình $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 1$. $\square$

● **Ví dụ 4.** Tìm ảnh của điểm $A(-3; -2)$ qua phép dời hình có được khi thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (2; -1)$ và phép quay tâm $I(2; -2)$ góc -90° .

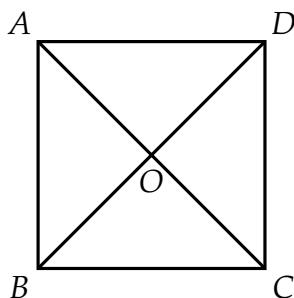
☞ Lời giải.

6. KHÁI NIỆM VỀ PHÉP DỜI HÌNH VÀ HAI HÌNH BẰNG NHAU

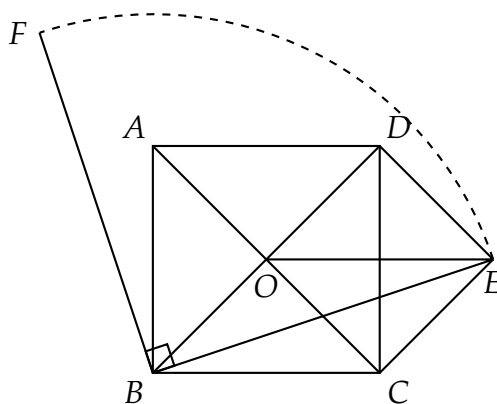


Gọi $\mathcal{F}$ là phép dời hình có được khi thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (2; -1)$ và phép quay tâm I góc -90° . Ta có $T_{\vec{v}}(A) = A'$, tam giác $A'IA''$ vuông cân tại I suy ra $Q_{(I, -90^\circ)}(A') = A''$, cho nên $\mathcal{F}(A) = A''$. Vậy ảnh của A là điểm $A''(1; 1)$. $\square$

❶ Ví dụ 5. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , cạnh $2a$ như hình vẽ dưới. Gọi F là ảnh của O qua phép dời hình nhận được khi thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua trục CD , phép quay tâm B góc 90° . Tính theo a cạnh AF .



❷ Lời giải.



Gọi $\mathcal{F}$ là phép dời hình có được khi thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua trục CD và phép quay tâm B góc 90° . Dựng hình vuông $OCED$, để thấy phép dời hình $\mathcal{D}_{CD}$ lần lượt biến các điểm C, O thành các điểm C, E , phép dời hình $Q_{(B, 90^\circ)}$ lần lượt biến các điểm C, E thành các điểm A, F , cho nên $\mathcal{F}$ biến đoạn thẳng CE thành đoạn thẳng AF . Vậy $AF = CE = CO = a\sqrt{2}$. $\square$

6. KHÁI NIỆM VỀ PHÉP DỜI HÌNH VÀ HAI HÌNH BẰNG NHAU

❶ Ví dụ 6. Cho hai đường thẳng $d : x - 3y + 1 = 0$ và $\Delta : 2x - y = 0$. Gọi $\mathcal{F}$ là phép dời hình có được khi thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{u} = (2; 1)$ và phép đối xứng qua đường thẳng d . Tìm ảnh của Δ qua $\mathcal{F}$.

❷ Lời giải.

Gọi Δ' là ảnh của Δ qua $T_{\vec{u}}$. Trên đường thẳng Δ ta chọn điểm $M(1; 2)$, $T_{\vec{u}}(M) = M'(3; 3)$, gọi Δ' là ảnh của Δ qua $T_{\vec{u}}$, $\vec{n}_{\Delta} = \vec{n}_{\Delta'} = (2; -1)$ suy ra phương trình của $\Delta' : 2x - y - 3 = 0$.

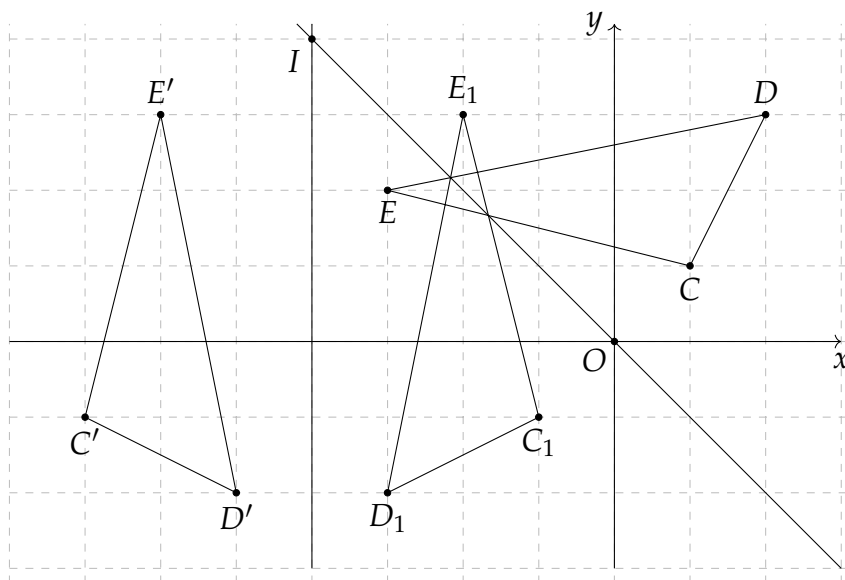
$\{N\} = \Delta' \cap d \Rightarrow N(2; 1)$, đường thẳng d' qua M' và vuông góc với d có phương trình $3x + y - 12 = 0$, giao điểm của d và d' có tọa độ $I\left(\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right)$, suy ra ảnh của M' qua $\mathcal{D}_d$ là điểm $M''(4; 0)$. Ảnh của Δ qua $\mathcal{F}$ là đường thẳng đi qua các điểm N , M'' và có phương trình là $x + 2y - 4 = 0$. $\square$

❸ Dạng 2. Chứng minh hai hình bằng nhau

❶ Ví dụ mẫu dạng 2

❶ Ví dụ 1. Trên mặt phẳng Oxy , cho hai tam giác $C(1; 1)$, $D(2; 3)$, $E(-3; 2)$, $C'(-7; -1)$, $D'(-5; -2)$, $E'(-6; 3)$. Chứng minh rằng hai tam giác CDE và $C'D'E'$ bằng nhau.

❷ Lời giải.



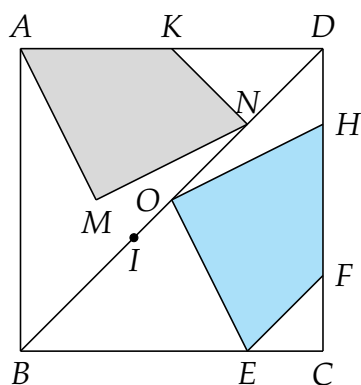
Phép đối xứng qua trục $d : x - y = 0$ biến các điểm C, D, E lần lượt thành các điểm $C_1(-1; -1)$, $D_1(-3; -2)$, $E_1(-2; 3)$, phép đối xứng qua trục $d_1 : x + 4 = 0$ biến các điểm C_1, D_1, E_1 lần lượt thành các điểm C', D', E' . Phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng trục, biến tam giác CDE thành tam giác $C'D'E'$, cho nên hai tam giác $CDE, C'D'E'$ bằng nhau.

Chú ý: Phép quay tâm $I(-4; 4)$ góc -90° biến tam giác CDE thành $C'D'E'$. $\square$

❶ Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$, O là giao điểm của AC và BD . Gọi P, N, K là trung điểm các cạnh AB, OD, AD , M là trung điểm của OP , E là điểm thuộc cạnh BC , H, F là các điểm thuộc cạnh CD sao cho $\frac{EC}{BC} = \frac{FC}{CD} = \frac{HD}{CD} = \frac{1}{4}$. Chứng minh rằng hai hình $AMNK$ và $HOEF$ bằng nhau.

❷ Lời giải.

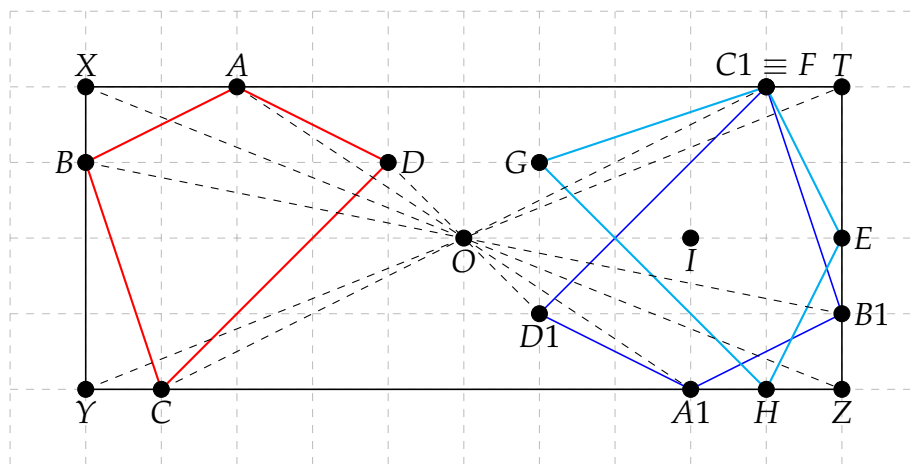
6. KHÁI NIỆM VỀ PHÉP DỜI HÌNH VÀ HAI HÌNH BẰNG NHAU



Gọi I là trung điểm của BN , các tam giác MOI , AHI , KFI , NEI vuông cân tại I , phép quay tâm I góc 90° biến các điểm A, M, N, K lần lượt thành các điểm H, O, E, F . Vậy hai hình $AMNK$ và $HOEF$ bằng nhau. $\square$

❶ Ví dụ 3. Trên mặt phẳng Oxy cho tứ giác $ABCD$ và $EFGH$ với $A(3;5)$, $B(1;4)$, $C(2;1)$, $D(5;4)$, $E(11;3)$, $F(10;5)$, $G(7;4)$, $H(10;1)$. Chứng minh rằng hai hình $ABCD$ và $EFGH$ bằng nhau.

❷ Lời giải.



Dựng hình chữ nhật $XYZT$ tâm $O(6;3)$, với $X(1;5)$, $Y(1;1)$, $Z(11;1)$, $T(11;5)$. Phép đối xứng tâm O biến các điểm A, B, C, D thành các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 . Phép quay tâm $I(9;3)$ góc 90° biến các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 thành các điểm E, F, G, H . Phép biến hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp các phép đối xứng tâm O và $Q_{(I, 90^\circ)}$ biến hình $ABCD$ thành hình $EFGH$ cho nên hai hình bằng nhau. $\square$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

❶ Bài 1. Cho hình vuông $ABCD$. Tìm ảnh của hình vuông qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vec-tơ $\overrightarrow{AB}$ và phép quay tâm B góc quay 90° .

❷ Bài 2. Tìm ảnh của tam giác ABC đều với trọng tâm G qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm G góc -60° và phép tịnh tiến theo vec-tơ $\overrightarrow{AB}$.

❸ Bài 3. Tìm ảnh của hình thoi $ABCD$ tâm O có $AC = 2BD$ qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm A góc -90° và phép đối xứng tâm O .

❹ Bài 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi E, F, H, K, O, I, J lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, BC, CD, DA, KF, HC, KO$. Chứng minh hai hình thang $AEJK$ và $FOIC$ bằng nhau.

❺ Bài 5. Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn AB . Tìm ảnh của hình thang qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng trục CD và phép tịnh tiến theo vec-tơ $\overrightarrow{DC}$.

6. KHÁI NIỆM VỀ PHÉP DỜI HÌNH VÀ HAI HÌNH BẰNG NHAU

Bài 6. Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm $A(3; 2)$, $B(4; -5)$ và $C(1, 3)$. Gọi $A'B'C'$ là ảnh của tam giác ABC qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc -90° và phép đối xứng qua trục Ox . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác $A'B'C'$.

Bài 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $A(2; -3)$, $B(-1, -2)$, $C(-2, -4)$. Gọi $A'B'C'$ là ảnh của tam giác ABC qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vec-tơ $\overrightarrow{AB}$ và phép quay tâm O góc quay 90° . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác $A'B'C'$.

Bài 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $M(1; -2)$, $N(2; 2)$, $P(-3; 3)$. Gọi EFG là ảnh của tam giác MNP qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng tâm O và phép tịnh tiến theo vec-tơ $\overrightarrow{NP}$. Tìm tọa độ các điểm E, F, G .

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d : 3x - 2y + 1 = 0$ và vec-tơ $\vec{v} = (2; 1)$. Viết phương trình ảnh d' của đường thẳng d qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc quay $\frac{\pi}{2}$ và phép tịnh tiến theo vec-tơ $\vec{v}$.

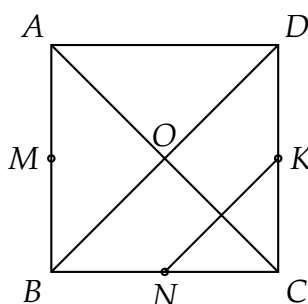
Bài 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$ và vec-tơ $\vec{v} = (-1; -3)$. Viết phương trình ảnh (C') của (C) qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vec-tơ $\vec{v}$ và phép quay tâm O góc quay $-\frac{\pi}{2}$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 11. Chứng minh rằng phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm đó.

Bài 12. Trên mặt phẳng Oxy , cho phép biến hình $\mathcal{F}$ biến mỗi điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(-y + 2; x - 3)$. Chứng minh rằng $\mathcal{F}$ là phép dời hình.

Bài 13. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , M, N là trung điểm các cạnh AB, BC . Tìm một phép dời hình $\mathcal{F}$ lần lượt biến các điểm B, O, M thành các điểm O, C, N .



Bài 14. Trên mặt phẳng cho hai đoạn thẳng bằng nhau AB và $A'B'$. Chứng minh rằng tồn tại phép dời hình biến A thành A' , biến B thành B' .

Bài 15. Trên mặt phẳng Oxy , cho phép biến hình $\mathcal{F}$ biến mỗi điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(y + 1; x + 2)$. Chứng minh rằng $\mathcal{F}$ có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng trục và phép tịnh tiến.

Bài 16. Tìm ảnh của đường thẳng $d : x + 2y - 2 = 0$ qua phép dời hình $\mathcal{F}$ có được khi thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua trục hoành, phép đối xứng qua đường thẳng $\Delta : x + 3y - 7 = 0$ và phép quay tâm O góc 90° .

Bài 17. Cho ba điểm không thẳng hàng A, B, C và phép dời hình $\mathcal{F}$ biến A thành A , biến B thành B , biến C thành C . Chứng minh rằng $\mathcal{F}$ là phép đồng nhất.

6. KHÁI NIỆM VỀ PHÉP DỜI HÌNH VÀ HAI HÌNH BẰNG NHAU

Bài 18. Trên mặt phẳng cho hai điểm phân biệt I, J . Chứng minh rằng phép dời hình $\mathcal{F}$ có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng tâm I và phép đối xứng tâm J là phép tịnh tiến.

Bài 19. Cho hình bình hành $ABCD$ có $B(0;0)$, $C(4;0)$ và tam giác ABK vuông tại B sao cho $(BA, BK) = 90^\circ$. Khi D thay đổi trên đường tròn $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$, điểm K thay đổi trên đường tròn $(\mathcal{S})$. Viết phương trình của $(\mathcal{S})$.

Bài 20. Cho tứ giác lồi $ABCD$, dựng về phía ngoài tứ giác các tam giác đều BCH , ADG , dựng về phía trong tứ giác các tam giác đều ABE , CDF .

a) Chứng minh rằng tồn tại phép dời hình có được khi thực hiện liên tiếp hai phép quay, biến đoạn thẳng EG thành HF .

b) Chứng minh rằng nếu E không thuộc đường thẳng GH thì bốn điểm $EHFG$ tạo nên hình bình hành.