

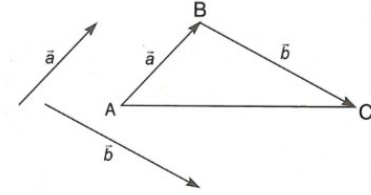
BÀI 2. TỔNG VÀ HIỆU HAI VECTO

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Định nghĩa

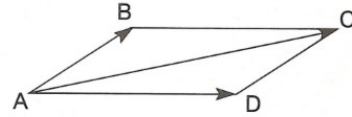
Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý. Vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Kí hiệu: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$



Quy tắc hình bình hành

Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



Tính chất phép cộng các vectơ

Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tùy ý, ta có

Tính chất giao hoán $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Tính chất kết hợp $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Tính chất của vectơ – không $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

Vecto đối

Vecto có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu $-\vec{a}$.

Chú ý: Vectơ đối của $\vec{0}$ là $\vec{0}$.

Hiệu hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Ta gọi hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ $\vec{a} + (-\vec{b})$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$

Mở rộng: Quy tắc $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

Trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

Điểm I là trung điểm đoạn AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

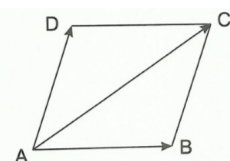
Sơ đồ lý thuyết

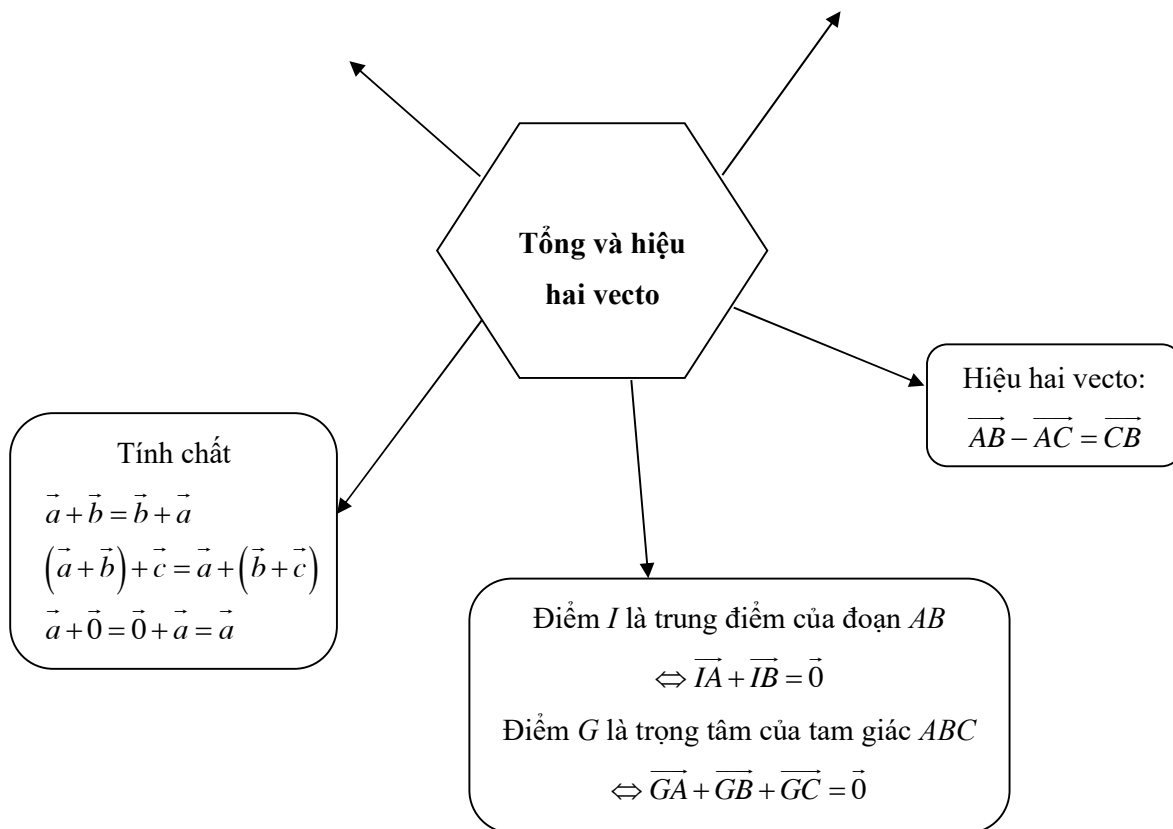
Quy tắc ba điểm:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Quy tắc hình bình hành

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$$





II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm tổng của hai vectơ và tổng của nhiều vectơ

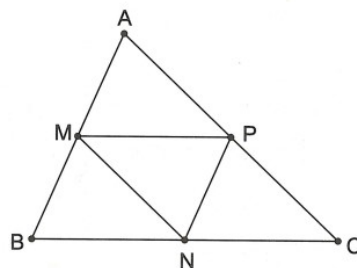
Bài toán 1. Sử dụng quy tắc ba điểm tính tổng các vectơ

Phương pháp giải

Sử dụng quy tắc ba điểm

Áp dụng: Khi điểm cuối của vectơ này là điểm đầu của vectơ kia.

Ví dụ: cho tam giác ABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA . Khi đó



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{AA} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

a)

b) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AN}$ (quy tắc hình bình hành).

c) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho bốn điểm M, N, P, Q bất kỳ. Xác định vectơ tổng

a) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NP}$

b) $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{QM}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NP} = (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}) + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MQ}$

b) Ta có $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{QM} = (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN}) + (\overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{QM}) = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

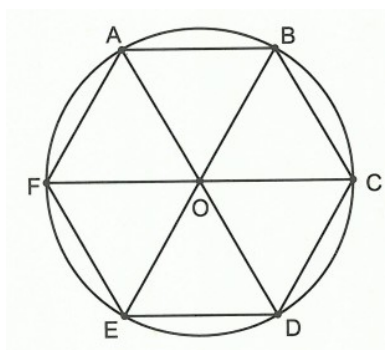
Ví dụ 2: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Tính tổng của các vectơ

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OE}$

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$

c) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{DO}$

Hướng dẫn giải



a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO}$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF})$$

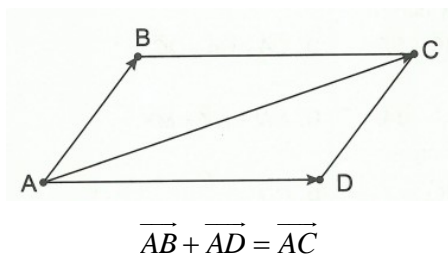
$$= \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.$$

c) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}$.

Bài toán 2. Sử dụng quy tắc hình bình hành

 **Phương pháp giải**

Quy tắc hình bình hành



Áp dụng: Khi hai vectơ có chung điểm đầu.

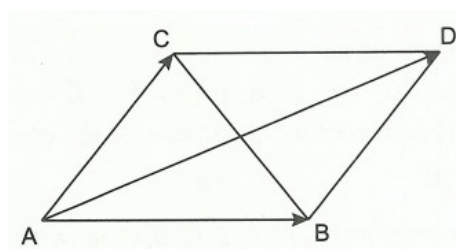
 **Ví dụ mẫu**

Ví dụ: Cho tam giác ABC . Hãy xác định vectơ tổng của các vectơ.

Mẹo: Khi cộng hai vectơ ta không cần vẽ hình chỉ cần chọn những cặp vectơ có điểm đầu vectơ này là điểm cuối vectơ kia để tìm vectơ tổng.

Ví dụ: Cho tam giác ABC . Tính tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Hướng dẫn giải



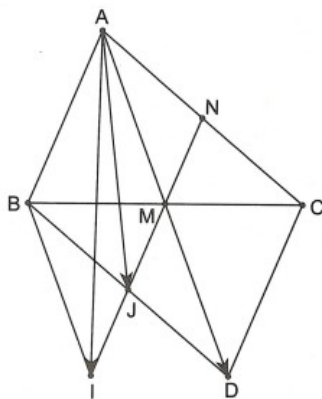
Vẽ hình bình hành $ABDC$, suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của BC .

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NC}$ với N là trung điểm AC .

Hướng dẫn giải



a) Vẽ hình bình hành $ABIM$, suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI}$

b) Vẽ hình bình hành $ABDC$, suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

c) Vẽ hình bình hành $ABJN$, (J là trung điểm B), suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AJ}$.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Tổng $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$ bằng

A. $\overrightarrow{BA}$.

B. $\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AB}$.

D. $-\overrightarrow{AB}$.

Câu 2: Cho bốn điểm bất kì A, B, C, O . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AB}$.

B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$.

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{OC}$.

Câu 3: Chọn kết quả sai.

A. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$.

C. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}$.

D. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NX} = \overrightarrow{MX}$.

Câu 4: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Khi đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO}$ bằng

A. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$.

B. $\overrightarrow{AB}$.

C. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}$.

D. $\overrightarrow{CD}$.

Câu 5: Cho năm điểm bất kỳ A, B, C, D, O và vecto $\vec{x} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{x} = \overrightarrow{CB}$.

B. $\vec{x} = \overrightarrow{BD}$.

C. $\vec{x} = \overrightarrow{CA}$.

D. $\vec{x} = \vec{0}$.

Câu 6: Tổng vecto $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$ bằng

A. $\overrightarrow{MR}$.

B. $\overrightarrow{MQ}$.

C. $\overrightarrow{MP}$.

D. $\overrightarrow{MN}$.

Câu 7: Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức vecto nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$.

B. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

Câu 8: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$.

B. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

C. $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}| = 0$.

D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB}$.

Câu 9: Cho sáu điểm A, B, C, D, E, F bất kì. Tổng vecto $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$ bằng

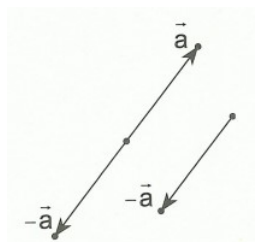
- A. $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DB}$. B. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DF}$. C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EB}$. D. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DF}$.

Dạng 2: Tìm vecto đối và hiệu của hai vecto

Phương pháp giải

- Vecto đối của vecto $\vec{a}$ là vecto cùng phương, ngược hướng và cùng độ dài với $\vec{a}$.

Kí hiệu: $-\vec{a}$.



- Với mọi vecto $\vec{a}$ ta có $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

- Một vecto đối của vecto $\overrightarrow{AB}$ là vecto $\overrightarrow{BA}$.

- Nhận xét: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

- Hiệu của hai vecto $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là tổng của vecto $\vec{a}$ và vecto đối của vecto $\vec{b}$.

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

- Các quy tắc tìm hiệu hai vecto

Quy tắc 1: Hiệu hai vecto có chung điểm đầu.

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}.$$

Quy tắc 2: Hiệu hai vecto có chung điểm cuối.

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho các vecto $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kỳ. Chứng minh $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. Cộng vecto $-\vec{b}$ vào cả hai vế ta được

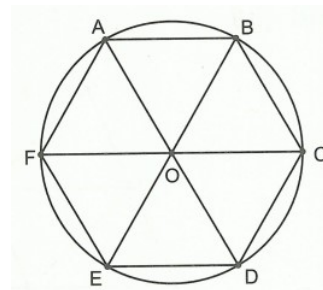
$$(\vec{a} + \vec{b}) + (-\vec{b}) = \vec{c} + (-\vec{b}) \Leftrightarrow \vec{a} + (\vec{b} - \vec{b}) = \vec{c} - \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{c} - \vec{b} \quad (1)$$

Ngược lại $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$, cộng vecto $\vec{b}$ vào cả hai vế ta được

$$\vec{a} + \vec{b} = (\vec{c} - \vec{b}) + \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + (\vec{b} - \vec{b}) \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$

Ví dụ 2: Cho hai tam giác ABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA .



a) Các vecto bằng $\overrightarrow{OC}$ là $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ED}$.

b) Các vecto đối của $\overrightarrow{OC}$ là $\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DE}$

c) Hiệu của vecto $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EO}$ là

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO}$$

d) Tổng hiệu của các vecto $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EF}$ là

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}) + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD}.$$

Lưu ý: Công thức

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$$

được gọi là quy tắc chuyển vế - đổi dấu đối với vecto.

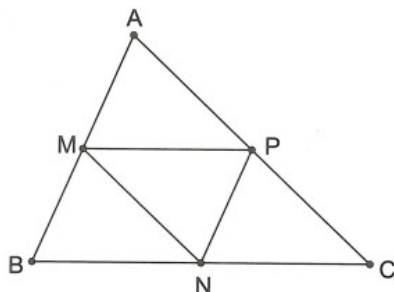
Từ bài toán này trở đi, ta sẽ áp dụng tính chất này và không chứng minh lại.

a) Tìm các vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{MN}$.

b) Tìm hiệu của hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{AB}$.

c) Xác định vectơ $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AP}$

Hướng dẫn giải



a) Các vectơ đối của $\overrightarrow{MN}$ là $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{CP}$.

b) Áp dụng quy tắc tìm hiệu của hai vectơ chung điểm đầu, ta có $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BM}$.

c) Ta có $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AP} = (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AP}) + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CB}$.

Ví dụ 3: Cho bốn điểm M, N, P, Q bất kỳ. Xác định các vectơ sau

a) $\overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{NQ}$.

b) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP}$.

c) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NQ}$.

Hướng dẫn giải

a) Áp dụng quy tắc tìm hiệu hai vectơ chung nhau điểm cuối, ta có $\overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{MN}$.

b) Ta có $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP} = (\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP}) + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$

c) Ta có $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NQ} = (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ}) - \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MP}$

Ví dụ 4: Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Tìm các vectơ sau

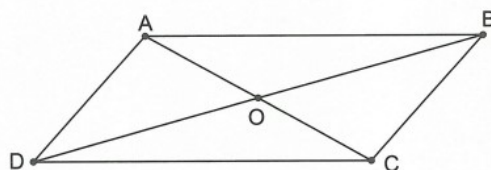
a) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA}$.

b) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA}$.

c) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DO}$.

d) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AO}$.

Hướng dẫn giải



a) Theo quy tắc tìm hiệu hai vectơ, ta có $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD}$.

b) Ta có $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{BA}$ (tìm hiệu hai vecto có chung điểm đầu)

$$= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DD} = \vec{0}.$$

c) Ta có $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$ (hiệu hai vecto có chung điểm đầu)

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

d) Ta có $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AO} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AO}) - \overrightarrow{BA}$ (hiệu hai vecto có chung điểm đầu)

$$= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} \text{ (hiệu hai vecto có chung điểm cuối).}$$

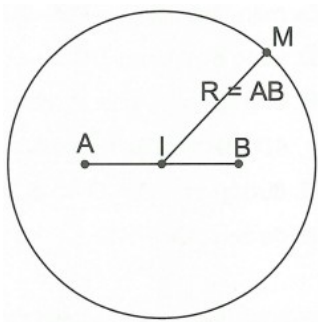
Ví dụ 5: Cho hai điểm cố định A, B . Gọi I là trung điểm AB . Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức

$$|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{IA}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{IA}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{BA}| \Leftrightarrow MI = BA = R.$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = AB$.



Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là các vecto khác $\vec{0}$ với $\vec{a}$ là vecto đối của $\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hai vecto $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương.

B. Hai vecto $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng.

C. Hai vecto $\vec{a}, \vec{b}$ cùng độ dài.

D. Hai vecto $\vec{a}, \vec{b}$ chung điểm đầu.

Câu 2: Cho hai điểm phân biệt A và B . Điều kiện để điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB là

A. $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.

B. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$.

C. $IA = IB$.

D. $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$.

Câu 3: Chọn khẳng định **sai**.

A. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

B. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB}$.

C. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

D. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{BI} = \vec{0}$.

Câu 4: Cho tam giác ABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC . Khi đó, các vecto đối của vecto $\overrightarrow{PN}$ từ các điểm đã cho là

A. $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{NP}$.

B. $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{NP}$.

C. $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{AM}$.

D. $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{NP}$.

Câu 5: Điều kiện nào sau đây là điều kiện cần và đủ để G là trọng tâm của tam giác ABC , với M là trung điểm của BC .

A. $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Câu 6: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Khi đó $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ bằng

A. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$.

B. $\overrightarrow{AB}$.

C. $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$.

D. $\overrightarrow{CD}$.

Câu 7: Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CD}$.

B. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$.

C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.

D. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$.

Câu 8: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Các vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{OD}$ là

A. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{DO}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{CB}$.

B. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{DO}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{DA}$.

C. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{DO}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DA}$.

D. $\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BC}$.

Câu 9: Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}|$ là

A. Đường thẳng AB .

B. Trung trực đoạn BC .

C. Đường tròn tâm A , bán kính BC .

D. Đường thẳng A và song song với BC .

Câu 10: Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O , $AB = 8\text{cm}$, $AD = 6\text{cm}$. Tập hợp điểm M thỏa $|\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AD}| = MO$ là

A. Đường tròn tâm O có đường kính 10cm .

B. Đường tròn tâm O có đường kính 5cm .

C. Đường thẳng BD .

D. Đường thẳng AC .

Dạng 3: Tính độ dài của vectơ tổng và vectơ hiệu của hai vectơ



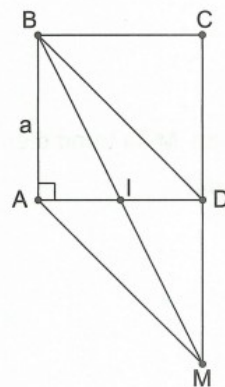
Phương pháp giải

Để tìm độ dài của một vectơ là tổng hoặc hiệu của hai hay nhiều vectơ ta thực hiện các bước sau.

Ví dụ: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Vẽ hình bình hành $ABDM$ và gọi I là trung điểm AD .

Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}$.

Hướng dẫn giải



Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$;

Bước 1: Tính tổng, hiệu của hai hay nhiều vecto để đưa về một vecto duy nhất.

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BI}$$

Khi đó

Bước 2: Tính độ dài của vecto đó (khoảng cách từ điểm đầu đến điểm cuối)

$$|\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} + \dots| = |\overrightarrow{AB}| = AB$$

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2};$$

$$|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DB}| = DB = AC = a\sqrt{2};$$

$$|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}| = BM = 2BI = 2\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{5}.$$

Ví dụ mẫu

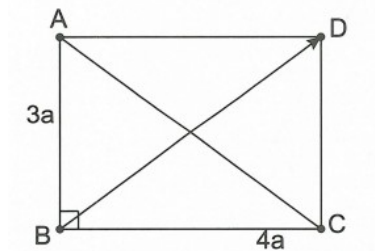
Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông tại B ; $AB = 3a$; $BC = 4a$.

a) Hãy dựng điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

b) Tính độ dài của vecto $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ theo a .

Hướng dẫn giải

a) Vẽ hình chữ nhật $ABCD$. Khi đó D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.



b) Ta có $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BD}| = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a$.

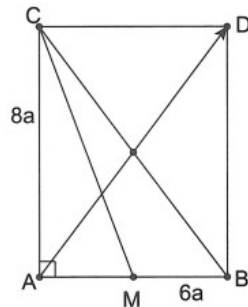
Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông tại A , biết $AB = 6a$, $AC = 8a$. Tính độ dài các vecto sau theo a .

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm AB .

Hướng dẫn giải



a) Ta có $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = CB = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{(6a)^2 + (8a)^2} = 10a$

b) Vẽ hình chữ nhật $ABCD$

Ta có $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD = BC = 10a$.

c) Ta có $|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{MC}| = MC = \sqrt{AC^2 + AM^2} = \sqrt{(8a)^2 + (3a)^2} = a\sqrt{73}$.

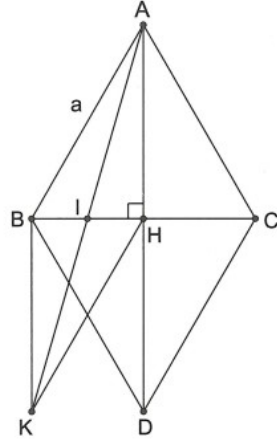
Ví dụ 3: Cho tam giác đều ABC có cạnh a . Tính độ dài các vectơ sau theo a .

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}$ với H là trung điểm của BC .

Hướng dẫn giải



a) Ta có $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = CB = a$

b) Vẽ hình bình hành $ABDC$.

Ta có $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD = 2AH = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

c) Vẽ hình bình hành $ABKH$. Gọi I là giao điểm của AK và BH .

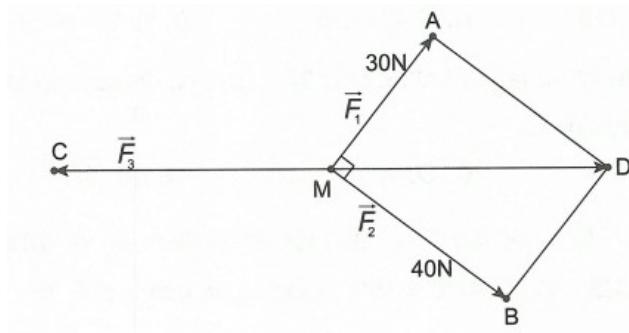
Suy ra $HI = \frac{BH}{2} = \frac{BC}{4} = \frac{a}{4}$.

Ta có $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}| = |\overrightarrow{AK}| = AK = 2AI = 2\sqrt{AH^2 + HI^2} = 2\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Ví dụ 4: Cho ba lực $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên.

Cho biết cường độ của $\overrightarrow{F_1}$ là $30N$, cường độ của lực $\overrightarrow{F_2}$ là $40N$ và $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tìm cường độ của lực $\overrightarrow{F_3}$

Hướng dẫn giải



Gọi A, B, C là các điểm sao cho $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{F_3}$. Vẽ hình chữ nhật $AMBD$.

Vì vật đứng yên nên ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \vec{0} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MD} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DM}. \end{aligned}$$

Cường độ của lực $\overrightarrow{F_3}$ là

$$\overrightarrow{F_3} = |\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{DM}| = DM = \sqrt{AM^2 + AD^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50(N).$$

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1. Cho tam giác ABC vuông cân tại C và $AB = \sqrt{2}$. Tính độ dài của $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

- A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \sqrt{5}$. B. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{5}$. C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \sqrt{3}$. D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{3}$.

Câu 2. Cho tam giác ABC là tam giác vuông tại A , cạnh $AB = 2a, \widehat{ACB} = 30^\circ$. Khi đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ bằng

- A. $a\sqrt{3}$. B. a . C. $2a\sqrt{3}$. D. $4a$.

Câu 3. Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC = 12$. Vectơ $\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{CG}$ có độ dài bằng bao nhiêu?

- A. 2. B. 4. C. 8. D. $2\sqrt{3}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC đều cạnh a , có AH là đường trung tuyến. $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH}|$ bằng

- A. $a\sqrt{3}$. B. $2a$ C. $\frac{a\sqrt{13}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Câu 5. Cho tam giác đều ABC cạnh $2a$ có I, J, K lần lượt là trung điểm BC, CA và AB . Giá trị của $|\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{IC}|$ là

- A. 0. B. a . C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $2a$.

Câu 6. Tam giác ABC có $AB = AC = a$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$

- A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$. B. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \frac{a}{2}$. C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a$. D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2a$.

Câu 7. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O , cạnh bằng 2018 và góc A bằng 60° . Kết luận nào sau đây đúng?

A. $|\overline{OA}| = 1009\sqrt{3}$.

B. $|\overline{OA}| = 2018$.

C. $|\overline{OA}| = |\overline{OB}|$.

D. $|\overline{OA}| = 1009\sqrt{2}$.

Câu 8. Cho hai lực $\overline{F_1}$ và $\overline{F_2}$ có điểm đặt O và tạo với nhau góc 60° . Cường độ của hai lực $\overline{F_1}$ và $\overline{F_2}$ đều là $100N$. Cường độ tổng hợp lực của hai lực đó là

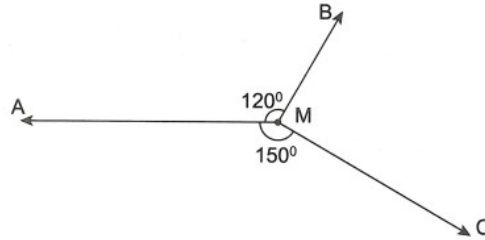
A. $100N$.

B. $100\sqrt{3}N$.

C. $50N$.

D. $50\sqrt{3}N$.

Câu 9. Cho ba lực $\overline{F_1} = \overline{MA}$, $\overline{F_2} = \overline{MB}$, $\overline{F_3} = \overline{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên như hình vẽ. Biết cường độ của lực $\overline{F_1}$ là $50N$, $\widehat{AMB} = 120^\circ$, $\widehat{AMC} = 150^\circ$. Cường độ của lực $\overline{F_3}$ là



A. $50\sqrt{3}N$.

B. $25\sqrt{3}N$.

C. $25N$.

D. $50N$.

Câu 10. Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng a . Một điểm M di động sao cho $|\overline{MA} + \overline{MB}| = |\overline{MA} - \overline{MB}|$. Gọi H là hình chiếu của M lên AB . Độ dài lớn nhất của vectơ $\overline{AH} - \overline{AM}$ là

A. $\frac{a}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. a .

D. $2a$.

Dạng 4. Chứng minh đẳng thức vectơ

Phương pháp giải

Để chứng minh một đẳng thức vectơ, ta thường

- Áp dụng các quy tắc tìm tổng hai vectơ.
- Áp dụng các quy tắc tìm hiệu hai vectơ.
- Tính chất của tổng hai vectơ.
- Quy tắc chuyển vế đổi dấu đối với vectơ.

Việc chứng minh thường được tiến hành theo một trong ba cách:

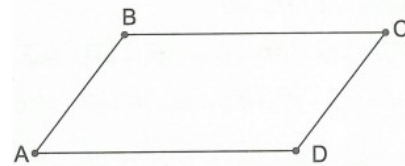
- Cách 1: Đi từ vế trái sang vế phải.
- Cách 2: Đi từ vế phải sang vế trái.
- Cách 3: Biến đổi tương đương cả hai vế của

đẳng thức vectơ.

Ví dụ: Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm M tùy ý.

Chứng minh rằng $\overline{MA} + \overline{MC} = \overline{MB} + \overline{MD}$

Hướng dẫn giải



Cách 1. Áp dụng quy tắc chuyển vế, đổi dấu đối với vectơ ta có

$$\overline{MA} + \overline{MC} = \overline{MB} + \overline{MD}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MA} - \overline{MB} = \overline{MD} - \overline{MC}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BA} = \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{BA} = \overline{BA} \text{ (hiển nhiên).}$$

$$\text{Vậy } \overline{MA} + \overline{MC} = \overline{MB} + \overline{MD}$$

Cách 2. Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} &= (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}) \\ &= (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\end{aligned}$$

Ví dụ mẫu

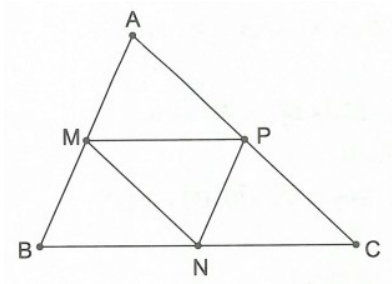
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm AB, BC, CA .

a) Chứng minh $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

c) Chứng minh với điểm I bất kỳ ta có $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IP}$

Hướng dẫn giải



a) Ta có $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

b) Ta có $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP}) + (\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{CP})$

(theo quy tắc hình bình hành)

$$= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}) + (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CP}) = \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

c) Ta có $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IP} \Leftrightarrow (\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IM}) + (\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IN}) + (\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IP}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{AP} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM} = \vec{0} \text{ (hiển nhiên).}$$

Vậy $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IP}$ với I là điểm bất kỳ.

Ví dụ 2. Cho bốn điểm A, B, C, D bất kỳ. Chứng minh

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

c) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$.

d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \vec{0}$.

e) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

f) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

g) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi trung điểm của AD và BC trùng nhau.

Hướng dẫn giải

- a) Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.
- b) Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
- c) Ta có $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$.
- d) Ta có $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DD} = \vec{0}$.
- e)

Cách 1.

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB}$ (hiển nhiên).

Cách 2.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

- f) Ta có $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$
- g) Gọi I là trung điểm AD , J là trung điểm BC . Suy ra $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID}, \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{JC}$ (*)

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{ID}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{JI} \Leftrightarrow I \equiv J \text{ (điều phải chứng minh).}$$

Ví dụ 3. Cho năm điểm A, B, C, D và E bất kỳ. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng quy tắc tìm hiệu hai vecto có chung điểm cuối và quy tắc ba điểm, ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB} &= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{CE}) + \overrightarrow{CB} \\ &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Cho sáu điểm bất kỳ A, B, C, D, E, F . Chứng minh các đẳng thức sau

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB}$
- b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.
- c) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$.
- d) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{a) Ta có } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$$

b) Cách 1.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} \text{ (hiển nhiên).}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}.$$

Cách 2.

Chú ý: Ý c, d có thể làm hai cách

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$$

tương tự cách làm ý b. Ta sử dụng quy tắc 3 điểm tách các vectơ ở vế trái thành tổng hai vectơ.

c) Ta có $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AF}) + (\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{CE}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{FF} = \vec{0} \text{ (hiển nhiên).}$$

Vậy $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$

d) Ta có $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BF}) + (\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DE}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CC} = \vec{0} \text{ (hiển nhiên)}$$

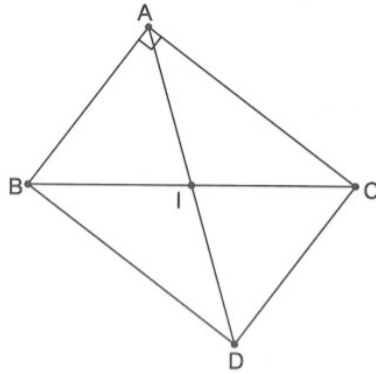
Vậy $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}$

Ví dụ 5. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC thỏa mãn đẳng thức vectơ

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| \text{ thì tam giác } ABC \text{ vuông tại } A.$$

Hướng dẫn giải

Vẽ hình bình hành $ABCD$ và gọi I là giao điểm của AD và BC .



Ta có

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow AD = BC \Leftrightarrow 2AI = BC \Leftrightarrow AI = \frac{BC}{2}$$

Vì tam giác ABC có trung tuyến AI ứng với cạnh BC và bằng nửa độ dài cạnh BC nên tam giác ABC vuông tại A (điều phải chứng minh).

Bài tập tự luyện dạng 4

Câu 1. Cho hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$. B. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$. C. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BC}$.

Câu 2. Cho bốn điểm A, B, C, D . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}$.

Câu 3. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

C. $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}|$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC với M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Khẳng định sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MP}$.

Câu 5. Cho tam giác ABC có $AB = AC$ và đường cao AH . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}$. B. $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$. C. $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Câu 6. Cho tam giác ABC , M là điểm tùy ý. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{BA}$.

B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BA}$.

C. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC}$.

Câu 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Đẳng thức vectơ nào dưới đây **sai**?

A. $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{DM} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN}$.

C. $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ND}$.

D. $\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$.

Câu 8. Cho sáu điểm A, B, C, D, E, F . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \vec{0}$

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AF}$

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD}$.

Câu 9. Cho các điểm phân biệt A, B, C, D, E, F . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB}$.

C. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EC}$.

ĐÁP ÁN

BÀI 2. TỔNG VÀ HIỆU HAI VECTO

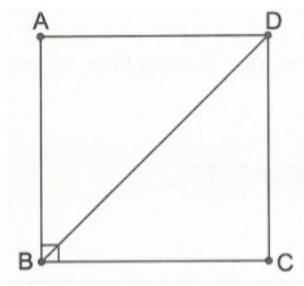
Dạng 1. Xác định một vecto, sự cùng phương và cùng hướng của hai vecto

🚦 Đáp án trắc nghiệm

1-C	2-D	3-B	4-D	5-D	6-D	7-A	8-D	9-C
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

🚦 Hướng dẫn giải

Câu 8.



Ta có $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

Đáp án C sai vì độ dài vecto phải bằng 0.

Câu 9.

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FD}) + (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF}) = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EB}) + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FD})$

$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EB} + \vec{0} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EB}.$$

Dạng 2. Tìm vecto đối và hiệu của hai vecto

🚦 Đáp án trắc nghiệm

1-D	2-A	3-A	4-A	5-B	6-D	7-B	8-A	9-C	10-A
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

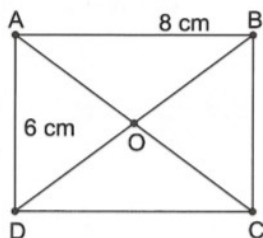
🚦 Hướng dẫn giải

Câu 9.

$$\text{Ta có } |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{AM}| \Leftrightarrow AM = BC = R$$

Mà A, B, C cố định nên tập hợp điểm M là đường tròn tâm A , bán kính $R = BC$.

Câu 10.



$$\text{Ta có } DO = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AD^2}}{2} = \frac{\sqrt{8^2 + 6^2}}{2} = 5$$

$$|\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AD}| = MO \Leftrightarrow |\overrightarrow{DO}| = MO \Leftrightarrow MO = DO \Leftrightarrow MO = 5$$

Vì O cố định nên tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O , bán kính 5cm (tức đường kính 10cm).

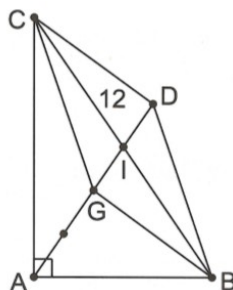
Dạng 3. Tính độ dài của một vecto tổng và vecto hiệu của hai vecto

🚦 Đáp án trắc nghiệm

1-A	2-D	3-B	4-D	5-B	6-C	7-A	8-B	9-B	10-A
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

🚦 Hướng dẫn giải

Câu 3.



Vẽ hình bình hành $BGCD$ và gọi I là trung điểm BC .

$$\text{Ta có } AI = \frac{BC}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$|\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{CG}| = |\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = |\overrightarrow{GD}| = GD = \frac{2}{3} AI = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$$

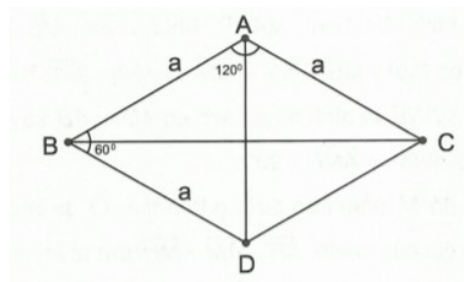
Câu 6.

Vẽ hình thoi $ABCD$.

$$\text{Vì } \widehat{BAC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ABD} = 60^\circ$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} BA = BD \\ \widehat{ABD} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta ABD \text{ đều cạnh } a \Rightarrow AD = a.$$

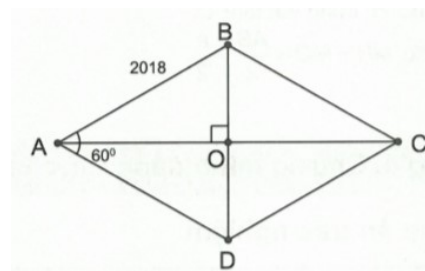
$$\text{Vậy } |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD = a.$$



Câu 7.

$$\text{Ta có } \begin{cases} AB = AD = 2018 \\ \widehat{BAD} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta ABD \text{ đều cạnh bằng } 2018.$$

$$|\overrightarrow{OA}| = OA = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{2018^2 - \left(\frac{2018}{2}\right)^2} = 1009\sqrt{3}.$$



Câu 8.

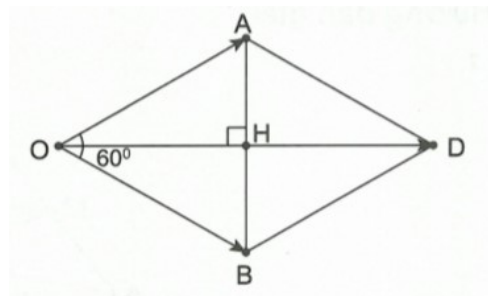
Lực $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OB}$. Vẽ hình thoi $OADB$.

$$\text{Suy ra tổng hợp lực } \overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} OA = OB \\ \widehat{AOB} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta OAB \text{ đều}$$

Gọi H là giao điểm của OD và AB

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{F}| &= |\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}| = |\overrightarrow{OD}| = OD = 2OH = 2\sqrt{OA^2 - AH^2} \\ &= 2\sqrt{100^2 - 50^2} = 100\sqrt{3} (N) \end{aligned}$$



Câu 9.

Ta có

$$\widehat{AMB} = 120^\circ, \widehat{AMC} = 150^\circ \Rightarrow \widehat{BMC} = 360^\circ - 120^\circ - 150^\circ = 90^\circ$$

Vẽ hình chữ nhật $MCDB$

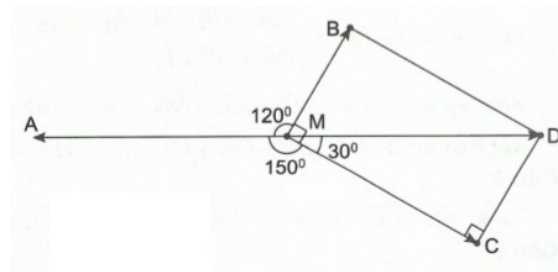
$$\widehat{CMD} = 180^\circ - \widehat{AMC} = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

Vì vật đứng yên nên tổng hợp lực tác động vào vật bằng

$$0 \Rightarrow MD = MA = 50$$

$$\cos \widehat{CMD} = \frac{MC}{MD} \Rightarrow MC = MD \cdot \cos 30^\circ = 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } |\vec{F}_3| = F_3 = MC = 25\sqrt{3}.$$



Câu 10.

Vẽ hình bình hành $MANB$. Khi đó $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MN}$

$$\text{Ta có } |\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} - \vec{MB}| \Leftrightarrow |\vec{MN}| = |\vec{BA}| \text{ hay } MN = AB.$$

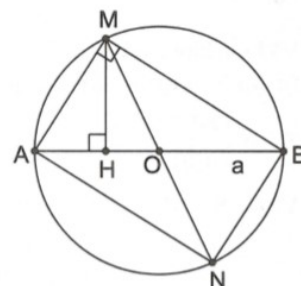
Vì $MANB$ là hình bình hành có $MN = AB$ suy ra $MANB$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ$.

Do đó M nằm trên đường tròn tâm O đường kính AB .

Độ dài của vectơ $\vec{AH} - \vec{AM} = \vec{MH}$ lớn nhất khi MH lớn nhất.

Khi đó H trùng với tâm O .

$$\text{Do đó } MH = MO = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}.$$



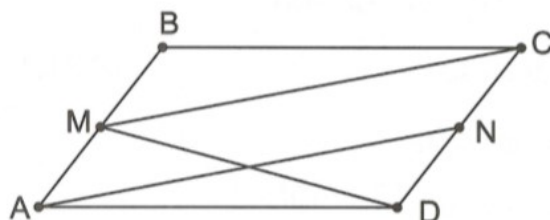
Dạng 4. Chứng minh đẳng thức vectơ

📌 Đáp án trắc nghiệm

1-B	2-C	3-D	4-D	5-C	6-B	7-C	8-A	9-A
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

📌 Hướng dẫn giải

Câu 7.



Xét đáp án A.

$$\vec{NA} + \vec{MB} - \vec{CN} - \vec{DM} = (\vec{NA} + \vec{AM}) + \vec{NC} + \vec{MD} = (\vec{NM} + \vec{MD}) + \vec{NC} = \vec{ND} + \vec{NC} = \vec{0}$$

Xét đáp án B. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \\ \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN}$

Xét đáp án C. $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ND} \Leftrightarrow \overrightarrow{NA} - \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}$ (vô lý)

Xét đáp án D. $\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{MD}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$

Câu 8.

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Câu 9.

Khẳng định ở câu A sai vì

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{ED}) + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB}) + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow C \equiv B$ (vô lý vì B, C phân biệt).