

PHÉP BIẾN HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẪNG

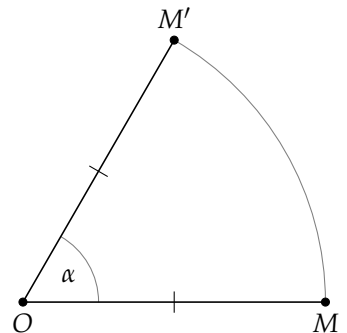
§5 PHÉP QUAY

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa. Cho điểm O và góc lượng giác α . Phép biến hình biến O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và góc lượng giác $(OM; OM')$ bằng α được gọi là phép quay tâm O góc α .

$$Q_{(O, \alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} (OM, OM') = \alpha \\ OM = OM' \end{cases}$$



2 TÍNH CHẤT

Tính chất 1. Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Tính chất 2. Phép quay

- ① Biến một đường thẳng thành đường thẳng.
- ② Biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.
- ③ Biến một tam giác thành tam giác bằng nó.
- ④ Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

3 BIỂU THỨC TỌA ĐỘ

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(x; y), M'(x'; y')$

☑ Phép quay $Q_{(0; \frac{\pi}{2})}$ ta có: $Q_{(0; \frac{\pi}{2})}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$

5. PHÉP QUAY

☑ Phép quay $Q_{(0;-\frac{\pi}{2})}$ ta có: $Q_{(0;-\frac{\pi}{2})}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -x. \end{cases}$

☑ Phép quay $Q_{(0;\varphi)}$ ta có: $Q_{(0;\varphi)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi. \end{cases}$

4 CÁC CHÚ Ý



① Phép quay tâm O góc quay $\alpha = (2k+1)\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$ chính là phép đối xứng tâm O .

② Phép quay tâm O góc quay $\alpha = 2k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$ chính là phép đồng nhất.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định phép quay và ảnh của một hình qua phép quay

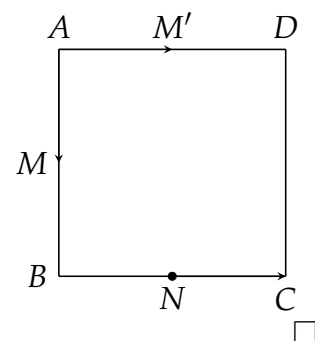
❖❖❖❖ VÍ DỤ MẪU DẠNG 1 ❖❖❖❖

🔵 **Ví dụ 1.** Cho hình vuông $ABCD$ có các đỉnh vẽ theo chiều dương. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC . Xác định phép quay biến $\overrightarrow{AM}$ thành $\overrightarrow{NC}$.

🔵 **Lời giải.**

Gọi M' là trung điểm của AD . Ta có $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AM'}$.

Khi đó ta có phép quay tâm A , góc quay $\alpha = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = 90^\circ$ biến $\overrightarrow{AM}$ thành $\overrightarrow{NC}$.



🔵 **Ví dụ 2.** Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O .

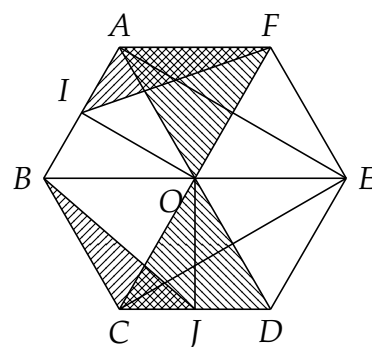
① Tìm ảnh của tam giác AIF qua phép quay tâm O góc 120° , với I là trung điểm của AB .

② Tìm ảnh của tam giác AOF qua phép quay tâm E góc 60° .

🔵 **Lời giải.**

① Ta có phép quay tâm O góc 120° biến A thành C , I thành J với J là trung điểm của CD , F thành B .
Do đó $Q_{(O,120^\circ)}(AIF) = CJB$.

② Ta có phép quay tâm E góc 60° biến A thành C , O thành D , F thành O .
Do đó $Q_{(E,60^\circ)}(AOF) = CDO$.



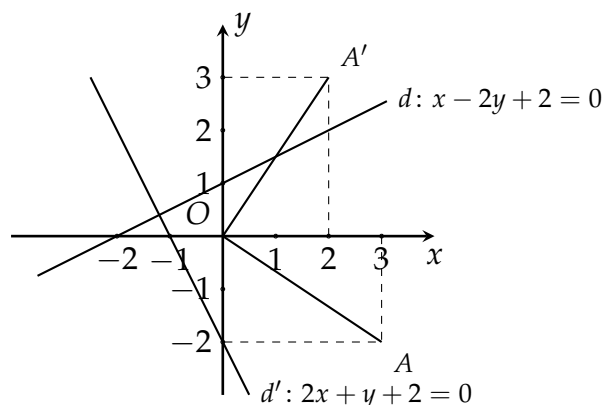
🔵 **Ví dụ 3.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(3; -2)$ và đường thẳng $d: x - 2y + 2 = 0$.

5. PHÉP QUAY

- ① Tìm tọa độ điểm A' là ảnh của A qua phép quay tâm O góc 90° .
- ② Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép quay tâm O góc 90° .

Lời giải.

- ① Gọi $A_1(3;0)$, $A_2(0;-2)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các trục Ox , Oy . Ta có phép quay tâm O góc 90° biến $A_1(3;0)$ thành điểm $A'_1(0;3)$, $A_2(0;-2)$ thành $A'_2(2;0)$. Do đó $Q_{(O,90^\circ)}$ biến A thành $A'(2;3)$.



- ② Đường thẳng d cắt các trục Ox , Oy lần lượt tại $B(-2;0)$ và $C(0;1)$. Phép quay tâm O góc 90° biến $B(-2;0)$ thành $B'(0;-2)$, biến $C(0;1)$ thành $C'(-1;0)$. Do đó nó biến d thành đường thẳng d' đi qua hai điểm B' và C' . Ta có phương trình đường thẳng $(B'C')$ là

$$\frac{x}{-1} + \frac{y}{-2} = 1 \Leftrightarrow 2x + y + 2 = 0.$$

Vậy $d' : 2x + y + 2 = 0$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

 **Bài 1.** Gọi d' là ảnh của đường thẳng d qua phép quay tâm O , góc quay φ . Hỏi góc giữa đường thẳng d và đường thẳng d' bằng bao nhiêu nếu

- ① $0^\circ < \varphi \leq 90^\circ$.
- ② $90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$.

 **Bài 2.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Gọi M là trung điểm cạnh AB và N là trung điểm OA .

- ① Tìm ảnh của điểm C qua $Q_{(A,90^\circ)}$.
- ② Tìm ảnh của đường thẳng BC qua $Q_{(O,90^\circ)}$.
- ③ Tìm ảnh của tam giác AMN qua $Q_{(O,90^\circ)}$.

 **Bài 3.** Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(1;1)$, $B(0;5)$, $C(-2;-1)$ và đường thẳng $d: 2x - y - 4 = 0$. Hãy xác định tọa độ các đỉnh của tam giác $A'B'C'$ và phương trình đường thẳng d' theo thứ tự là ảnh của tam giác ABC và đường thẳng d qua phép quay tâm O , góc quay 90° .

Dạng 2. Sử dụng phép quay để giải một số bài toán hình học

- Dùng định nghĩa và các tính chất của phép quay.
- Dùng hình vẽ để tìm ảnh của một điểm qua một phép quay cho trước hoặc áp dụng công

5. PHÉP QUAY

thức $\begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases}$.

- Giải các yêu cầu của bài toán.

❖❖❖ VÍ DỤ MẪU DẠNG 2 ❖❖❖

🔵 **Ví dụ 1.** Cho hai hình vuông $ABCD$ và $BEFG$, trong đó A, B, E thẳng hàng và G nằm trên cạnh BC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AG, CE . Chứng minh tam giác BMN vuông cân.

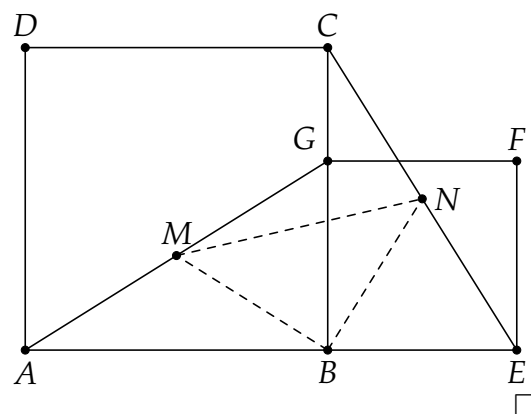
🔵 **Lời giải.**

$Q_{(O, -90^\circ)}$ biến tam giác ABG thành tam giác CBE .

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AG, CE nên $Q_{(O, -90^\circ)}$

biến điểm M thành điểm N .

Suy ra $\widehat{MBN} = 90^\circ$ hay tam giác BMN vuông cân tại B .



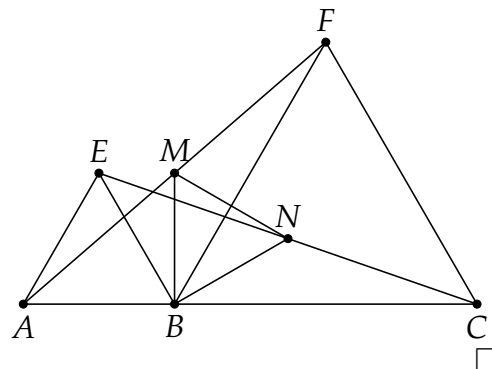
🔵 **Ví dụ 2.** Cho ba điểm thẳng hàng A, B, C , trong đó điểm B nằm giữa hai điểm A và C . Dựng về một phía của đường thẳng AC các tam giác đều ABE và BCF . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AF, EC . Chứng minh tam giác BMN đều.

🔵 **Lời giải.**

$Q_{(O, 60^\circ)}$ biến đường thẳng EC thành đường thẳng AF .

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AF, EC nên $Q_{(O, 60^\circ)}$ biến điểm N thành điểm M .

Suy ra $BM = BN$ và $\widehat{NBM} = 60^\circ$. Do đó tam giác BMN đều.



🔵 **Ví dụ 3.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(2; 2)$. Tìm ảnh của A qua phép quay tâm O góc 45° .

🔵 **Lời giải.**

Áp dụng công thức $\begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases}$. Với $A'(x'; y')$ là ảnh của $A(x; y)$ qua $Q_{(O, \varphi)}$.

Ta có: $\begin{cases} x' = 2 \cos 45^\circ - 2 \sin 45^\circ \\ y' = 2 \sin 45^\circ + 2 \cos 45^\circ \end{cases}$

Vậy $A'(0; 2\sqrt{2})$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

🔵 **Bài 1.** Cho nửa đường tròn tâm (O) , đường kính BC . Điểm A thay đổi chạy trên nửa đường tròn. Dựng về phía ngoài tam giác ABC hình vuông $ABEF$. Chứng minh rằng E chạy trên nửa đường tròn cố định.

5. PHÉP QUAY

Bài 2. Cho đường tròn tâm (O, R) , điểm M thuộc (O, R) . Điểm M' là ảnh của M qua $Q_{(O, 30^\circ)}$, điểm M'' là ảnh của M' qua D_{OM} . Chứng minh tam giác $OM'M''$ là tam giác đều.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 6x + 6y + 14 = 0$. Tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép quay tâm O góc 45° .

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(2; 0)$ và đường thẳng $d : x + y - 2 = 0$. Tìm ảnh của A và d qua phép quay tâm O góc 90° .

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C) : (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$. Tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép quay tâm O góc 90° .

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C) : (x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 5$. Tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép quay tâm O góc -90° .

Bài 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d : x - 3y + 5 = 0$. Tìm ảnh của d qua phép quay tâm O góc -90° .

Bài 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(-1; 3)$. Tìm ảnh của M qua phép quay tâm O góc 135° .

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d : x + y - 2 = 0$. Tìm ảnh của đường thẳng d qua phép quay tâm O góc 45° .

Bài 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0$. Tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép quay tâm O góc -60° .

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Phép quay $Q_{(O, \alpha)}$ biến điểm A thành điểm A' . Khi đó

A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}$ và $(OA; OA') = \alpha$.

B. $OA = OA'$ và $(OA; OA') = \alpha$.

C. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}$ và $\widehat{AOA'} = \alpha$.

D. $OA = OA'$ và $\widehat{AOA'} = \alpha$.

Câu 2. Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau? (1) Phép quay biến tâm quay thành chính nó.

(2) Phép quay biến tam giác thành tam giác bằng nó.

(3) Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

(4) Phép quay biến đường thẳng a thành a' thì góc giữa a và a' bằng góc quay.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 3.

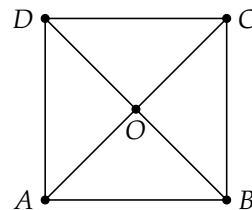
Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Phép quay nào sau đây biến điểm B thành điểm D ?

A. Phép quay tâm O , góc quay $\frac{3\pi}{2}$.

B. Phép quay tâm O , góc quay $\frac{\pi}{2}$.

C. Phép quay tâm O , góc quay π .

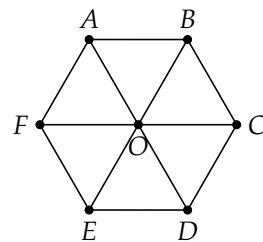
D. Phép quay tâm O , góc quay 2π .



Câu 4. Trong hình lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Phép quay $Q_{(O, \frac{\pi}{3})}$ biến điểm C thành điểm nào?

5. PHÉP QUAY

- A. Điểm B. B. Điểm D. C. Điểm A. D. Điểm E.



Câu 5. Phép quay tâm O góc 180° biến trục hoành thành đường thẳng có phương trình nào sau đây?

- A. $x = 0$. B. $y = 0$. C. $x - y = 0$. D. $y - 1 = 0$.

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(2; -1)$, phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ với $\vec{v} = (1; 1)$, phép quay $Q_{(O, -90^\circ)}$. Gọi B là ảnh của điểm A khi thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ và phép quay $Q_{(O, -90^\circ)}$. Tìm tọa độ của điểm B .

- A. $B(0; 3)$. B. $B(-2; 1)$. C. $B(0; -3)$. D. $B(-2; -1)$.

Câu 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: 3x - y + 1 = 0$, đường thẳng nào trong các đường thẳng có phương trình sau là ảnh của d qua phép quay tâm $O(0; 0)$ góc -90° ?

- A. $x + y + 1 = 0$. B. $x + 3y - 1 = 0$. C. $3x + y + 2 = 0$. D. $x + 3y + 1 = 0$.

Câu 8. Trong mặt phẳng Oxy , đường tròn (C') : $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$ là ảnh của đường tròn (C) qua phép quay tâm O , góc quay -90° . Khi đó phương trình đường tròn (C) là

- A. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$. B. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$.
C. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$. D. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$.

Câu 9. Cho tam giác đều ABC và điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho $MA : MB : MC = 5 : 4 : 3$. Tính $\widehat{BMC}$.

- A. $\widehat{BMC} = 135^\circ$. B. $\widehat{BMC} = 105^\circ$. C. $\widehat{BMC} = 120^\circ$. D. $\widehat{BMC} = 150^\circ$.

Câu 10. Cho đa giác đều $A_1A_2A_3 \dots A_{100}$ tâm O có các đỉnh sắp theo chiều dương và phép quay $Q_{(O, \varphi)}$ với $\varphi = \widehat{A_1OA_3}$. Nếu thực hiện phép quay $Q_{(O, \varphi)}$ liên tiếp 2017 lần thì điểm A_{18} biến thành điểm nào?

- A. A_{52} . B. A_{50} . C. A_{36} . D. A_{34} .

Câu 11. Cho tam giác đều tâm O . Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc α ($0 \leq \alpha < 2\pi$), biến tam giác trên thành chính nó?

- A. Một. B. Hai. C. Ba. D. Bốn.

Câu 12. Cho hình vuông tâm O . Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc α ($0 \leq \alpha < 2\pi$), biến hình vuông trên thành chính nó?

- A. Một. B. Hai. C. Ba. D. Bốn.

Câu 13. Cho tam giác ABC vuông tại A có góc $\widehat{B} = 60^\circ$. Phép quay tâm B , góc quay $\alpha = (BA, BC)$ biến điểm A thành điểm H . Khẳng định nào sau đây sai

- A. $\widehat{AHC} = 90^\circ$. B. H, C, B thẳng hàng.
C. Tam giác ABH đều. D. $AB = BC - HC$.

Câu 14. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Phép quay tâm B , góc quay $\alpha = (BA, BC)$ biến điểm A thành điểm M . Biết độ dài cạnh AC bằng a . Tính độ dài cạnh MC .

- A. $\frac{a(\sqrt{2} + 1)}{2}$. B. $a(\sqrt{2} - 1)$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{2a}{3}$.

Câu 15. Trong mặt phẳng Oxy , tọa độ ảnh A' của điểm $A(4; 5)$ qua phép quay tâm O góc quay 90° có tọa độ là

- A. $(-4; 5)$. B. $(4; -5)$. C. $(5; 4)$. D. $(-5; 4)$.

5. PHÉP QUAY

Câu 16. Trong mặt phẳng Oxy , đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng $d: 2x - 3y + 6 = 0$ qua phép quay tâm O góc quay 90° có phương trình là

- A. $3x - 2y - 6 = 0$. B. $3x + 2y - 6 = 0$. C. $3x - 2y + 6 = 0$. D. $3x + 2y + 6 = 0$.

Câu 17. Trong mặt phẳng Oxy , phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn $(C): (x + 3)^2 + y^2 = 16$ qua phép quay tâm O góc quay 90° là

- A. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 16$. B. $x^2 + (y + 3)^2 = 16$.
C. $(x - 1)^2 + y^2 = 16$. D. $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$.

Câu 18. Cho hai đường thẳng d và d' bất kỳ. Có bao nhiêu phép quay biến đường thẳng d thành đường thẳng d' ?

- A. Không có phép quay nào. B. Có một phép quay duy nhất.
C. Chỉ có hai phép quay. D. Có vô số phép quay.

Câu 19. Cho điểm $I(3; 2)$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$. Dựng hình vuông $ABCD$ tâm I có A thuộc (C) và góc lượng giác $(AB, AD) = -90^\circ$. Khi A thay đổi trên (C) thì điểm B thuộc đường nào dưới đây?

- A. $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$. B. $x - y + 3 = 0$.
C. $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 = 0$. D. $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 25 = 0$.

Câu 20. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ và $(C'): x^2 + y^2 + 4x = 0$. Tìm tọa độ tâm của phép quay góc $\pm 90^\circ$ biến (C) thành (C') ?

- A. $A\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ hoặc $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. B. $A\left(-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$ hoặc $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.
C. $A\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$ hoặc $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. D. $A\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)$ hoặc $A\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

ĐÁP ÁN

1 B	3 C	5 B	7 B	9 D	11 C	13 A	15 D	17 B	19 C
2 C	4 A	6 C	8 C	10 A	12 D	14 B	16 D	18 D	20 C