

LUYỆN TẬP TÍCH CỦA VECTOR VỚI MỘT SỐ

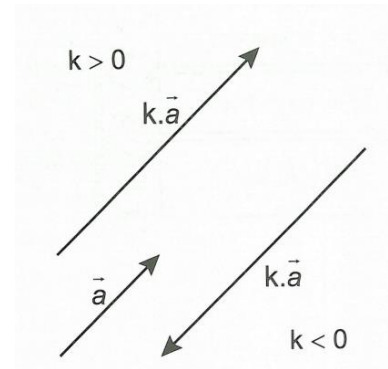
I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Định nghĩa

Cho số $k \neq 0$ và vector $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của vector $\vec{a}$ với số k là một vector, kí hiệu $k\vec{a}$.

- Nếu $k > 0$ thì $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$.
- Nếu $k < 0$ thì $k\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{a}$.

Độ dài của $k\vec{a}$ là: $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$.



Tính chất

Với hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì, với mọi số h và k , ta có

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b};$$

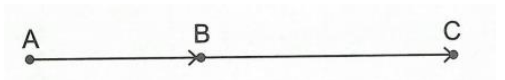
$$(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a};$$

$$h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a};$$

$$1.\vec{a} = \vec{a}; (-1)\vec{a} = -\vec{a}.$$

Điều kiện để hai vector cùng phương

- $\vec{b}$ cùng phương $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$) khi và chỉ khi có số k thỏa mãn



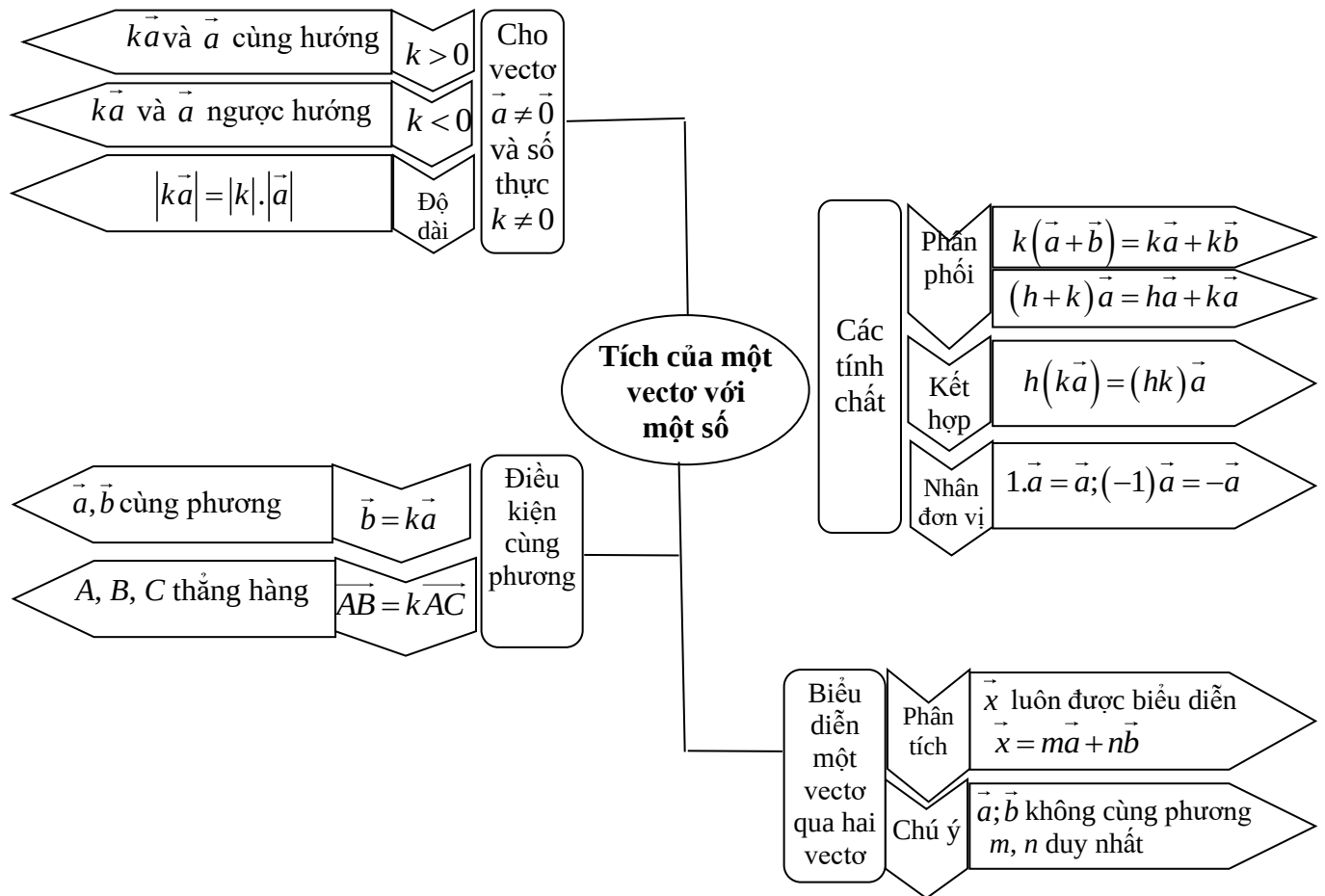
$$\vec{b} = k\vec{a}.$$

Mở rộng: Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là có số k sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

Phân tích một vector theo hai vector không cùng phương

Cho $\vec{a}$ không cùng phương với $\vec{b}$. Khi đó mọi vector $\vec{x}$ luôn biểu diễn được dạng $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$ và biểu diễn đó là duy nhất (có đúng một hệ số m, n)

Sơ đồ lý thuyết



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Chứng minh đẳng thức vector

Phương pháp giải

Bài toán chứng minh một đẳng thức vector, ngoài việc sử dụng các quy tắc cộng, trừ hai vector, thì trong bài này còn sử dụng tính chất của phép nhân vector với một số. Ta lưu ý một số vấn đề sau

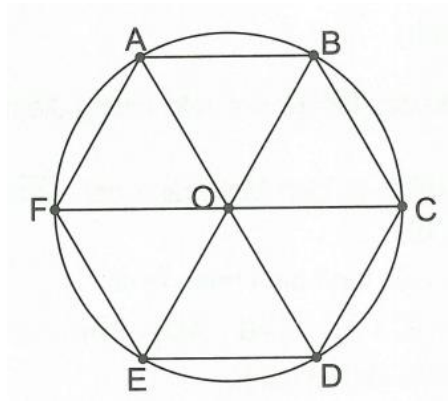
- $k \neq 0$ và $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích $k\vec{a}$ là một vector có
 - + Phương: Cùng phương với vector $\vec{a}$.
 - + Hướng: $k > 0$: cùng hướng với vector $\vec{a}$.
 $k < 0$: ngược hướng với vector $\vec{a}$.
 - + Độ dài: $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$.
- Quy ước: $0\vec{a} = \vec{0}$ và $k\vec{0} = \vec{0}$.

- Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì với mọi điểm M ta có $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$.
- Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với mọi điểm M thì ta có $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$.

Ví dụ: Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O . Chứng minh rằng

- $\vec{AB} - \vec{EC} + 2\vec{OA} = \vec{CA}$
- $\vec{DE} + \vec{DF} + \vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC} = 3\vec{DA}$

Hướng dẫn giải



a) Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EC} + 2\overrightarrow{OA} = (\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EC}) + 2\overrightarrow{OA}$
 $= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$ (điều phải chứng minh).

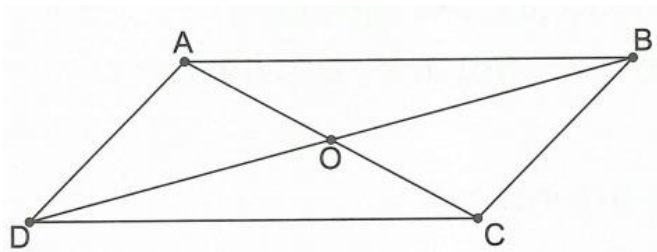
b) Ta có
 $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$
 $= (\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$
 $= \overrightarrow{DO} + (\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DO}) + \overrightarrow{DA} + (\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{DC})$
 $= 3\overrightarrow{DO} + (\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{DA}$
 $= 4\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA}$
 $= 3\overrightarrow{DA}$ (điều phải chứng minh)

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Chứng minh rằng

- $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} = 0$
- $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$
- $\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{OC}$
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$
- $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$
- $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$

Hướng dẫn giải



a) Theo quy tắc hình bình hành ta có $(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ (điều phải chứng minh)

b) Theo quy tắc trừ hai vector chung điểm đầu ta có
$$\begin{cases} \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BA} \end{cases}$$

Mà $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$ (điều phải chứng minh)

c) Theo quy tắc hình bình hành ta có

$$\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + 3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AC} \text{ (điều phải chứng minh)}$$

d) Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{OC}$ (điều phải chứng minh)

e) Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}$ (hiển nhiên)

Ta suy ra điều phải chứng minh.

f) Ta có $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD}$ (hiển nhiên)

Ta suy ra điều phải chứng minh.

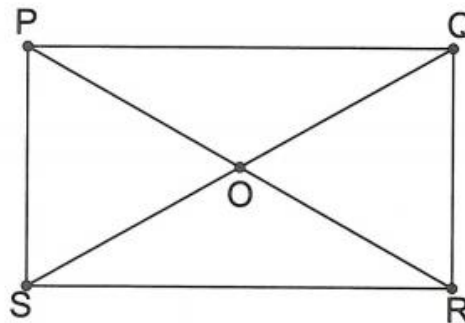
g) Ta có $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = 2\overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$
 $= 2\overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}) = 2\overrightarrow{BC}$ (điều phải chứng minh).

h) Ta có $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) = \vec{0} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$ (điều phải chứng minh).

Ví dụ 2. Cho hình chữ nhật $PQRS$ tâm O .

- Chứng minh $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SQ}$
- Chứng minh $\overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{RO} = 4\overrightarrow{OP}$
- Chứng minh $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MS}$ với mọi điểm M .

Hướng dẫn giải



a) Ta có $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SQ}$ (điều phải chứng minh)

b) Ta có $\overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{RO} = (\overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QO}) + (\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SP}) + (\overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OP})$
 $= \overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{RP}$
 $= 2\overrightarrow{RP} = 2.2.\overrightarrow{OP} = 4\overrightarrow{OP}$ (điều phải chứng minh).

c) **Cách 1.** Với mọi điểm M ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MR} &= (\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QP}) + (\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SR}) = (\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MS}) + (\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{SR}) \\ &= (\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MS}) + (\overrightarrow{QP} - \overrightarrow{QP}) = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MS}\end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

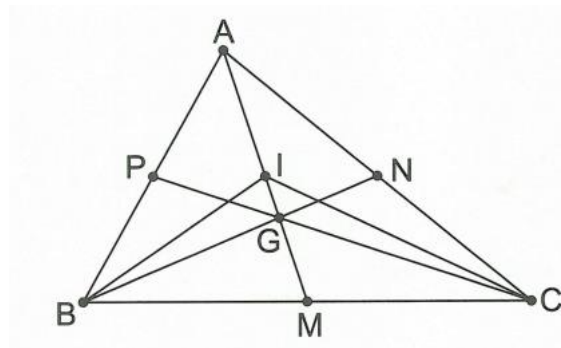
Cách 2. Vì O là trung điểm của PR và QS nên với mọi điểm M ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MR} = 2\overrightarrow{MO} \\ \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MS} = 2\overrightarrow{MO} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MS} \text{ (điều phải chứng minh).}$$

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và gọi I là trung điểm AM . Chứng minh

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$
- $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{IA} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HG}$ với mọi điểm H .

Hướng dẫn giải



- a) Theo tính chất của trung điểm ta có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} = 2 \cdot \frac{3}{2} \overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AG} \text{ (điều phải chứng minh).}$$

- b) Theo tính chất của trung điểm ta có

$$(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) + 2\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IM} + 2\overrightarrow{IA} = 2(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IA}) = 2\vec{0} = \vec{0} \text{ (điều phải chứng minh).}$$

$$c) \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{GB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{GC} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = -\frac{1}{2} \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

(điều phải chứng minh).

- d) Với điểm H bất kỳ, ta có

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = (\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{HG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{HG} + \vec{0} = 3\overrightarrow{HG}$$

(điều phải chứng minh).

Ví dụ 4. Nếu G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ thì $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$. Từ đó suy ra hai tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ có cùng trọng tâm khi và chỉ khi $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

Hướng dẫn giải

Với G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$, ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} &= (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'}) + (\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'}) + (\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'}) \\ &= (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) + (\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'}) + 3\overrightarrow{GG'} = \vec{0} + \vec{0} + 3\overrightarrow{GG'} = 3\overrightarrow{GG'}\end{aligned}$$

(điều phải chứng minh).

Đặc biệt:

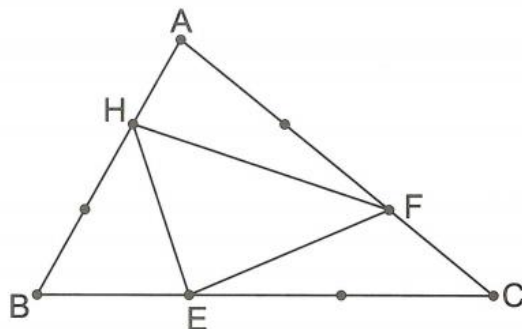
Hai tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ có cùng trọng tâm

$$\Leftrightarrow G \equiv G' \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GG'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0} \text{ (điều phải chứng minh).}$$

Lưu ý: Từ bài toán này trở đi, để chứng minh hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm G và G' ta chứng minh trực tiếp hai trọng tâm G và G' trùng nhau hoặc chứng minh $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC . Gọi H, E, F lần lượt là các điểm trên cạnh AB, BC và CA sao cho $AB = 3AH, CB = 3BE, CA = 3CF$. Chứng minh hai tam giác ABC và HEF có cùng trọng tâm.

Hướng dẫn giải



$$\text{Ta có } \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{3}.\vec{0} = \vec{0}$$

Suy ra tam giác ABC và tam giác HEF có cùng trọng tâm.

🌈 Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Khẳng định nào sau đây đúng?

- | | |
|--|---|
| A. Hai vector $\vec{a}, k\vec{a}$ luôn cùng hướng. | B. Hai vector $\vec{a}, k\vec{a}$ luôn cùng phương. |
| C. Hai vector $\vec{a}, k\vec{a}$ có độ dài bằng nhau. | D. Hai vector $\vec{a}, k\vec{a}$ luôn ngược hướng. |

Câu 2: Cho tam giác ABC . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Khẳng định nào sau đây sai?

- | | | | |
|---|---|--|--|
| A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$ | B. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{NC}$ | C. $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{MN}$ | D. $\overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ |
|---|---|--|--|

Câu 3: Phát biểu nào là sai?

A. Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì A, B, C, D thẳng hàng.

C. Nếu $3\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ thì A, B, C thẳng hàng.

D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BA}$.

Câu 4: Cho hình bình hành $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AC}$

Câu 5: Cho hình bình hành $ABCD$ có M là giao điểm của hai đường chéo. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM}$

D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

Câu 6: Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$

B. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$

C. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$

D. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$

Câu 7: Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm AM . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

B. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

C. $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{IA}$

D. $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA}$

Câu 8: Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD, BC của tứ giác $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{MN}$

B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}$

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$

D. $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MN}$

Câu 9: Cho tam giác ABC có trọng tâm G , O là một điểm bất kì. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}$

B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OG}$

C. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} = 3\overrightarrow{GO}$

D. $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$

Câu 10: Cho $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có trọng tâm lần lượt là G và G' . Khi đó, tổng của ba vector $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$ bằng

A. $\overrightarrow{GG'}$

B. $2\overrightarrow{GG'}$

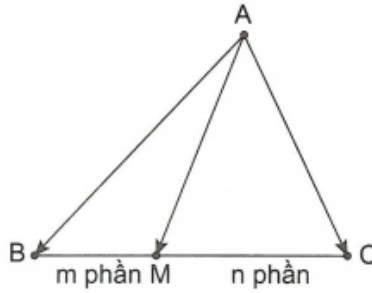
C. $3\overrightarrow{GG'}$

D. $-\overrightarrow{GG'}$

Dạng 2: Phân tích (biểu diễn) một vector theo hai vector cho trước

 **Phương pháp giải**

- Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương và $\vec{x}$ bất kì. Khi đó, có duy nhất cặp số h, k sao cho $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$.
- Dùng các phép toán cộng, trừ, nhân vector với một số để phân tích vector $\vec{x}$ chỉ phụ thuộc theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
- Bài toán phân tích số 1:** Với điểm M như hình vẽ, ta có

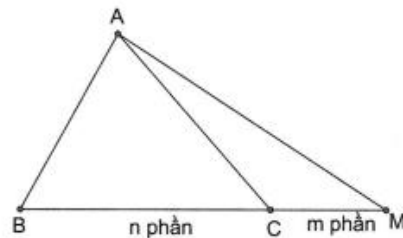
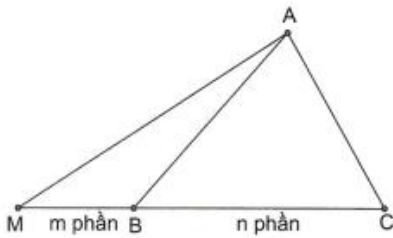


$$\overrightarrow{AM} = \frac{n}{m+n} \overrightarrow{AB} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{AC}$$

Đặc biệt: Nếu M là trung điểm BC thì

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}.$$

- **Bài toán phân tích số 2:** Với điểm M như hình vẽ, ta có



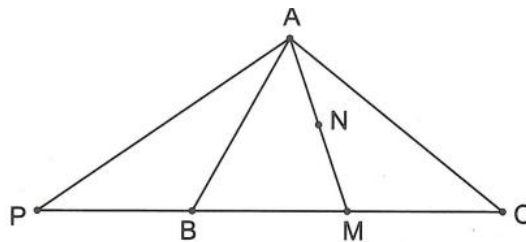
$$\overrightarrow{AM} = \frac{m+n}{n} \overrightarrow{AB} - \frac{m}{n} \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{m+n}{n} \overrightarrow{AC} - \frac{m}{n} \overrightarrow{AB}$$

- $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k : \vec{a} = k\vec{b}$.
- A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AC}$
 $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.
- Nếu $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ và hai đường thẳng AB, CD phân biệt thì $AB // CD$.

Ví dụ: Cho tam giác ABC có M là trung điểm BC, N là trung điểm AM và P là điểm đối xứng với M qua B. Hãy phân tích $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AP}$ theo hai vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ và $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn giải



Vì N là trung điểm của AM và M là trung điểm của BC nên ta có

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{4} \vec{u} + \frac{1}{4} \vec{v}$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CB}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \frac{3}{2} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2} \vec{u} - \frac{1}{2} \vec{v}$$

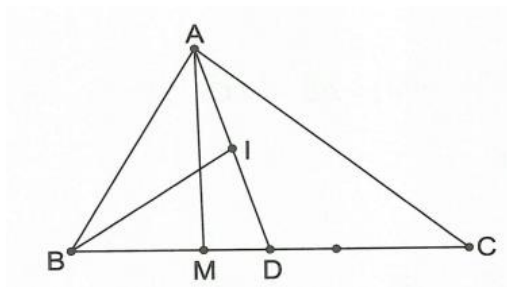
Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AD . Gọi I là trung điểm AD và M là điểm sao cho $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB}$.

a) Hãy phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Hãy phân tích $\overrightarrow{BI}$ theo hai vector $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$.

Hướng dẫn giải



a) Vì $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB}$ nên $-\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{MB}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AC} + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AB} \\ &= 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AM} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$$

b) Vì I là trung điểm của AD nên ta có

$$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} + \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}$$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC . Gọi M, I, J là ba điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{JC}$ và K là trung điểm của đoạn IJ .

a) Hãy phân tích vector $\overrightarrow{AM}$ theo các vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

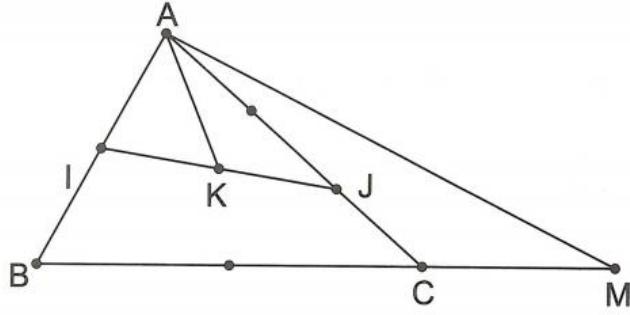
b) Hãy phân tích vector $\overrightarrow{AK}$ theo các vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn giải

$$\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow M \text{ thuộc đường thẳng } BC \text{ sao cho } C \text{ nằm giữa } B, M \text{ và } MB = 3MC.$$

$$\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow I \text{ là trung điểm của đoạn thẳng } AB.$$

$$\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{JC} \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Rightarrow J \text{ thuộc đoạn thẳng } AC \text{ sao cho } JA = 2JC$$



a) $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{CM}$

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} + 3(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AM}$

$$\Rightarrow -2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

b) Theo tính chất của trung điểm ta có

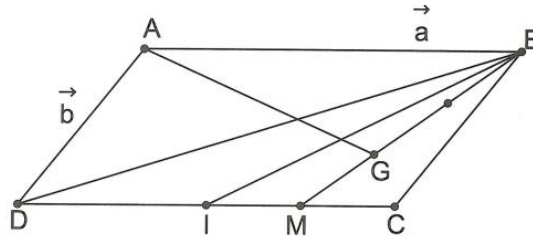
$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

Ví dụ 3. Cho hình bình hành $ABCD$, đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Gọi I là trung điểm của CD , G là trọng tâm của tam giác BCI .

a) Phân tích các vector $\overrightarrow{BI}$ theo $\vec{a}, \vec{b}$.

b) Phân tích các vector $\overrightarrow{AG}$ theo $\vec{a}, \vec{b}$.

Hướng dẫn giải



a) Ta có $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$

b) Ta có $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \right)$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

$$= \vec{a} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} \right) + \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{5}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có I là điểm trên cạnh AC sao cho $CI = \frac{1}{4}AC$, J là điểm thỏa mãn

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

a) Chứng minh rằng ba điểm B, I, J thẳng hàng.

b) Xác định điểm J thỏa yêu cầu bài toán.

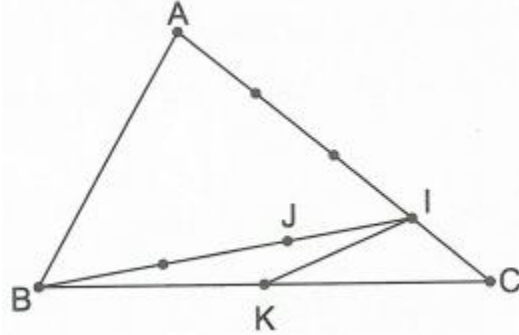
c) Gọi K là trung điểm của BC . Biểu diễn $\overrightarrow{IK}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Mặt khác $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Suy ra $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BJ} \Rightarrow \overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BJ}$ cùng phương $\Rightarrow$ ba điểm B, I, J thẳng hàng.



b) Vì $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BJ} \Rightarrow \overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI} \Rightarrow J$ thuộc đoạn thẳng BI sao cho $BJ = \frac{2}{3}BI$.

c) Ta có $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BI} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) + \frac{1}{8}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

🌈 Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC . Tính $\overrightarrow{AB}$ theo $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$

Câu 2: Cho ba điểm M, N, P thỏa mãn $\overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{MP}$. Với điểm O bất kì, đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{OM} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP})$

B. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{ON} - 2\overrightarrow{OP})$

C. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP})$

D. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(-\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP})$

Câu 3: Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 3MC$. Khi đó, vectơ $\overrightarrow{AM}$ được biểu diễn theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là

A. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

B. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

Câu 4: Cho tam giác OAB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm hai cạnh OA và OB . Các số m, n thích hợp để có đẳng thức $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ là

A. $m = \frac{1}{2}, n = 0$

B. $m = 0, n = \frac{1}{2}$

C. $m = \frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$

D. $m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$

Câu 5: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là điểm xác định bởi $\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BC}$ ($k \neq 1$). Hệ thức giữa $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ là

A. $\overrightarrow{AI} = (k-1)\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}$

B. $\overrightarrow{AI} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AI} = (1+k)\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{AI} = (1+k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$

Câu 6: Cho tam giác ABC , điểm M thuộc cạnh AB sao cho $3AM = AB$ và N là trung điểm của AC . Tính $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

B. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Câu 7: Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của BC , H là điểm đối xứng của I qua C . Ta có $\overrightarrow{AH}$ bằng

A. $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AI}$

B. $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}$

C. $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

D. $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AI}$

Câu 8: Cho AD và BE là hai phân giác trong của tam giác ABC . Biết $AB = 4, BC = 5$ và $CA = 6$. Khi đó $\overrightarrow{DE}$ bằng

A. $\frac{5}{9}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$

B. $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{5}{9}\overrightarrow{CB}$

C. $\frac{9}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$

D. $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{9}{5}\overrightarrow{CB}$

Câu 9: Cho tam giác ABC . Lấy điểm D đối xứng với A qua B và lấy điểm E trên đoạn AC sao cho $3AE = 2EC$. Nếu $\overrightarrow{DE} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ thì giá trị $m.n$ là

A. $m.n = -\frac{2}{5}$

B. $m.n = -\frac{4}{5}$

C. $m.n = \frac{4}{5}$

D. $m.n = \frac{2}{5}$

Câu 10: Cho hình bình hành $ABCD$, tâm O , G là trọng tâm tam giác OCD . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Hãy tính vectơ $\overrightarrow{BG}$ theo $\vec{a}; \vec{b}$.

A. $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}$

B. $\overrightarrow{BG} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

C. $\overrightarrow{BG} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}$

D. $\overrightarrow{BG} = \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$

Dạng 3. Tính độ dài của tổng, hiệu các vectơ và tích của vectơ với một số

Phương pháp giải

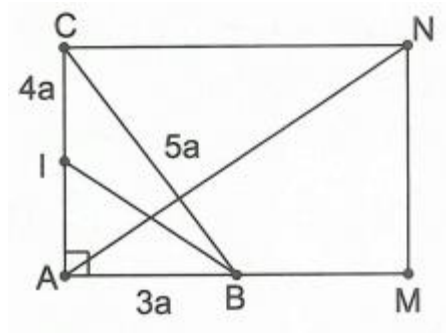
Dạng toán tìm độ dài của vectơ được phát triển từ Bài 1, Bài 2 và hoàn thiện ở Bài 3 với mức độ khó tăng dần. Đó là do các phép toán về vectơ được phối hợp ngày càng đa dạng hơn ở các bài học về sau. Phương pháp chung để tìm độ dài của tổng, hiệu các vectơ và tích của vectơ với một số vẫn là

- Biến đổi vectơ tổng, vectơ hiệu thành một tích của một số với một vectơ duy nhất.
- Tính độ dài của vectơ đó. Từ đó suy ra độ dài của vectơ đã cho.

Ví dụ: Cho tam giác ABC vuông tại $A, BC = 5a, AB = 3a$. Tính độ dài của các vectơ

- a) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$
 b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$
 c) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Hướng dẫn giải



a) $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = CA$

$$= \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(5a)^2 - (3a)^2} = 4a$$

b) Gọi I là trung điểm AC .

Ta có $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |2\overrightarrow{BI}| = 2BI$

$$= 2\sqrt{AI^2 + AB^2} = 2\sqrt{(2a)^2 + (3a)^2} = 2\sqrt{13}a$$

c) Gọi M là điểm đối xứng với A qua B . Vẽ hình chữ nhật $AMNC$. Ta có

$$|2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AN}| = AN$$

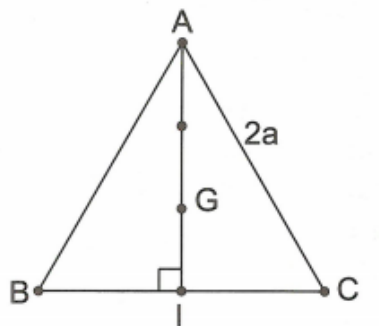
$$= \sqrt{AM^2 + MN^2} = \sqrt{(6a)^2 + (4a)^2} = 2\sqrt{13}a$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC đều cạnh $2a$, có trọng tâm G . Gọi I là trung điểm của BC . Hãy tính

- a) $|\overrightarrow{AI}|$ b) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$
 c) $|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AG}|$ d) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{AC}|$

Hướng dẫn giải



a) Ta có $|\overrightarrow{AI}| = AI = \sqrt{AB^2 - BI^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

b) Trong mục này, ta sẽ giải quyết bài toán tìm độ dài vector tổng mà không cần phải vẽ hình bình hành.

Ta có $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AI}| = 2AI = 2a\sqrt{3}$

$$c) \text{ Ta có } |\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AG}| = |2\overrightarrow{GI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}| = |2 \cdot \frac{1}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}| = |\frac{4}{3}\overrightarrow{AI}| = \frac{4}{3} \cdot AI = \frac{4a\sqrt{3}}{3}$$

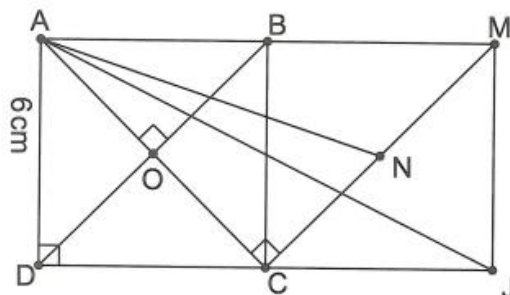
$$d) \text{ Ta có } |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{AC}| = |(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{GI}| = |2\overrightarrow{AI} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}| = |\frac{5}{3}\overrightarrow{AI}| = \frac{5}{3}AI = \frac{5a\sqrt{3}}{3}$$

Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 6cm. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Tính độ dài các vector

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}$

b) $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}$ và $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Hướng dẫn giải



a) Ta có $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}cm$, $OC = \frac{AC}{2} = 3\sqrt{2}cm$.

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}| = |2\overrightarrow{AB}| = 2AB = 12cm$$

$$|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{BO}| = BO = OC = 3\sqrt{2}cm$$

b) Gọi M là điểm đối xứng với B qua A . Vẽ hình chữ nhật $AMJD$ và gọi N là trung điểm của CM .

$$|2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AJ}| = AJ = \sqrt{AM^2 + MJ^2} = \sqrt{12^2 + 6^2} = 6\sqrt{5}cm.$$

Ta có $ABCD$, $BMJC$ là các hình vuông có cạnh bằng nhau nên

$$\angle ACM = \angle ACB + \angle BCM = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ACN \text{ vuông tại } N \text{ và } CN = \frac{CM}{2} = \frac{AC}{2} = 3\sqrt{2}cm.$$

$$\text{Khi đó } |2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AN}| = 2AN = 2\sqrt{AC^2 + CN^2}$$

$$= 2\sqrt{(6\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = 6\sqrt{10}cm.$$

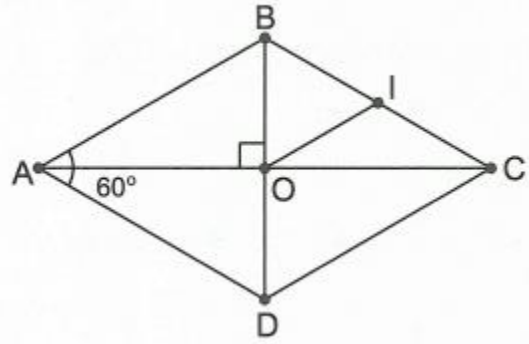
Ví dụ 3. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a , góc $BAD = 60^\circ$. Gọi O là giao điểm hai đường chéo. Tính

a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$

b) $|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DC}|$

c) $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}|$

Hướng dẫn giải



a) Vì $\begin{cases} AB = AD = a \\ \angle BAD = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta ABD \text{ đều cạnh } a.$

Ta có $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |2\overrightarrow{AO}| = 2AO = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

b) $|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{OA}| = OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) Gọi I là trung điểm của BC . Ta có $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = |2\overrightarrow{OI}| = |\overrightarrow{AB}| = AB = a$

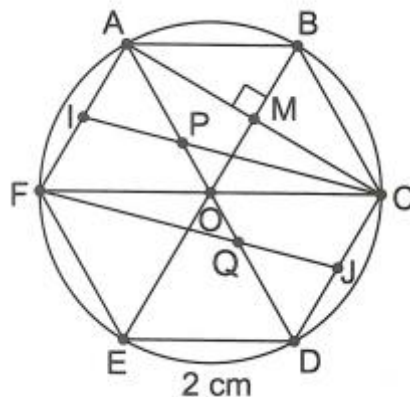
Ví dụ 4. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O , cạnh bằng 2cm. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AF và CD , P và Q lần lượt là giao điểm của CI, FJ với AD . Tính độ dài các vector

a) $|\overrightarrow{AC}|$

b) $|\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PF}|$

c) $|\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PF}|$

Hướng dẫn giải



a) Ta có $AB = BC = CD = DE = EF = FA = OA = OB = OC = OD = OE = OF = 2\text{cm}.$
 $\Rightarrow \Delta OAB$ đều cạnh bằng 2cm.

Gọi M là giao điểm của hai đường chéo OB và AC của hình thoi $ABCO$.

$|\overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AM}| = 2AM = 2\sqrt{AB^2 - BM^2} = 2\sqrt{2^2 - 1^2} = 2\sqrt{3}\text{cm}.$

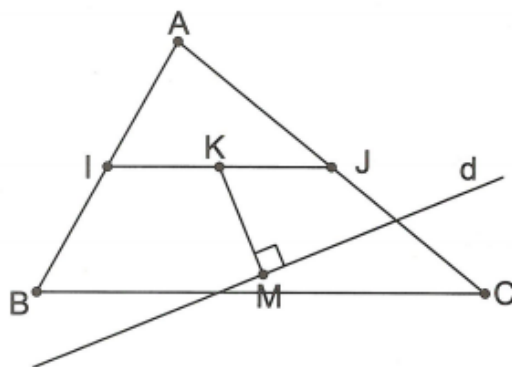
b) Ta có $|\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PF}| = |\overrightarrow{FC}| = FC = 2OC = 2.2 = 4\text{cm}$.

c) Vì P là giao điểm của hai đường trung tuyến AO và CI của tam giác AFC nên P là trọng tâm của tam giác AFC .

Ta có $|\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PF}| = |\overrightarrow{PO}| = 2PO = 2 \cdot \frac{1}{3}AO = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}\text{cm}$.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC và đường thẳng d . Tìm điểm M trên đường thẳng d sao cho vector $\vec{a} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ có độ dài nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải



Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC .

Ta có $\vec{a} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MJ}$
 $= 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}) = 2 \cdot 2 \cdot \overrightarrow{MK} = 4\overrightarrow{MK}$

Suy ra $|\vec{a}| = |4\overrightarrow{MK}| = 4MK$

Do đó độ dài vector $\vec{a}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MK nhỏ nhất. Khi đó M là hình chiếu vuông góc của K lên đường thẳng d .

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a\sqrt{2}$. Khi đó, $S = |2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}|$ có giá trị là

- A. $S = 2a$ B. $S = a$ C. $S = a\sqrt{3}$ D. $S = a\sqrt{2}$

Câu 2: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có hai cạnh $AB = a, BC = 2a$. Khi đó $|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}|$ bằng

- A. $a\sqrt{17}$ B. $5a$ C. $3a$ D. $2\sqrt{2}a$

Câu 3: Cho tam giác OAB vuông cân tại O , cạnh $OA = a$. Khi đó $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$ bằng

- A. a B. $(1 + \sqrt{2})a$ C. $a\sqrt{5}$ D. $2a\sqrt{2}$

Câu 4: Cho tam giác OAB vuông cân tại O , cạnh $OA = a$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $|3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB}| = 5a$ B. $|2\overrightarrow{OA}| + |3\overrightarrow{OB}| = 5a$
 C. $|7\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}| = 5a$ D. $|11\overrightarrow{OA}| - |6\overrightarrow{OB}| = 5a$

Câu 5: Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = a$

B. $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

C. $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

D. $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = \frac{a\sqrt{10}}{2}$

Câu 6: Cho tam giác đều ABC cạnh a có G là trọng tâm. Khi đó giá trị $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}|$ là

A. $\frac{a}{3}$

B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{2a}{3}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 7: Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 2a$ và $BD = a$. Khi đó giá trị $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|$ là

A. $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = 3a$

B. $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = a\sqrt{3}$

C. $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = a\sqrt{5}$

D. $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = 5a$

Câu 8: Cho hình thang vuông $ABCD$ có hai đáy $AB = a, CD = 2a$, đường cao $AD = a$. Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$. Độ dài vector $\vec{u}$ bằng

A. $2a\sqrt{2}$

B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

C. $a\sqrt{2}$

D. $-2a\sqrt{2}$

Câu 9: Cho hình thang vuông $ABCD$ có 2 đáy là $AB = a$ và $CD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Khi đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MN}|$ bằng

A. $\frac{a}{2}$

B. $\frac{3a}{2}$

C. $2a$

D. $3a$

Câu 10: Cho tam giác ABC có H là chân đường cao hạ từ A sao cho $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác. Điểm M di động nằm trên BC sao cho $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC}$. Giá trị của x để độ dài của vector $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}$ đạt giá trị nhỏ nhất là

A. $x = \frac{4}{5}$

B. $x = \frac{5}{6}$

C. $x = \frac{6}{5}$

D. $x = \frac{5}{4}$

Dạng 4. Xác định một điểm thỏa mãn đẳng thức vector cho trước

Bài toán 1. Xác định một điểm

Phương pháp giải

Để xác định một điểm thỏa mãn đẳng thức vector cho trước ta thường sử dụng một trong ba phương pháp sau:

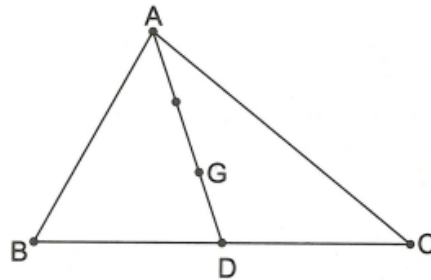
- **Dạng 1.** Đưa vector này bằng một số nhân với một vector đã biết.
Nếu biết điểm đầu của vector này thì điểm cuối của vector là xác định và duy nhất.
- **Dạng 2.** Xác định một điểm dựa vào đẳng thức vector giữa hai điểm cố định A, B .
Trước hết, theo tính chất hai vector cùng phương, điểm cần tìm phải nằm trên đường thẳng AB .
Ta cần xác định điểm cần tìm thuộc đoạn thẳng AB hay nằm ngoài đoạn AB , xác định tỉ lệ, vẽ hình minh họa và mô tả vị trí tương đối của điểm cần tìm so với hai điểm A, B .
- **Dạng 3.** Xác định một điểm dựa vào đẳng thức vector giữa ba hay bốn điểm cố định.

Trước hết, biến đổi đẳng thức vector, đưa điểm cần tìm chỉ phụ thuộc theo hai điểm cố định (đưa về dạng 2).

Tiến hành xác định vị trí điểm cần tìm theo phương pháp ở dạng 2.

Ví dụ: Cho tam giác ABC có D là trung điểm BC . Xác định vị trí của G biết $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GD}$.

Hướng dẫn giải



$$\text{Ta có } \overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GD} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = 2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD})$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

Suy ra G thuộc đoạn thẳng AD sao cho $AG = \frac{2}{3}AD$.

Mà AD là đường trung tuyến của tam giác ABC nên G là trọng tâm tam giác ABC .

 **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1. Cho hai điểm phân biệt A và B .

- Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
- Tìm điểm N sao cho $3\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = \vec{0}$.
- Tìm điểm H sao cho $3\overrightarrow{HA} - 2\overrightarrow{HB} = \vec{0}$.
- Tìm điểm K sao cho $2\overrightarrow{KA} - 3\overrightarrow{KB} = \vec{0}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{a) } \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{MA}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

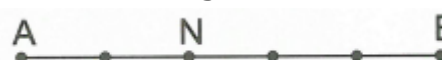
$\Rightarrow M$ thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AM = \frac{2}{3}AB$



$$\text{b) } 3\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{NA} + 2(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB} = -5\overrightarrow{NA}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$$

$\Rightarrow N$ thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AN = \frac{2}{5}AB$



$$c) \quad 3\overrightarrow{HA} - 2\overrightarrow{HB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{HA} - 2(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{AB}$$

$\Rightarrow H$ thuộc đường thẳng AB (A nằm giữa H và B) sao cho $HA = 2AB$



$$d) \quad 2\overrightarrow{KA} - 3\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{KA} - 3(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{KA} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{AB}$$

$\Rightarrow K$ thuộc đường thẳng AB (B nằm giữa A và K) sao cho $AK = 3AB$



Lưu ý:

Từ ví dụ 1 ta rút ra rằng: với h, k là các số thực lớn hơn 0, hai điểm A, B cố định thì ta có:

- $h\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ thì điểm M thuộc đoạn AB và thỏa mãn $hMA = kMB$.
- $h\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ thì điểm M nằm ngoài đoạn AB và thỏa mãn $hMA = kMB$.
- Nếu $h < k$ thì B nằm giữa A và M .
- Nếu $h > k$ thì A nằm giữa B và M .

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC . Xác định các điểm thỏa mãn đẳng thức vector sau

a) Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

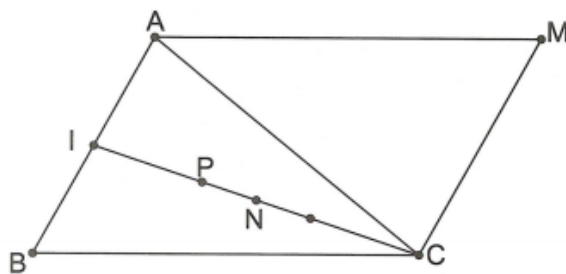
b) Điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}$

c) Điểm P thỏa mãn $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{CB}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC}$

$\Rightarrow M$ là điểm sao cho $ABCM$ là hình bình hành.



b) Gọi I là trung điểm của AB . Ta có

$$(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB}) + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{NI} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{NC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{NI} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$$

$\Rightarrow N$ là trung điểm của IC .

c) $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{PB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{CP} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$

$\Rightarrow P$ thuộc đoạn CI sao cho $2PI = PC$

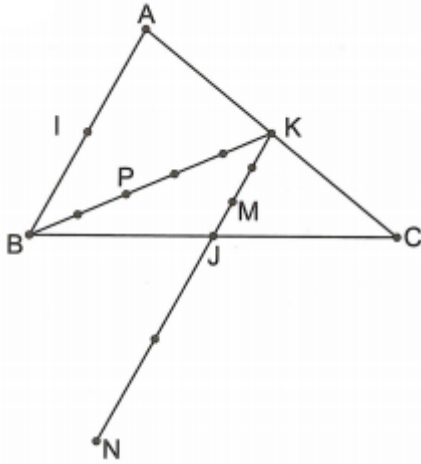
Ví dụ 3. Cho tam giác ABC

- a) Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$
b) Xác định điểm N sao cho $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$
c) Xác định điểm P sao cho $\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$

Hướng dẫn giải

Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA .

- a) $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) + 2(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MK} + 2.2\overrightarrow{MJ} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MK} + 2\overrightarrow{MJ} = \vec{0}$
 $\Rightarrow M$ thuộc đoạn thẳng JK sao cho $MK = 2MJ$.

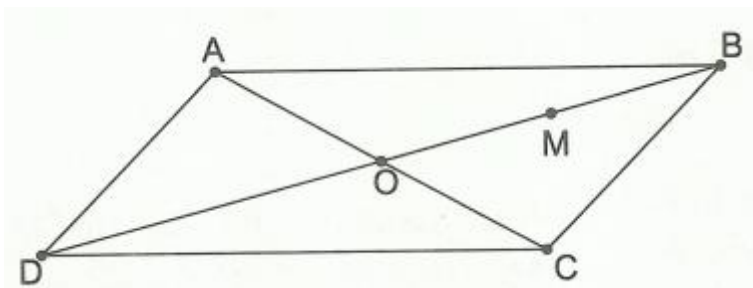


- b) $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC}) + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{NK} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{KN} \Leftrightarrow \overrightarrow{KN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{KN} = \frac{3}{2}.2\overrightarrow{KJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{KN} = 3\overrightarrow{KJ}$
 $\Rightarrow N$ thuộc đường thẳng KJ (J nằm giữa K và N) sao cho $KN = 3KJ$.
c) $\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}) + 3\overrightarrow{PB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{PK} + 3\overrightarrow{PB} = \vec{0}$
 $\Rightarrow P$ thuộc đoạn thẳng BK sao cho $2PK = 3PB$

Ví dụ 4. Cho hình bình hành $ABCD$, O là giao điểm hai đường chéo AC và BD .

- a) Tìm điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MO}$
b) Tìm điểm N thỏa mãn $3\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$
c) Tìm điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{ID}$

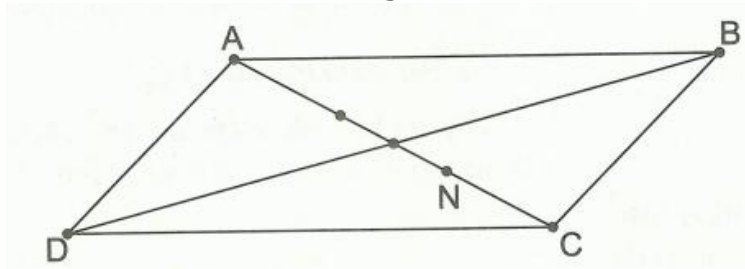
Hướng dẫn giải



a) Ta có $\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 3\vec{MO} \Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} + \vec{MB} = 3\vec{MO}$
 $\Leftrightarrow (\vec{MO} + \vec{OA}) + (\vec{MO} + \vec{OB}) + (\vec{MO} + \vec{OC}) + (\vec{MO} + \vec{OD}) + \vec{MB} - 3\vec{MO} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow (\vec{OA} + \vec{OC}) + (\vec{OB} + \vec{OD}) + (\vec{MO} + \vec{MB}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{0} + \vec{0} + (\vec{MO} + \vec{MB}) = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow \vec{MO} + \vec{MB} = \vec{0}$
 $\Rightarrow M$ là trung điểm của đoạn thẳng OB .

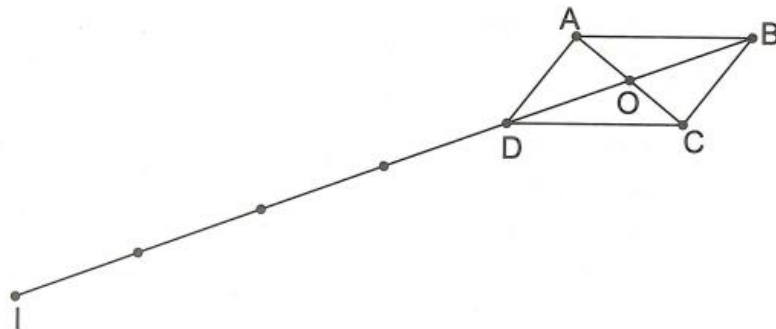
b) Ta có $3\vec{AN} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} \Leftrightarrow 3\vec{AN} = (\vec{AB} + \vec{AD}) + \vec{AC}$
 $\Leftrightarrow 3\vec{AN} = \vec{AC} + \vec{AC} \Leftrightarrow \vec{AN} = \frac{2}{3}\vec{AC}$

Suy ra N thuộc đoạn thẳng AC sao cho $AN = \frac{2}{3}AC$.



c) Ta có $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = 4\vec{ID} \Leftrightarrow (\vec{IO} + \vec{OA}) + (\vec{IO} + \vec{OB}) + (\vec{IO} + \vec{OC}) - 4(\vec{IO} + \vec{OD}) = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow (\vec{OA} + \vec{OC}) + \vec{OB} - \vec{IO} - 4\vec{OD} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{0} + \vec{OB} + \vec{OI} - 4\vec{BO} = \vec{0} \Leftrightarrow 5\vec{OB} + \vec{OI} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow \vec{OI} = 5\vec{BO}$

Suy ra I thuộc đường thẳng BD sao cho O nằm giữa B, I và $OI = 5BO$.

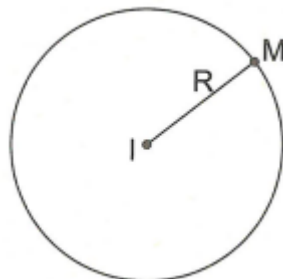


Bài toán 2. Tìm quỹ tích của một điểm

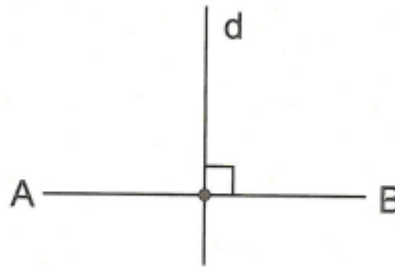
Phương pháp giải

Để tìm tập hợp điểm M thỏa mãn một đẳng thức vector ta biến đổi đẳng thức vector đó để đưa về các tập hợp điểm cơ bản đã biết. Chẳng hạn

- Tập hợp các điểm M cách điểm I một khoảng không đổi bằng R : $IM = R$ là đường tròn tâm I bán kính R .



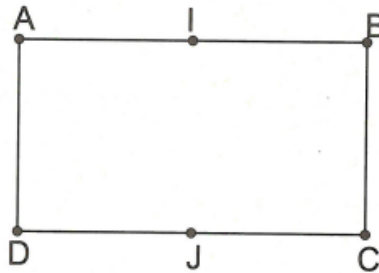
- Tập hợp các điểm M cách đều hai điểm $A, B : MA = MB$ là đường trung trực của đoạn thẳng AB .



- Để giải bài toán quỹ tích ta thường thực hiện các phép toán cộng, trừ, nhân vector với một số rồi mới kết luận.

Ví dụ: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$.

Hướng dẫn giải



Gọi I, J lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AB và CD .

Theo tính chất trung điểm của đoạn thẳng ta có $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| \Leftrightarrow |2\overrightarrow{MI}| = |2\overrightarrow{MJ}|$

$$\Leftrightarrow 2MI = 2MJ \Leftrightarrow MI = MJ$$

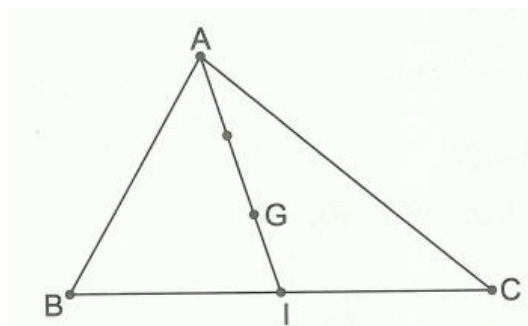
Vậy tập hợp các điểm M thỏa yêu cầu bài toán là đường trung trực của đoạn thẳng IJ .

 **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC .

- Tìm tập hợp các điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$
- Tìm tập hợp điểm N sao cho $|2\overrightarrow{NA}| = |\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}|$

Hướng dẫn giải



a) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC .

$$\text{Ta có } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |3\overrightarrow{MG}| = |\overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow 3MG = CB \Leftrightarrow MG = \frac{BC}{3}$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm G bán kính $R = \frac{BC}{3}$.

b) Gọi I là trung điểm BC .

$$\text{Ta có } |2\overrightarrow{NA}| = |\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}| \Leftrightarrow |2\overrightarrow{NA}| = |2\overrightarrow{NI}| \Leftrightarrow 2NA = 2NI \Leftrightarrow NA = NI$$

Vậy tập hợp các điểm N là đường trung trực của AI .

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC .

a) Xác định điểm M sao cho $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

b) Tìm tập hợp các điểm N sao cho $|3\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}| = |\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NB}|$

c) Tìm tập hợp điểm D sao cho $|\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}| = 4|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}|$

d) Tìm tập hợp các điểm E sao cho $2|\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC}| = 3|\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC}|$

e) Tìm tập hợp các điểm F sao cho $|\overrightarrow{FA} + 3\overrightarrow{FB} - 2\overrightarrow{FC}| = |2\overrightarrow{FA} - \overrightarrow{FB} - \overrightarrow{FC}|$

Hướng dẫn giải

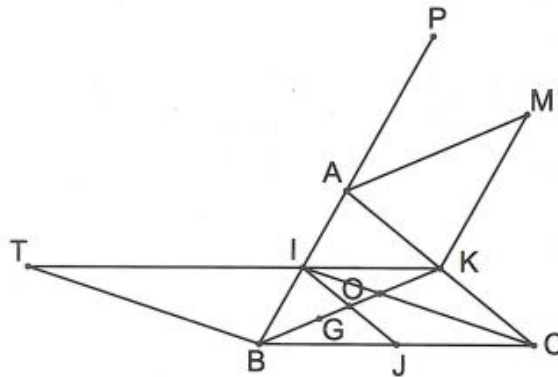
Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA .

a) Ta có $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow 2(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{MK} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MK}$$

$\Rightarrow ABKM$ là hình bình hành

Vậy M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABKM$.



b) Với $ABKM$ là hình bình hành, ta suy ra $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{KM}$.

$$|3\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}| = |\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NB}| \Leftrightarrow |2(\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NB}) + (\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC})| = |\overrightarrow{BA}|$$

$$\Leftrightarrow |2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{NK}| = BA \Leftrightarrow |2\overrightarrow{KM} + 2\overrightarrow{NK}| = BA$$

$$\Leftrightarrow |2(\overrightarrow{NK} + \overrightarrow{KM})| = BA \Leftrightarrow |2\overrightarrow{NM}| = BA \Leftrightarrow 2NM = BA \Leftrightarrow NM = \frac{BA}{2}$$

Vậy tập hợp các điểm N là đường tròn tâm M , bán kính $R = \frac{BA}{2}$.

c) Gọi O là trung điểm của IJ . Ta có

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}| &= 4|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}| \Leftrightarrow |(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})| = 4|\overrightarrow{AB}| \\ \Leftrightarrow |2\overrightarrow{DI} + 2\overrightarrow{DJ}| &= 4AB \Leftrightarrow |2(\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{DJ})| = 4AB \\ \Leftrightarrow |2.2.\overrightarrow{DO}| &= 4AB \Leftrightarrow 4DO = 4AB \Leftrightarrow DO = AB \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm D là đường tròn tâm O , bán kính $R = AB$.

d) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Theo tính chất của trọng tâm ta có

$$2|\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC}| = 3|\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC}| \Leftrightarrow 2|3\overrightarrow{EG}| = 3|2\overrightarrow{EJ}| \Leftrightarrow 6EG = 6EJ \Leftrightarrow EG = EJ$$

Suy ra E cách đều hai điểm G, J .

Vậy tập hợp các điểm E là đường trung trực của đoạn thẳng GJ .

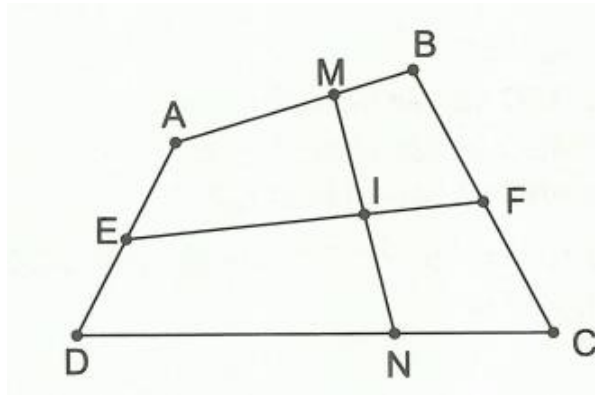
e) Gọi P là điểm đối xứng với B qua A . Vẽ hình bình hành $BCIT \Rightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{IT}$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{FA} + 3\overrightarrow{FB} - 2\overrightarrow{FC}| &= |2\overrightarrow{FA} - \overrightarrow{FB} - \overrightarrow{FC}| \\ \Leftrightarrow |(\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB}) + 2(\overrightarrow{FB} - \overrightarrow{FC})| &= |(\overrightarrow{FA} - \overrightarrow{FB}) + (\overrightarrow{FA} - \overrightarrow{FC})| \\ \Leftrightarrow |2\overrightarrow{FI} + 2\overrightarrow{CB}| &= |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}| \Leftrightarrow |2\overrightarrow{FI} + 2\overrightarrow{IT}| = |\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CA}| \\ \Leftrightarrow |2\overrightarrow{FT}| &= |\overrightarrow{CP}| \Leftrightarrow 2FT = CP \Leftrightarrow FT = \frac{CP}{2} \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm F là đường tròn tâm T , bán kính $R = \frac{CP}{2}$.

Ví dụ 3. Cho tứ giác $ABCD$. Với số k tùy ý ta lấy các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DN} = k.\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn MN với mọi giá trị của k .

Hướng dẫn giải



Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD và BC .

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} \\ \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} \end{cases}$$

Cộng vế theo vế ta được

$$2\overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ED}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CF}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

Tương tự vì E và I lần lượt là trung điểm của AD và MN nên

$$\overrightarrow{EI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DN}) = \frac{1}{2}(k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{DC}) = \frac{k}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) = \frac{k}{2}.2\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{EF}$$

Suy ra $\overrightarrow{EI}, \overrightarrow{EF}$ cùng phương hay I thuộc đường thẳng EF .

Vậy khi k thay đổi thì tập hợp trung điểm I của đoạn MN là đường thẳng EF .

Bài tập tự luyện dạng 4

Câu 1: Cho tam giác ABC . Nếu điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ thì ta có

- A. $ABMC$ là hình bình hành. B. $ABCM$ là hình bình hành.
C. M là trung điểm BC . D. M là trung điểm AB .

Câu 2: Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$. Tìm vị trí điểm M .

- A. M là trung điểm của AC . B. M là trung điểm của AB .
C. M là trung điểm của BC . D. M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.

Câu 3: Cho tam giác ABC có D là trung điểm của BC . Xác định vị trí của điểm G biết $\overrightarrow{GA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

- A. G nằm trên đoạn AD và $GD = 2GA$. B. G nằm trên đoạn AD và $AG = \frac{1}{3}AD$.
C. G nằm trên đoạn AD và $AG = \frac{2}{3}AD$. D. G nằm trên đoạn AD và $GA = \frac{1}{3}GD$.

Câu 4: Cho tam giác ABC , D là trung điểm cạnh AC . Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. I là trực tâm $\triangle BCD$ B. I là trọng tâm $\triangle ABC$
C. I là trọng tâm $\triangle CDB$ D. Cả A, B, C đều sai

Câu 5: Cho tam giác ABC , tập hợp các điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 6$ là

- A. một đường thẳng đi qua trọng tâm của tam giác ABC .
B. đường tròn có tâm là trọng tâm của tam giác ABC và bán kính bằng 18.
C. đường tròn có tâm là trọng tâm của tam giác ABC và bán kính bằng 2.
D. đường tròn có tâm là trọng tâm của tam giác ABC và bán kính bằng 6.

Câu 6: Cho M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC . Giả sử I là điểm thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Khi đó vị trí điểm I là

- A. tâm của hình bình hành $BMPN$.
B. đỉnh thứ tư của hình bình hành $AMPI$.
C. trực tâm của tam giác ABC .
D. trọng tâm của tam giác MNP .

Câu 7: Cho hai điểm A, B phân biệt và cố định, với I là trung điểm của AB . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}|$ là

- A. đường trung trực của đoạn thẳng AB .

B. đường tròn đường kính AB .

C. đường trung trực đoạn thẳng IA .

D. đường tròn tâm A , bán kính AB .

Câu 8: Cho tam giác đều ABC cạnh a . Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\left| 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} \right| = \left| \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} \right|$ là đường tròn cố định có bán kính R . Tính bán kính R theo a .

A. $R = \frac{a}{3}$

B. $R = \frac{a}{6}$

C. $R = \frac{a}{2}$

D. $R = \frac{a}{9}$

Câu 9: Cho hình chữ nhật $ABCD$ và số thực $k > 0$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right| = k$ là

A. một đoạn thẳng.

B. một đường thẳng.

C. một đường tròn.

D. một điểm.

Câu 10: Cho tam giác ABC đều cạnh $2a$, (d) là đường thẳng qua A và song song BC . Khi M di động trên (d) thì giá trị nhỏ nhất của $\left| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} \right|$ là

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

B. $a\sqrt{3}$

C. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

D. $2a\sqrt{3}$

ĐÁP ÁN

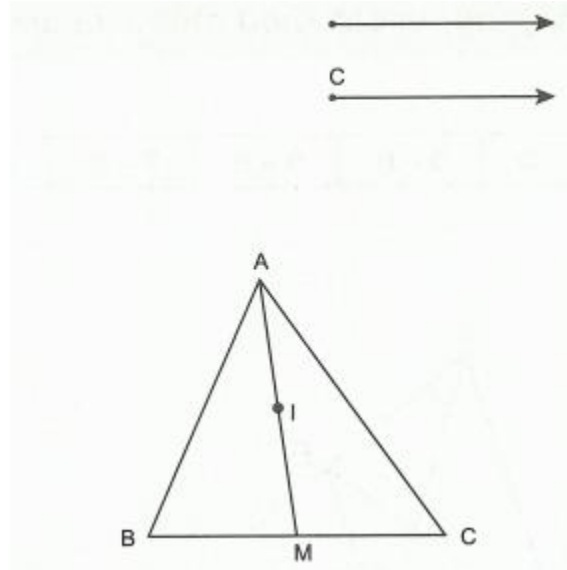
Dạng 1. Chứng minh đẳng thức vector

Đáp án trắc nghiệm

1 - B	2 - C	3 - B	4 - B	5 - D	6 - C	7 - A	8 - B	9 - C	10 - C
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	--------

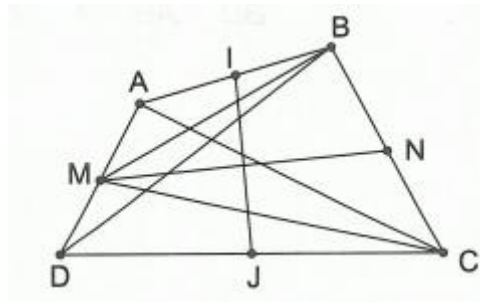
Hướng dẫn giải

Câu 7.



$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} &= 2\vec{IA} + \vec{IM} + \vec{MB} + \vec{IM} + \vec{MC} \\ &= (2\vec{IA} + 2\vec{IM}) + (\vec{MB} + \vec{MC}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \end{aligned}$$

Câu 8.



Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Khi đó

$$\vec{AC} + \vec{BD} = (\vec{AI} + \vec{IJ} + \vec{JC}) + (\vec{BI} + \vec{IJ} + \vec{JD}) = (\vec{AI} + \vec{BI}) + 2\vec{IJ} + (\vec{JC} + \vec{JD}) = 2\vec{IJ} \neq 2\vec{MN}$$

Câu 9.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \vec{AO} + \vec{BO} + \vec{CO} &= \vec{AG} + \vec{GO} + \vec{BG} + \vec{GO} + \vec{CG} + \vec{GO} \\ &= (\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG}) + 3\vec{GO} \\ &= \vec{0} + 3\vec{GO} = 3\vec{GO} \end{aligned}$$

Câu 10.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} &= \vec{AG} + \vec{GG'} + \vec{G'A'} + \vec{BG} + \vec{GG'} + \vec{G'B'} + \vec{CG} + \vec{GG'} + \vec{G'C'} \\ &= (\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG}) + (\vec{G'A'} + \vec{G'B'} + \vec{G'C'}) + 3\vec{GG'} \end{aligned}$$

$$= \vec{0} + \vec{0} + 3\vec{GG'} = 3\vec{GG'}$$

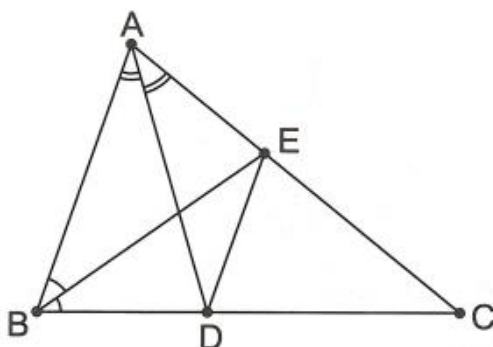
Dạng 2. Phân tích (biểu diễn) một vector theo nhiều vector cho trước

🚩 Đáp án trắc nghiệm

1 - C	2 - C	3 - B	4 - D	5 - B	6 - B	7 - B	8 - A	9 - B	10 - C
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	--------

🚩 Hướng dẫn giải

Câu 8.



AD là phân giác trong của tam giác ABC nên $\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{4} \Rightarrow \frac{CD}{CD+BD} = \frac{6}{6+4} = \frac{3}{5}$.

$$\Rightarrow \frac{CD}{CB} = \frac{3}{5} \Rightarrow \vec{CD} = \frac{3}{5}\vec{CB}$$

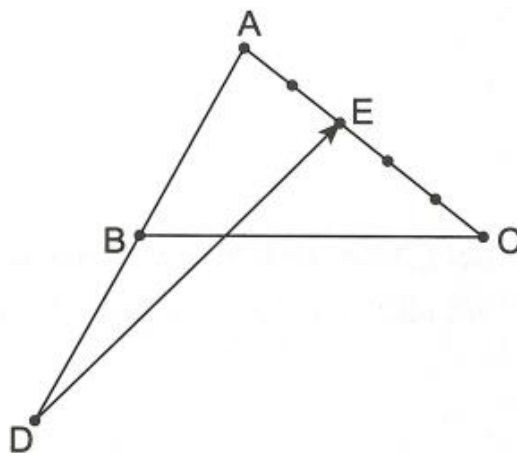
$$\text{Tương tự } \frac{CE}{CA} = \frac{5}{9} \Rightarrow \vec{CE} = \frac{5}{9}\vec{CA}$$

$$\text{Vậy } \vec{DE} = \vec{CE} - \vec{CD} = \frac{5}{9}\vec{CA} - \frac{3}{5}\vec{CB}$$

Câu 9.

$$\text{Ta có } \vec{DE} = \vec{DA} + \vec{AE} = -2\vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{AC}$$

$$\Rightarrow m = -2, n = \frac{2}{5} \Rightarrow m.n = -\frac{4}{5}$$



Dạng 3. Tính độ dài của tổng, hiệu các vector và tích của vector với một số

🚩 Đáp án trắc nghiệm

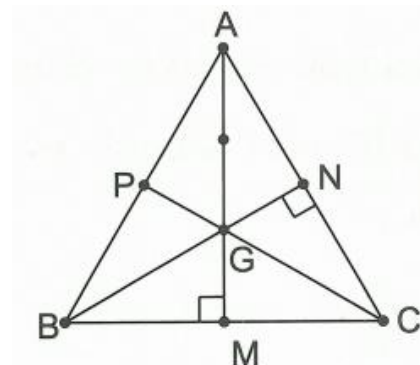
1 - A	2 - A	3 - C	4 - C	5 - D	6 - B	7 - C	8 - C	9 - A	10 - B
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	--------

🚩 Hướng dẫn giải

Câu 6.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB của tam giác ABC .

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}| &= |2\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{PG}| = |2(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{PG})| = |2\overrightarrow{AG}| \\
&= 2AG = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot AM = \frac{4}{3} \sqrt{AB^2 - BM^2} \\
&= \frac{4}{3} \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$



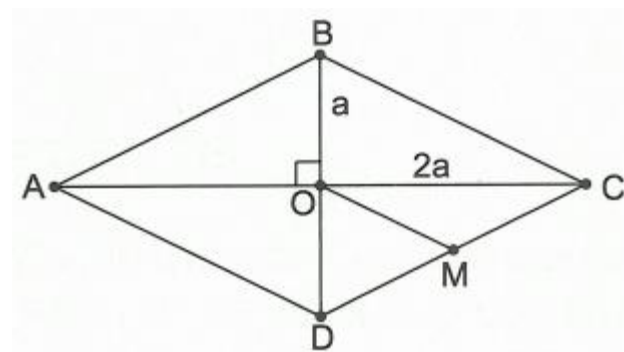
Câu 7.

Gọi M là trung điểm của CD và O là tâm của hình thoi $ABCD$.

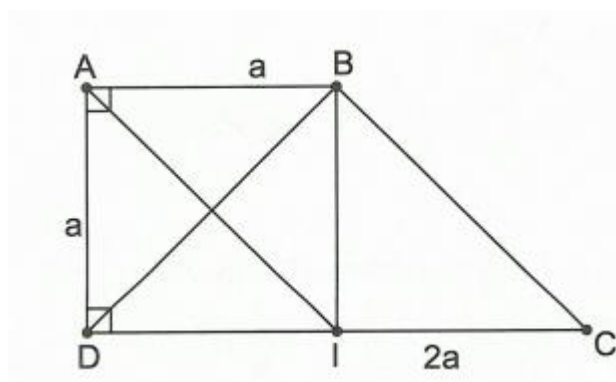
Ta có OM là đường trung tuyến của tam giác vuông OCD

$$\Rightarrow OM = \frac{CD}{2} = \frac{\sqrt{OC^2 + OD^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{4}$$

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| &= |2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD}| = |2(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})| = |2 \cdot 2\overrightarrow{OM}| \\
&= |4\overrightarrow{OM}| = 4OM = 4 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{4} = a\sqrt{5}
\end{aligned}$$



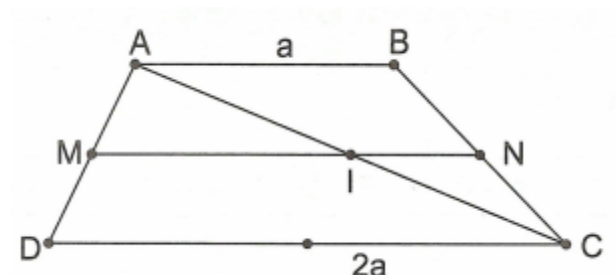
Câu 8.



Gọi I là trung điểm $CD \Rightarrow ABID$ là hình vuông.

$$\begin{aligned}
|\vec{u}| &= |\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}| \\
&= |\overrightarrow{DB}| = DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}
\end{aligned}$$

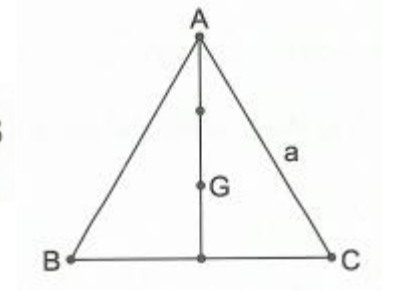
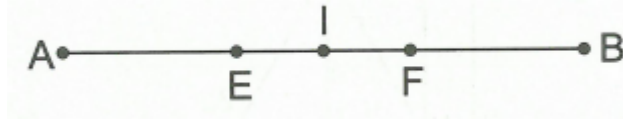
Câu 9.



Gọi I là trung điểm AC . Khi đó MI là đường trung bình của tam giác $ACD \Rightarrow MI = \frac{CD}{2} = a$

Suy ra I là tâm của hình bình hành $BMPN$.

Câu 7.



Chọn điểm E thuộc đoạn AB sao cho $EB = 2EA \Rightarrow 2\vec{EA} + \vec{EB} = \vec{0}$

Chọn điểm F thuộc đoạn AB sao cho $FA = 2FB \Rightarrow 2\vec{FB} + \vec{FA} = \vec{0}$

Ta có $|2\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} + 2\vec{MB}| \Leftrightarrow |2\vec{ME} + 2\vec{EA} + \vec{ME} + \vec{EB}| = |\vec{MF} + \vec{FA} + 2\vec{MF} + 2\vec{FB}|$

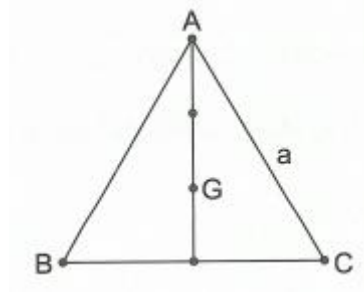
$\Leftrightarrow |3\vec{ME} + (2\vec{EA} + \vec{EB})| = |3\vec{MF} + (2\vec{FB} + \vec{FA})| \Leftrightarrow |3\vec{ME}| = |3\vec{MF}| \Leftrightarrow ME = MF (*)$

Vì E, F là hai điểm cố định nên từ đẳng thức $(*)$ suy ra tập hợp các điểm M là trung trực của đoạn thẳng EF .

Gọi I là trung điểm của AB suy ra I cũng là trung điểm của EF .

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn $|2\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} + 2\vec{MB}|$ là đường trung trực của đoạn thẳng AB .

Câu 8.



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Với điểm I bất kỳ, ta có

$$\begin{aligned} 2\vec{MA} + 3\vec{MB} + 4\vec{MC} &= 2(\vec{MI} + \vec{IA}) + 3(\vec{MI} + \vec{IB}) + 4(\vec{MI} + \vec{IC}) \\ &= 9\vec{MI} + (2\vec{IA} + 3\vec{IB} + 4\vec{IC}) \end{aligned}$$

Chọn điểm I sao cho $2\vec{IA} + 3\vec{IB} + 4\vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3(\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC}) + (\vec{IC} - \vec{IA}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 3.3\vec{IG} + \vec{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow 9\vec{IG} = \vec{CA} (*)$$

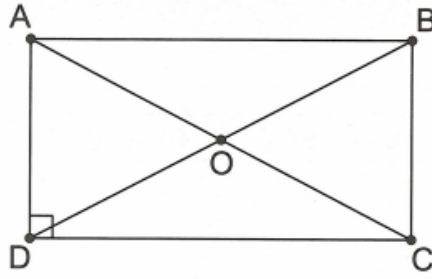
$$\text{Do đó } |2\vec{MA} + 3\vec{MB} + 4\vec{MC}| = |\vec{MB} - \vec{MA}|$$

$$\Leftrightarrow |9\vec{MI} + (2\vec{IA} + 3\vec{IB} + 4\vec{IC})| = |\vec{AB}|$$

$$\Leftrightarrow |9\vec{MI}| = AB \Leftrightarrow 9MI = AB \Leftrightarrow MI = \frac{AB}{9} \Leftrightarrow MI = \frac{a}{9}$$

Vì I là điểm cố định thỏa mãn $(*)$ nên tập hợp các điểm M cần tìm là đường tròn tâm I , bán kính $R = \frac{a}{9}$.

Câu 9.



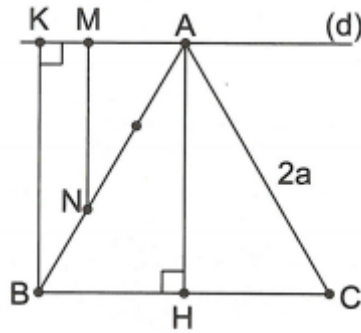
Gọi O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$. Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

$$\text{Do đó } \left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right| = k \Leftrightarrow \left| (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}) \right| = k$$

$$\Leftrightarrow \left| 4\overrightarrow{MO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) \right| = k \Leftrightarrow \left| 4\overrightarrow{MO} \right| = k \Leftrightarrow 4MO = k \Leftrightarrow MO = \frac{k}{4}$$

Vì O là điểm cố định nên tập hợp các điểm M thỏa yêu cầu bài toán là đường tròn tâm O , bán kính $R = \frac{k}{4}$

Câu 10.



Chọn điểm N thuộc đoạn AB sao cho $NA = 2NB \Rightarrow 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NA} = \vec{0}$

$$\text{Ta có } \left| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} \right| = \left| \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA} + 2(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}) \right| = \left| 3\overrightarrow{MN} + (2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NA}) \right| = \left| 3\overrightarrow{MN} \right| = 3MN$$

Do đó $\left| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} \right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MN$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của N trên đường thẳng (d) .

Gọi H là trung điểm BC , K là hình chiếu vuông góc của điểm B trên đường thẳng (d) .

$$\text{Theo định lý Talet ta có } \frac{MN}{BK} = \frac{AN}{AB} \Leftrightarrow \frac{MN}{AH} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow MN = \frac{2}{3}AH \Leftrightarrow MN = \frac{2}{3}\sqrt{AB^2 - BH^2}$$

$$\Leftrightarrow MN = \frac{2}{3}\sqrt{(2a)^2 - a^2} \Leftrightarrow MN = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Vậy $\left| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $3MN$ và bằng $2a\sqrt{3}$.