



GIẢI LỚP
TÍCH 12

Chương 1: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

I KHÁI NIỆM CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU

1 *Định nghĩa*

2 *Chú ý*

II ĐIỀU KIỆN ĐỦ ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ

III QUY TẮC TÌM CỰC TRỊ

I KHÁI NIỆM CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU

1 ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (có thể a là $-\infty$, b là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

a) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ **đạt cực đại tại x_0** .

b) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ **đạt cực tiểu tại x_0** .

$f'(x)$ đổi dấu từ **dương sang âm** khi x đi qua $x_0 \Rightarrow$ hàm số đạt **cực đại** tại $x = x_0$.

x	a	x_0	b
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

$f'(x)$ đổi dấu từ **âm sang dương** khi x đi qua $x_0 \Rightarrow$ hàm số đạt **cực tiểu** tại $x = x_0$.

x	a	x_0	b
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

I KHÁI NIỆM CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU

! CHÚ Ý

CHÚ Ý

1. Nếu hàm số $f(x)$ đạt **cực đại (cực tiểu)** tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực đại (điểm cực tiểu)** của hàm số; $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại (giá trị cực tiểu)** của hàm số; điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại (điểm cực tiểu)** của đồ thị hàm số.

2. Các **điểm cực đại** và **điểm cực tiểu** được gọi chung là **điểm cực trị**. **Giá trị cực đại (giá trị cực tiểu)** còn gọi là **cực đại (cực tiểu)** và được gọi chung là **cực trị** của hàm số.

3. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và đạt cực đại hoặc cực tiểu tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

II ĐIỀU KIỆN ĐỦ ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ

Định lí 1.

Giả sử **hàm số** $y = f(x)$ **liên tục** trên khoảng $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ và **có đạo hàm** trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$, với $h > 0$.

a) Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một **điểm cực đại** của hàm số $f(x)$.

b) Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một **điểm cực tiểu** của hàm số $f(x)$.

III QUY TẮC TÌM CỰC TRỊ.

QUY TẮC I

- 1) Tìm tập xác định.
- 2) Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.
- 3) Lập bảng biến thiên.
- 4) Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

Ví dụ 1

Tìm cực trị của các hàm số sau:

1 $y = x^3 - 3x + 2$

2 $y = -x^4 + 2x^2 + 3$

3 $y = \frac{2x - 5}{x - 1}$

Ví dụ 1

Tìm cực trị của các hàm số sau: 1. $y = x^3 - 3x + 2$



Bài giải

Tập xác định là: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			4		0		$+\infty$

Diagram showing the function values at the boundaries and critical points:

- At $x = -\infty$, $y = -\infty$.
- At $x = -1$, $y = 4$ (local maximum).
- At $x = 1$, $y = 0$ (local minimum).
- At $x = +\infty$, $y = +\infty$.

Kết luận: Hàm số đạt **cực đại** tại $x = -1$ và đạt **cực tiểu** tại $x = 1$.

Ví dụ 1

Tìm cực trị của các hàm số sau: 2. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$



Bài giải

Tập xác định là: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -4x^3 + 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	0	-
y	$-\infty$	4	3	4	$-\infty$

Kết luận: Hàm số đạt **cực đại** tại $x = \pm 1$ và đạt **cực tiểu** tại $x = 0$.

Ví dụ 1

Tìm cực trị của các hàm số sau: 3. $y = \frac{2x - 5}{x - 1}$

Bài giải

Tập xác định là: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có: $y' = \frac{3}{(x-1)^2} > 0, \forall x \neq 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$-\infty$	2

Kết luận: Hàm số **không** có cực trị.

Ví dụ 2

Câu 1.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y					

Diagram showing the function values at critical points:

- At $x = -1$, $y = 4$ (local maximum).
- At $x = 2$, $y = 2$ (local maximum).
- At $x = -5$, $y = -5$ (local minimum).

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A Hàm số có bốn điểm cực trị.

B Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

C Hàm số không có cực đại.

D Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -5$.



CÂU 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{x^2 - 4}{3x^2}, \forall x \neq 0$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

A

3.

B

5.

C

2.

D

1.



Bài giải

Tập xác định là: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2		0		2		$+\infty$
y'	+	0	-		-	0	+	
y	$-\infty$				$+\infty$			$+\infty$

Do đó hàm số có **2** điểm cực trị.



CÂU 3

Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A

$$m_0 \in (-1; 7).$$

B

$$m_0 \in (-15; -7).$$

C

$$m_0 \in (7; 10).$$

D

$$m_0 \in (-7; -1).$$



Bài giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + m = 0$ (1)

Hàm số có 2 điểm cực trị thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3.$$

Khi đó x_1, x_2 là 2 nghiệm của (1). Theo Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Theo bài ra } x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 13 \Leftrightarrow 4 - m = 13 \Leftrightarrow m = -9.$$

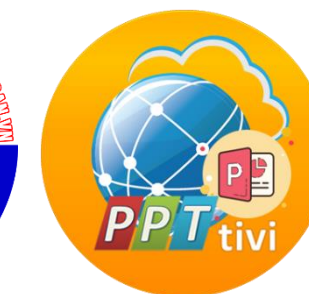
Vậy $m_0 = -9$.



TOÁN

THPT

PPT TIVI - DIỄN ĐÀN GIÁO VIÊN TOÁN



TIẾT 2

KIỂM TRA BÀI CŨ

- Nêu điều kiện đủ để hàm số có cực trị và nêu quy tắc 1 để tìm cực trị của hàm số
- Áp dụng:** Kiểm tra bài tập về nhà số 1a (trang 18).



Bài giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 6x^2 + 6x - 36, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			71		-54		$+\infty$

➡ Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$, giá trị cực đại của hàm số là $y_{CD} = y(-3) = 71$.
Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y_{CT} = y(2) = -54$.



CÂU 1

Giá trị cực đại của hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 5$ là:

A

−6.

B

−4.

C

−5.

D

−2.



Bài giải

Tập xác định là: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -4x^3 + 4x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

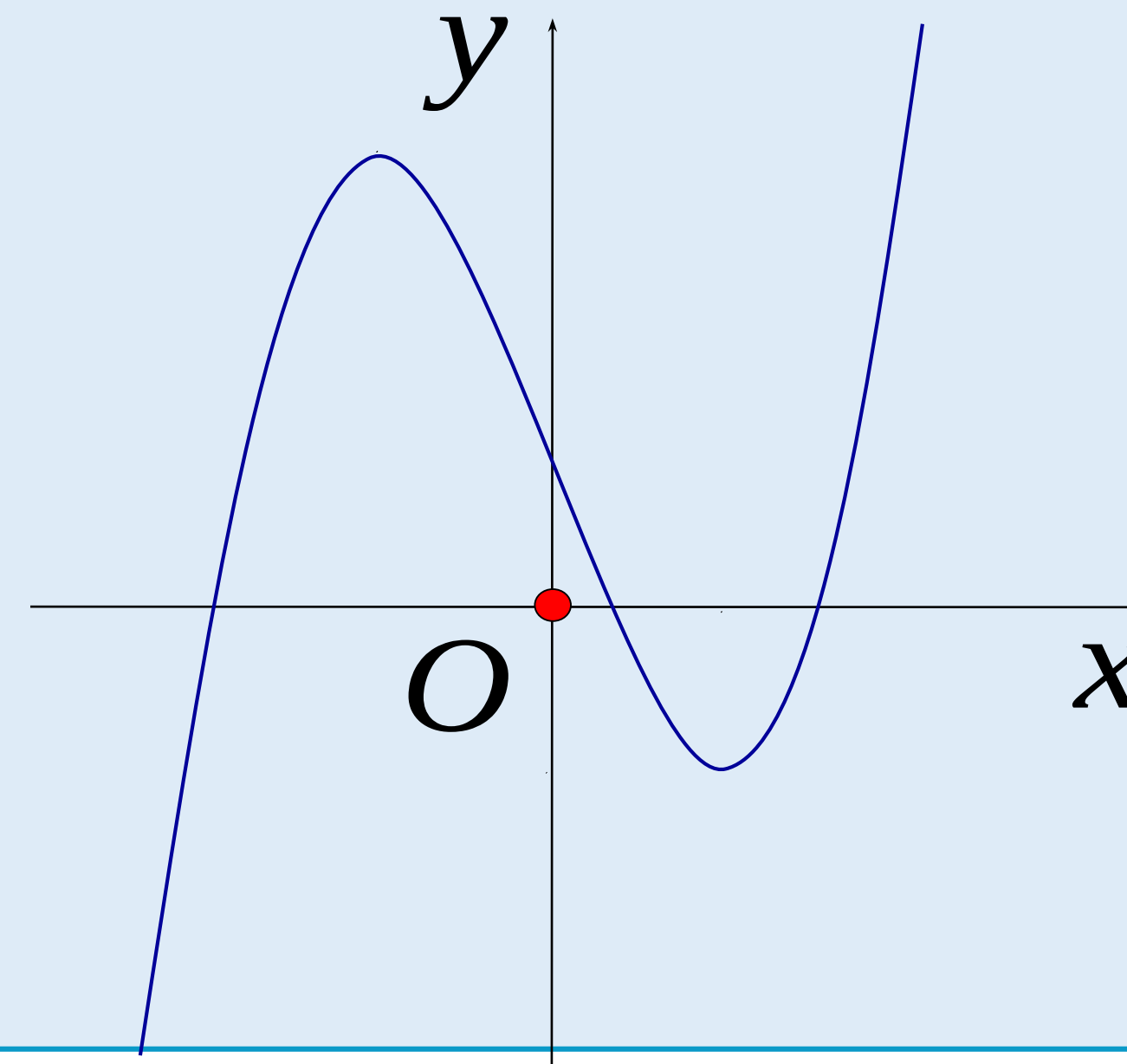
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	0	−	0	−
y	$-\infty$	-4	-5	-4	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị cực đại của hàm số là **−4**.



Câu 2.

Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:



A

2.

B

0.

C

3.

D

1.



Bài giải

Dựa vào đồ thị ta khẳng định hàm số đã cho có **2** điểm cực trị.

Câu 3.

Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

B Hàm số không có cực trị.

C Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

D Hàm số có hai điểm cực trị.

Bài giải Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ hàm số đạt **cực tiểu** tại $x = 0$.


Câu 4.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		1		2		-1		$+\infty$

Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A $M(0; 2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

B $f(-1)$ là một giá trị cực tiểu của hàm số.

C $x_0 = 0$ là điểm cực đại của hàm số.

D $x_0 = 1$ là điểm cực tiểu của hàm số.


Bài giải

Vì điểm **$M(0; 2)$** là điểm cực đại của đồ thị hàm số.



Câu 5.

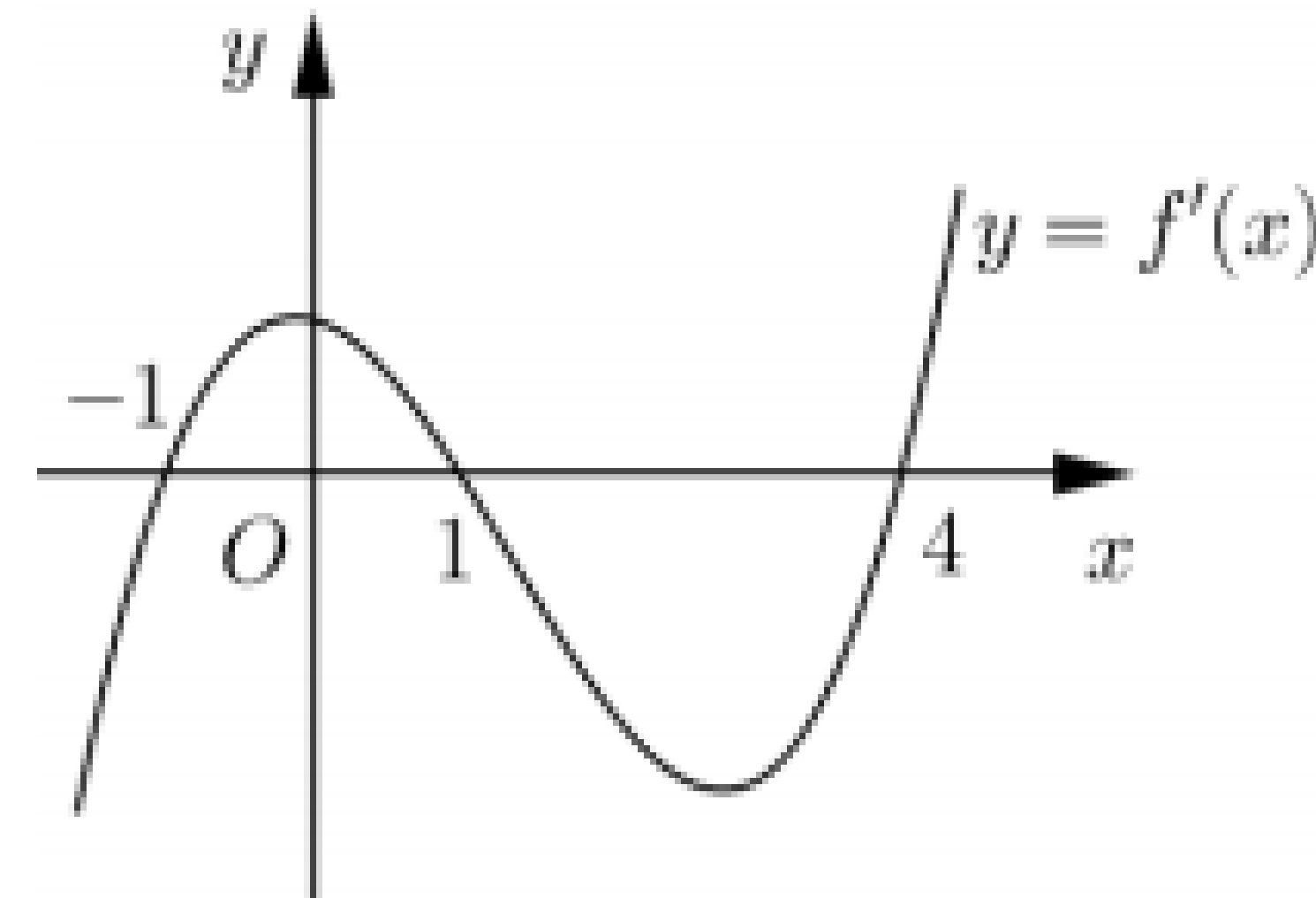
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A 4.

B 2.

C 1.

D 3.



Bài giải

Dựa vào đồ thị của ta $f'(x)$ thấy:

- ➔ $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua điểm $x = -1$.
- ➔ $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua điểm $x = 1$.
- ➔ $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua điểm $x = 4$.

Vậy hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.

III QUY TẮC TÌM CỰC TRỊ.

Định lý 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$, với $h > 0$. Khi đó:

- a) Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.
- b) Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số.

QUY TẮC II

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2: Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu $x_i (i = 1, 2, \dots)$ là các nghiệm của phương trình.

Bước 3: Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.

Bước 4: Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra điểm cực trị của hàm số.

III QUY TẮC TÌM CỰC TRỊ.



Ví dụ 1

Dùng quy tắc 2 tìm cực trị của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 10$



Bài giải

Tập xác định là: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 6x^2 + 6x - 36$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$.

Mặt khác: $y'' = 12x + 6 \Rightarrow \begin{cases} y''(-3) = -30 < 0 \\ y''(2) = 30 > 0 \end{cases}$

Vậy:

- Hàm số đạt **cực đại** tại $x = -3$, **giá trị cực đại** của hàm số là $y_{CĐ} = y(-3) = 71$.
- Hàm số đạt **cực tiểu** tại $x = 2$, **giá trị cực tiểu** của hàm số là $y_{CT} = y(2) = -54$.

III QUY TẮC TÌM CỰC TRỊ.



Ví dụ 2

Dùng quy tắc 2 tìm cực trị của hàm số $f(x) = x - \sin 2x + 2$.



Bài giải

Tập xác định là: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 1 - 2 \cos 2x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$f''(x) = 4 \sin 2x$$

Vì $f''(-\frac{\pi}{6} + k\pi) = 4\sin(-\frac{\pi}{3}) = -2\sqrt{3} < 0$ nên hàm số đạt **cực đại**

tại các điểm $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Và $f''(\frac{\pi}{6} + k\pi) = 4\sin(\frac{\pi}{3}) = 2\sqrt{3} > 0$ nên hàm số đạt **cực tiểu**

tại các điểm $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

III QUY TẮC TÌM CỰC TRỊ.

 **Ví dụ 3** Dùng quy tắc 2 tìm các điểm cực trị của hàm số:

$$f(x) = \sin^2 x + \sqrt{3} \cos x + 1, \text{ với } x \in (0; \pi).$$



Bài giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ nên hàm số xác định với $\forall x \in (0; \pi)$

Ta có: $f'(x) = 2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \sin x.$

$$f''(x) = 2 \cos 2x - \sqrt{3} \cos x$$

Với $x \in (0; \pi)$ thì phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}.$

$$\text{Vì } f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} < 0.$$

Vậy hàm số đạt **cực đại** tại điểm $x = \frac{\pi}{6}.$

III QUY TẮC TÌM CỰC TRỊ.

Ví dụ 4

Tìm giá trị thực của tham số m sao cho hàm số:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m^2 - 4)x \text{ đạt cực đại tại } x = 1?$$



Bài giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $f'(x) = x^2 + 2mx + (m^2 - 4)$; $f''(x) = 2x + 2m$.

$$\Rightarrow f'(1) = m^2 + 2m - 3; f''(1) = 2 + 2m$$

Do là hàm bậc ba nên hàm số đạt cực đại tại $x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 = 0 \\ 2m + 2 < 0 \end{cases}.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ (loại)} \\ m = -3 \text{ (thỏa mãn)} \Rightarrow m = -3. \\ m < -1 \end{cases}$$

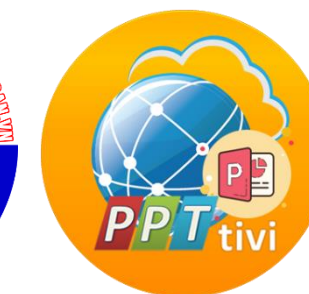
Vậy $m = -3$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$.



TOÁN

THPT

PPT TIVI - DIỄN ĐÀN GIÁO VIÊN TOÁN



TIẾT 3

KIỂM TRA BÀI CŨ

Nêu quy tắc **1**, quy tắc **2** để tìm cực trị của hàm số.

QUY TẮC 1

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2: Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 3: Lập bảng biến thiên.

Bước 4: Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

QUY TẮC 2

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2: Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu $x_i (i = 1, 2, \dots)$ là các nghiệm của phương trình.

Bước 3: Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.

Bước 4: Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra điểm cực trị của hàm số.

Bài tập 1

Câu c), e) của bài tập 1 trang 18 SGK: Áp dụng Quy tắc I, hãy tìm các điểm cực trị của hàm số:

c) $y = x + \frac{1}{x}$

e) $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$



Bài giải

c) Tập xác định là: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có $y' = \frac{x^2 - 1}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$	

Vậy:

- Hàm số đạt **cực đại** tại $x = -1$, **giá trị cực đại** của hàm số là $y_{CD} = y(-1) = -2$.
- Hàm số đạt **cực tiểu** tại $x = 1$, **giá trị cực tiểu** của hàm số là $y_{CT} = y(1) = 2$.

Bài tập 1

Câu c), e) của bài tập 1 trang 18 SGK: Áp dụng Quy tắc I, hãy tìm các điểm cực trị của hàm số:

c) $y = x + \frac{1}{x}$

e) $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$

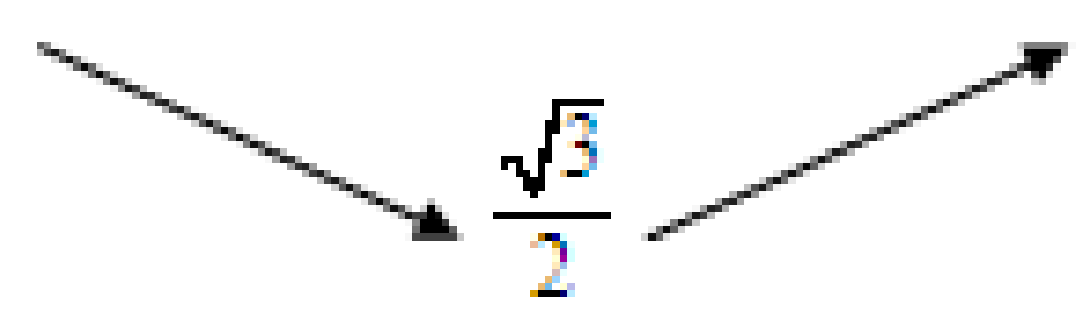


Bài giải

e) Tập xác định là: $D = \mathbb{R}$, vì $x^2 - x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	-	0	+
y			

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{1}{2}$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y_{CT} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bài tập 2

Câu b) của bài tập 2 trang 18 SGK: Áp dụng Quy tắc II, hãy tìm các điểm cực trị của hàm số: $y = \sin 2x - x$.



Bài giải

b) Tập xác định là: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 2 \cos 2x - 1$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$y'' = -4 \sin 2x.$$

Vì $y''\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = -2\sqrt{3} < 0$

$\Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, $y_{CĐ} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} - k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vì $y''\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = 2\sqrt{3} > 0$

$\Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, $y_{CT} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} - k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 3

Bài tập 4 trang 18 SGK:

Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m , hàm số $y = x^3 - mx^2 - 2x + 1$ luôn có **1 cực đại và 1 cực tiểu**.



Bài giải

Tập xác định là: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 2mx - 2$

Ta thấy $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2mx - 2 = 0$ có $\Delta' = m^2 + 6 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$

nên phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và qua hai nghiệm này y' đổi dấu 2 lần.

Vậy hàm số đã cho luôn có **1 cực đại và 1 cực tiểu** với **mọi m** .

Bài tập 4

Bài tập 6 trang 18 SGK:

Xác định giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt **cực đại** tại $x = 2$.



Bài giải

Tập xác định là: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có: $y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x + m)^2}$

Hàm số đã cho các đạt cực trị tại $x = 2$

$$\Rightarrow y'(2) = 0 \Leftrightarrow 2^2 + 2m \cdot 2 + m^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -3 \end{cases}$$

Thử lại:

Với $m = -1$ thì $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-1	$+\infty$	3	$+\infty$	

Từ BBT ta thấy hàm số đạt **cực tiểu** tại $x = 2$ nên $m = -1$ **không phải** là giá trị cần tìm.

Bài tập 4

Bài tập 6 trang 18 SGK:

Xác định giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt **cực đại** tại $x = 2$.

Bài giải

Tập xác định là: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có: $y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x + m)^2}$

Hàm số đã cho các đạt cực trị tại $x = 2$

$$\Rightarrow y'(2) = 0 \Leftrightarrow 2^2 + 2m \cdot 2 + m^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -3 \end{cases}$$

Với $m = -3$ thì $y' = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 3)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow$ 1	$\searrow$ $-\infty$	$+\infty$	$\searrow$ 5	$\nearrow$ $+\infty$

Từ BBT ta thấy hàm số đạt **cực đại** tại $x = 2$ nên $m = -3$ là giá trị cần tìm.

Vậy $m = -3$ là giá trị cần tìm.



CÂU 1

Hàm số $y = 2x^3 - x^2 + 5$ có điểm cực đại là:

A

$$x = \frac{1}{3}$$

B

$$x = 5.$$

C

$$x = 3.$$

D

$$x = 0.$$



Bài giải

Tập xác định là: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = 6x^2 - 2x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$y'' = 12x - 2.$$

$$\text{Vì } y''(0) = -2 < 0.$$

Vậy hàm số có điểm cực đại là $x = 0$.


Câu 2.

Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 3$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **đúng**?

A Hàm số có **1** cực đại và **2** cực tiểu.

B Hàm số có **2** cực đại và **1** cực tiểu.

C Hàm số kg có cực đại và có **1** cực tiểu.

D Hàm số có **1** cực đại và **1** cực tiểu.


Bài giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -4x^3 + 4x, y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	4	3	4	$-\infty$		

Vậy hàm số có **2** cực đại và **1** cực tiểu.



Câu 3.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	4	2	$+\infty$	

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.

B Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.

C Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

D Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

CÂU 4

Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Biết rằng đồ thị (C) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác, gọi là ΔABC . Tính **diện tích ΔABC** .

A

$$S = 2.$$

B

$$S = 1.$$

C

$$S = \frac{1}{2}.$$

D

$$S = 4.$$

Bài giải

Tập xác định là: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 4x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0; 1), B(-1; 0), C(1; 0)$

$$\overrightarrow{AB} = (-1; -1); \overrightarrow{AC} = (1; -1) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ AB = AC = \sqrt{2} \end{cases}$$

Suy ra ΔABC vuông cân tại A , do đó $S = \frac{1}{2}AB \cdot AC = 1$.

CÂU 5

Hàm đa thức $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x + 1)(2x - 1)^2(2x^2 + x - 1)$.
Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm **cực trị**?

A

0.

B

2.

C

3.

D

1.

Bài giải

Ta có: $f'(x) = (x + 1)(2x - 1)^2(2x^2 + x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$1/2$		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y							

Diagram showing the function's behavior: A line starts from the bottom left, goes up to a point labeled $f(-1)$, then goes down to a point labeled $f(1/2)$, and finally goes up towards the top right.

Vậy hàm số có 1 điểm cực trị.

CÂU 6

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

A

3.

B

-1.

C

1.

D

-3.

Bài giải

Tập xác định là: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + m$ có $\Delta' = 9 - 3m$.

Để hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thì phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt, nghĩa là: $\begin{cases} 3 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Khi đó theo định lý Vi-et, ta có: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2 \\ P = x_1 x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}$.

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = 6 \Leftrightarrow S^2 - 2P = 6 \Leftrightarrow 4 - 2 \cdot \frac{m}{3} - 6 = 0$
 $\Leftrightarrow m = -3$ (nhận).

CÂU 7

Tham số m thuộc khoảng nào dưới đây để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có cực đại, cực tiểu mà các điểm cực trị này tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1?

A

$m \in (0; 2).$

B

$m \in (1; 3).$

C

$m \in (2; 4).$

D

$m \in (-2; 0).$

Bài giải

Tập xác định là: $D = \mathbb{R}.$

Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}.$

Hàm số có ba điểm cực trị thì phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0.$

Khi đó: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \end{cases}$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị: $A(0; 2m + m^4)$; $B(-\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m)$,
 $C(\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m)$

Tam giác ABC cân tại A . Suy ra $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |y_A - y_b| \cdot BC = \frac{1}{2} |-m^2| \cdot 2\sqrt{m} = m^2\sqrt{m}.$

Mặt khác: $S_{\Delta ABC} = 1 \Leftrightarrow m^2\sqrt{m} = 1 \Leftrightarrow m = 1.$



TÓM TẮT BÀI HỌC

Định lý 1.

Giả sử **hàm số** $y = f(x)$ **liên tục** trên khoảng $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ và **có đạo hàm** trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$, với $h > 0$.

a) Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một **điểm cực đại** của hàm số $f(x)$.

b) Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một **điểm cực tiểu** của hàm số $f(x)$.

Định lý 2

Cho hàm số $y = f(x)$ **có đạo hàm cấp hai** trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$, với $h > 0$. Khi đó:

a) Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$ thì x_0 là **điểm cực tiểu** của hàm số.

b) Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$ thì x_0 là **điểm cực đại** của hàm số.



TÓM TẮT BÀI HỌC

QUY TẮC TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

QUY TẮC 1

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2: Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 3: Lập bảng biến thiên.

Bước 4: Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

QUY TẮC 2

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2: Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu $x_i (i = 1, 2, \dots)$ là các nghiệm của phương trình.

Bước 3: Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.

Bước 4: Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra điểm cực trị của hàm số.