



GIẢI TÍCH ^{LỚP}
12

Chương 1: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HS VÀ VẼ ĐỒ THỊ HS

Bài 1. SỰ ĐỒNG BIẾN VÀ NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

I TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

1 *Nhắc lại định nghĩa*

2 *Tính đơn điệu và dấu của đạo hàm*

3 *Ví dụ*

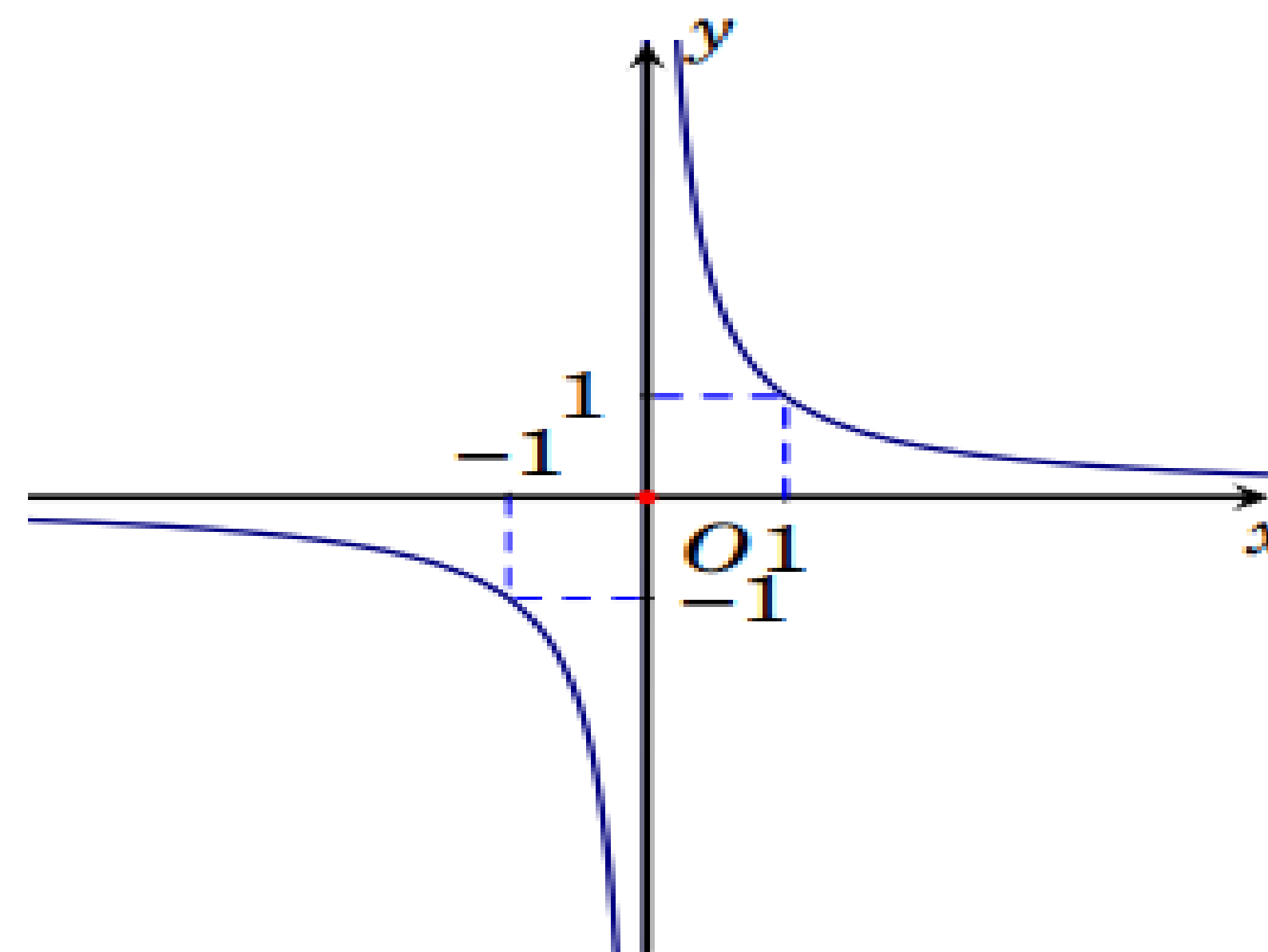
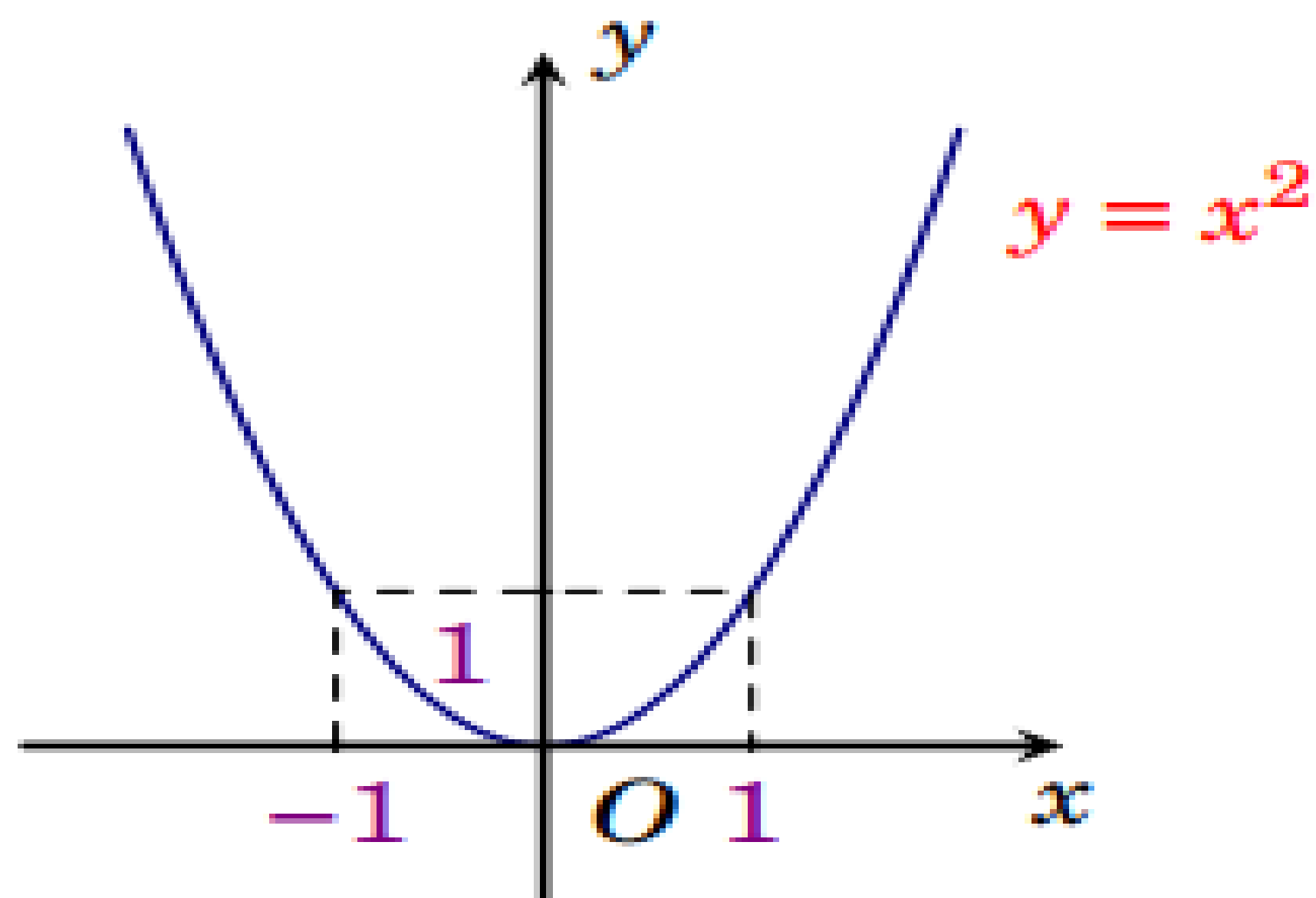
II QUY TẮC XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

1 *Quy tắc*

2 *Áp dụng*

Hoạt động khởi động

* Trò chơi "Quan sát hình ảnh". Mỗi nhóm viết lên giấy A4 các khoảng đồng biến, nghịch biến của của các hàm số tương ứng từ đồ thị sau:



I

TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

1 Nhắc lại định nghĩa

Định nghĩa

Giả sử K là một khoảng, một đoạn, một nửa khoảng và $y = f(x)$ là một hàm số xác định trên K . Ta nói:

➤ **Hàm số được gọi là đồng biến (tăng) trên K nếu**

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) .$$

➤ **Hàm số được gọi là nghịch biến (giảm) trên K nếu**

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) .$$

➤ **Hàm số đồng biến, nghịch biến trên khoảng K được gọi chung là đơn điệu trên khoảng K .**

I

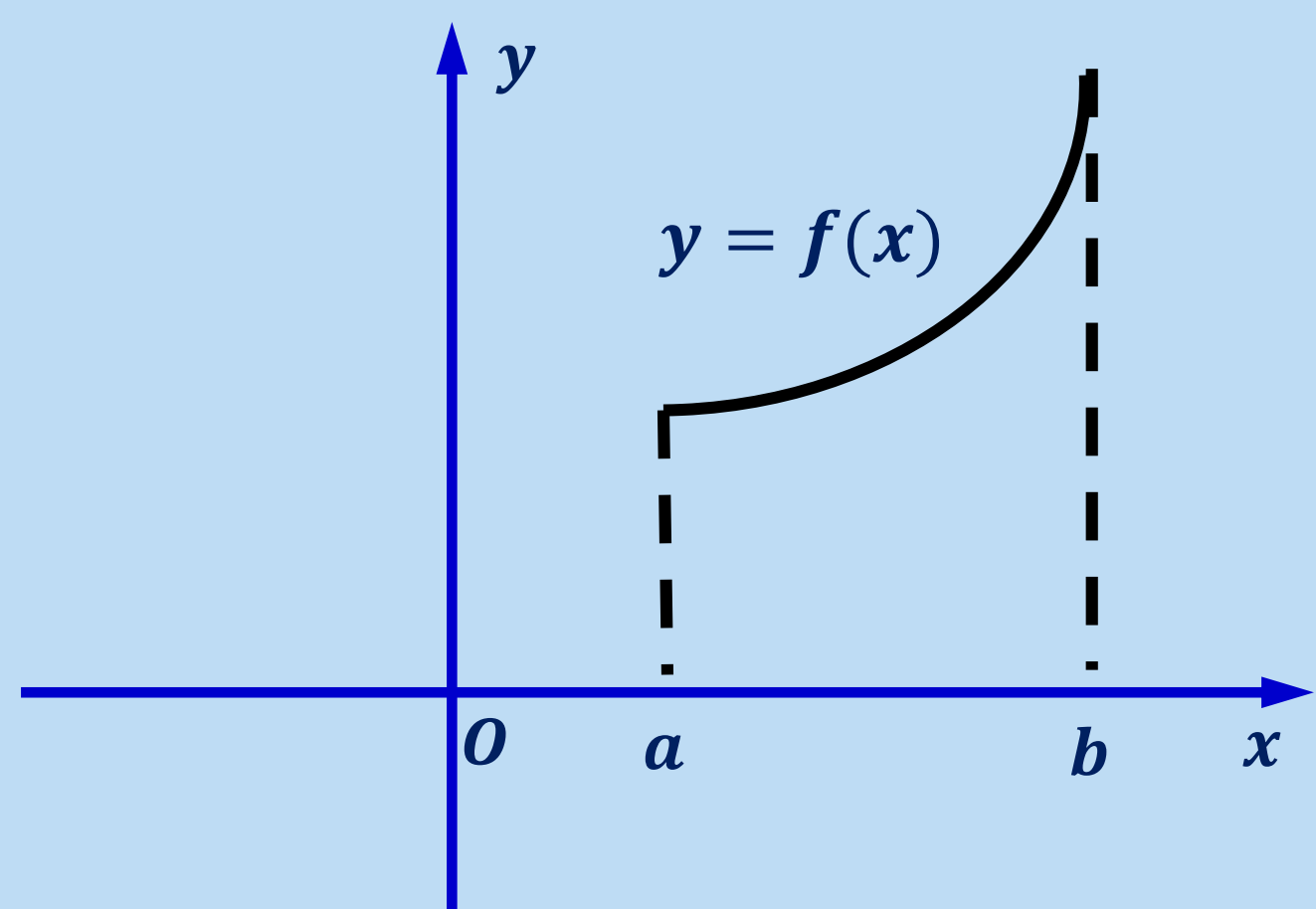
TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

1 Nhắc lại định nghĩa

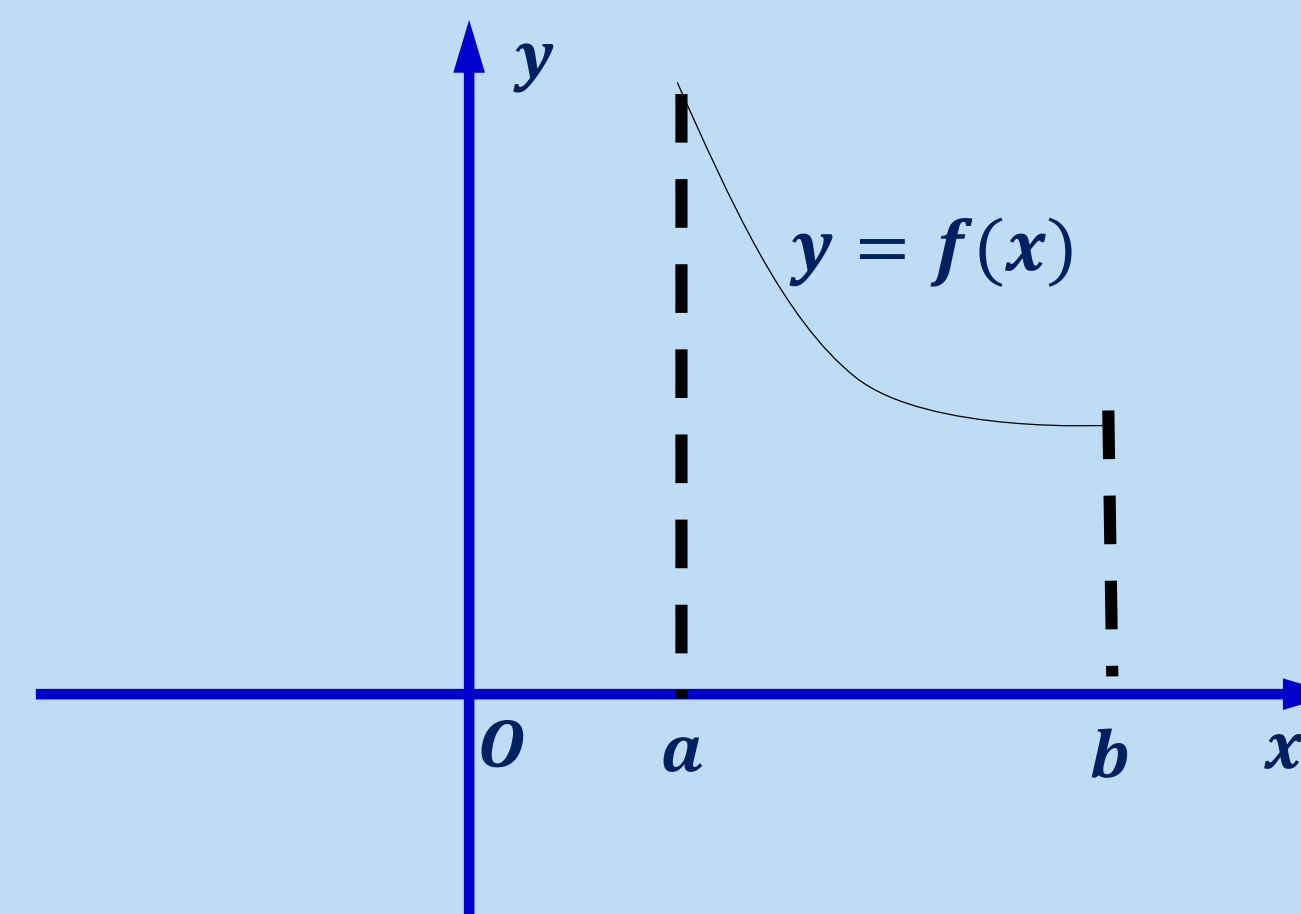


Chú ý

- Hàm số đồng biến trên khoảng K thì đồ thị đi lên từ trái sang phải.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng K thì đồ thị đi xuống từ trái sang phải.



Hàm số đồng biến trên $(a; b)$



Hàm số nghịch biến trên $(a; b)$

I

TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

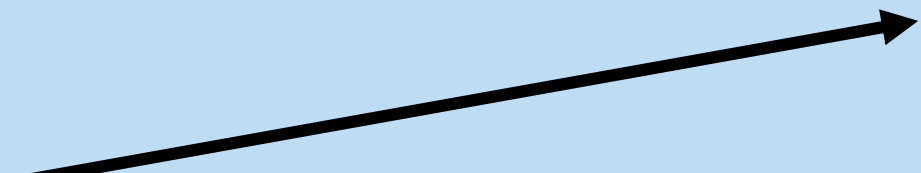
2

Tính đơn điệu và dấu của đạo hàm

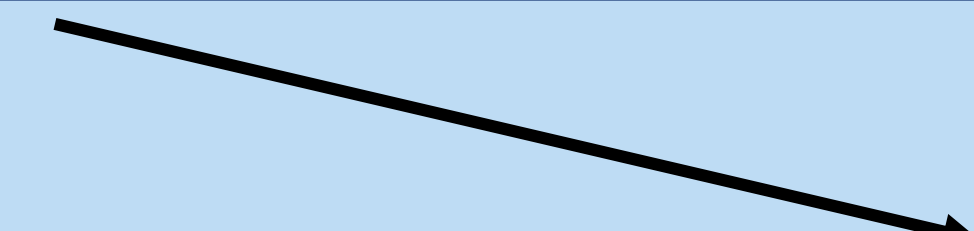
Định lí

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K .

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì $y = f(x)$ đồng biến trên K .
- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì $y = f(x)$ nghịch biến trên K .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

Hàm số đồng biến trên khoảng k

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$		

Hàm số nghịch biến trên khoảng k

* Chú ý: Giải sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K .
 Nếu $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), $\forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến (nghịch biến) trên K .

I TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

4 Ví dụ

Ví dụ 1

Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số:

a) $y = 2x - 1$

b) $y = -x^2 + 2x$

Lời giải

a) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$y' = 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

BBT

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Kết luận: Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

b) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$y' = -2x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

$\Rightarrow y = 1$

BBT

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	1	$-\infty$

Kết luận: Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$

II

QUY TẮC XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1 Quy tắc

Quy tắc

1. Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$.
2. Tìm các điểm tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.
3. Sắp xếp các điểm đó theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
4. Kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

II

QUY TẮC XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

2

Áp dụng

***Ví dụ 2: Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$**

Lời giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = -1 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	4		0	$+\infty$

Graph of $f(x)$ is shown below:



The graph shows a cubic function $f(x)$ plotted on a coordinate system. The x-axis is labeled with $-\infty$, -1 , 1 , and $+\infty$. The y-axis is labeled with $-\infty$, 4 , and 0 . The curve starts at $-\infty$ on the y-axis, increases to a local maximum at $(-1, 4)$, decreases to a local minimum at $(1, 0)$, and then increases towards $+\infty$ on the y-axis. The curve is blue.

Kết luận:

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

II

QUY TẮC XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

2

Áp dụng

Ví dụ 3: Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$

Lời giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Ta có: $y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	1	$+\infty$	$-\infty$

Kết luận:

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

II

QUY TẮC XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

2 Áp dụng

***Ví dụ 4: Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$**

Lời giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 4x^3 - 4x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 1 \\ x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	1	2	1	$+\infty$

Kết luận:

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

II

QUY TẮC XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

2

Áp dụng

* Ví dụ 5: Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = \frac{-x^2 + x - 7}{x - 2}$

Lời giải:

TXĐ $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Ta có: $y' = \frac{-x^2 + 4x + 5}{(x - 2)^2} = 0$

$\Leftrightarrow -x^2 + 4x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 3 \\ x = 5 \Rightarrow y = -9 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	3	$+\infty$	-9	$-\infty$	$-\infty$

Kết luận:

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 2)$ và $(2; 5)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(5; +\infty)$.

III BÀI TẬP SGK



Bài tập 1/9

Xét sự đồng biến và nghịch biến của hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x - 2$



Bài giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có : $y' = x^2 + 6x - 7$

$$y' = 0 \Rightarrow x^2 + 6x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -\frac{17}{3} \\ x = -7 \Rightarrow y = \frac{239}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-7		1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$		$\frac{239}{3}$		$-\frac{17}{3}$	$+\infty$

**Vậy hàm số đồng biến trong các khoảng $(-\infty ; -7)$ và $(1 ; +\infty)$;
Hàm số nghịch biến trong khoảng $(-7; 1)$.**

III BÀI TẬP SGK

Bài tập 3/10

Chứng minh rằng hàm số: $y = \frac{x}{x^2+1}$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

Bài giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$			$\frac{1}{2}$	$-\infty$

Diagram showing the function's behavior with arrows: from $+\infty$ at $x = -\infty$ down to $-\frac{1}{2}$ at $x = -1$, then up to $\frac{1}{2}$ at $x = 1$, and finally down to $-\infty$ at $x = +\infty$.

**Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$;
Nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.**



TÓM TẮT BÀI HỌC

1 *Tính đơn điệu và dấu của đạo hàm*

2 *Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số*

- 1. Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$.**
- 2. Tìm các điểm tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.**
- 3. Sắp xếp các điểm đó theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.**
- 4. Kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.**

IV BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM



CÂU 1

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$					$+\infty$

Diagram showing the function values at critical points and limits:

- At $x = -\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$.
- At $x = -1$, $f(x) = -1$.
- At $x = 0$, $f(x) = 4$.
- At $x = 1$, $f(x) = -1$.
- At $x = +\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$.

Arrows indicate the direction of the function: from $+\infty$ at $-\infty$ down to -1 at -1 , up to 4 at 0 , down to -1 at 1 , and up to $+\infty$ at $+\infty$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(0; 1)$.

C. $(-1; 1)$.

D. $(-1; 0)$



Bài giải

Dựa vào bảng biến thiên hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Chọn D

IV BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM



CÂU 2 Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.
- C.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.



Bài giải

Dựa vào bảng biến thiên hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn D

IV BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM



CÂU 3

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

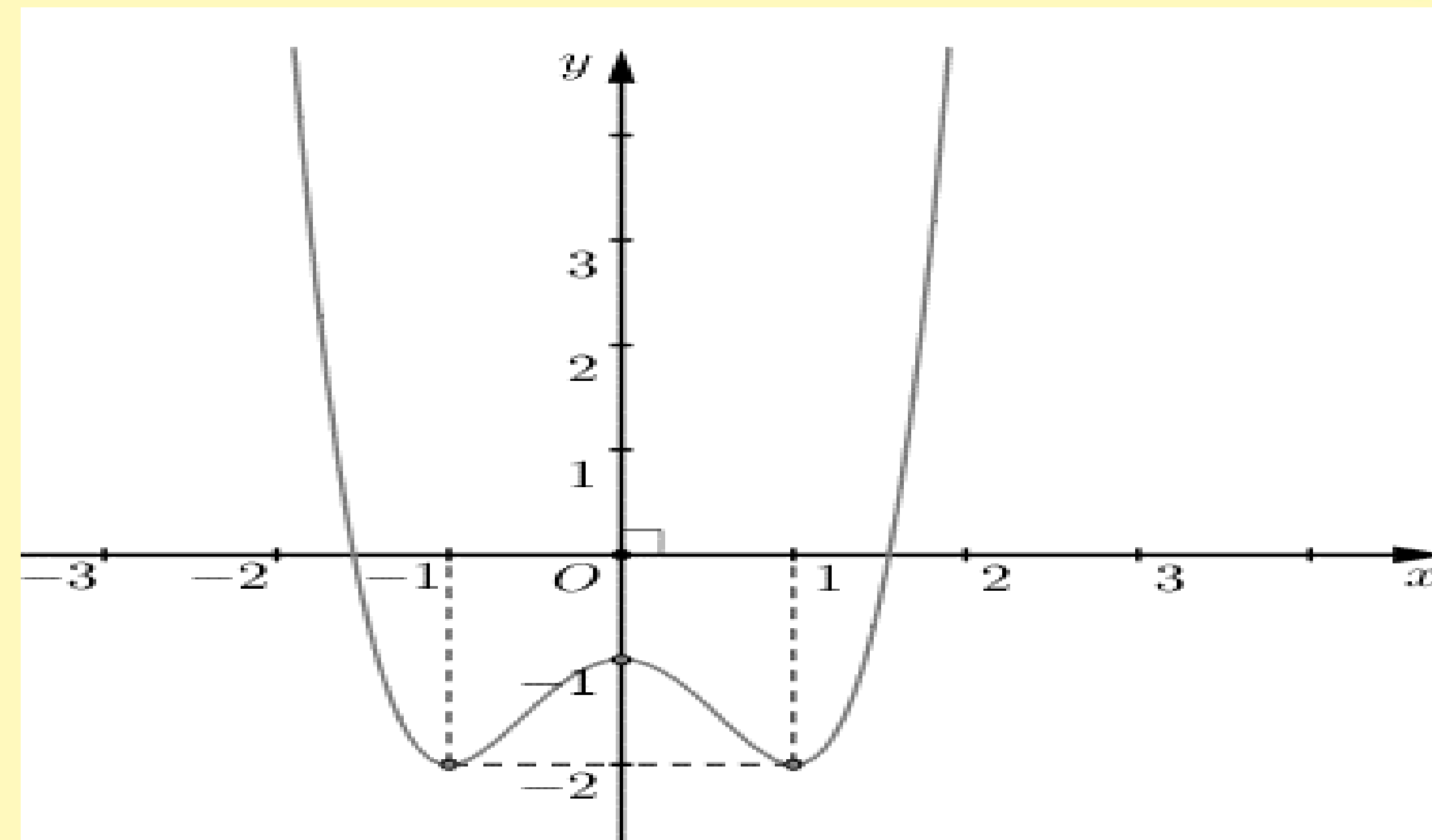
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(-\infty - 1)$

B. $(-1; 1)$

C. $(-1; 0)$

D. $(0; 1)$



Bài giải

Từ đồ thị, ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Chọn C

IV BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM



CÂU 4

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A 5.

B 4.

C 3.

D 2.



Bài giải

Ta có $f'(x) = x^2 + 2mx + 4$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
(Dấu '=' xảy ra tại hữu hạn điểm).

Ta có $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$, vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn A

IV BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM



CÂU 5

Cho hàm số $y = \frac{mx+9}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .

A. 4

B. Vô số

C. 3

D. 5



Bài giải

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}; y' = \frac{m^2-9}{(x+m)^2}$$

Hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định khi $f'(x) < 0, \forall x \in D$

$$\Leftrightarrow m^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 3$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$,
vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn D

IV BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM



CÂU 6

Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-4}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ là

A. $(-2; 1)$.

B. $(-2; 2)$.

C $(-2; -1)$.

D. $(-2; -1)$.



Bài giải

Đạo hàm $y' = \frac{-m^2+4}{(x-m)^2}, \forall x \neq m$.

Do đó hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} y' > 0, \forall x \in (-1; +\infty) &\Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 4 > 0 \\ x \neq m, \forall x \in (-1; +\infty) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1. \end{aligned}$$

Chọn C

IV BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 7

Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (4 - m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là

A. $(-\infty; 1)$

B. $(-\infty; 4]$

C. $(-\infty; 1)$

D. $(-\infty; 4)$



Bài giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + 4 - m$

$ycbt \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (2; +\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 4 - m \geq 0, \forall x \in (2; +\infty)$

$\Leftrightarrow m \leq 3x^2 - 6x + 4, \forall x \in (2; +\infty)$

$\Leftrightarrow m \leq \min_{(2; +\infty)} g(x) \text{ với } g(x) = 3x^2 - 6x + 4.$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$g'(x)$		0	+	
$g(x)$			4	$+\infty$

Ta có: $g'(x) = 6x - 6, g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m \leq 4$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy khi $m \in (-\infty; 4]$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Chọn B

IV BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

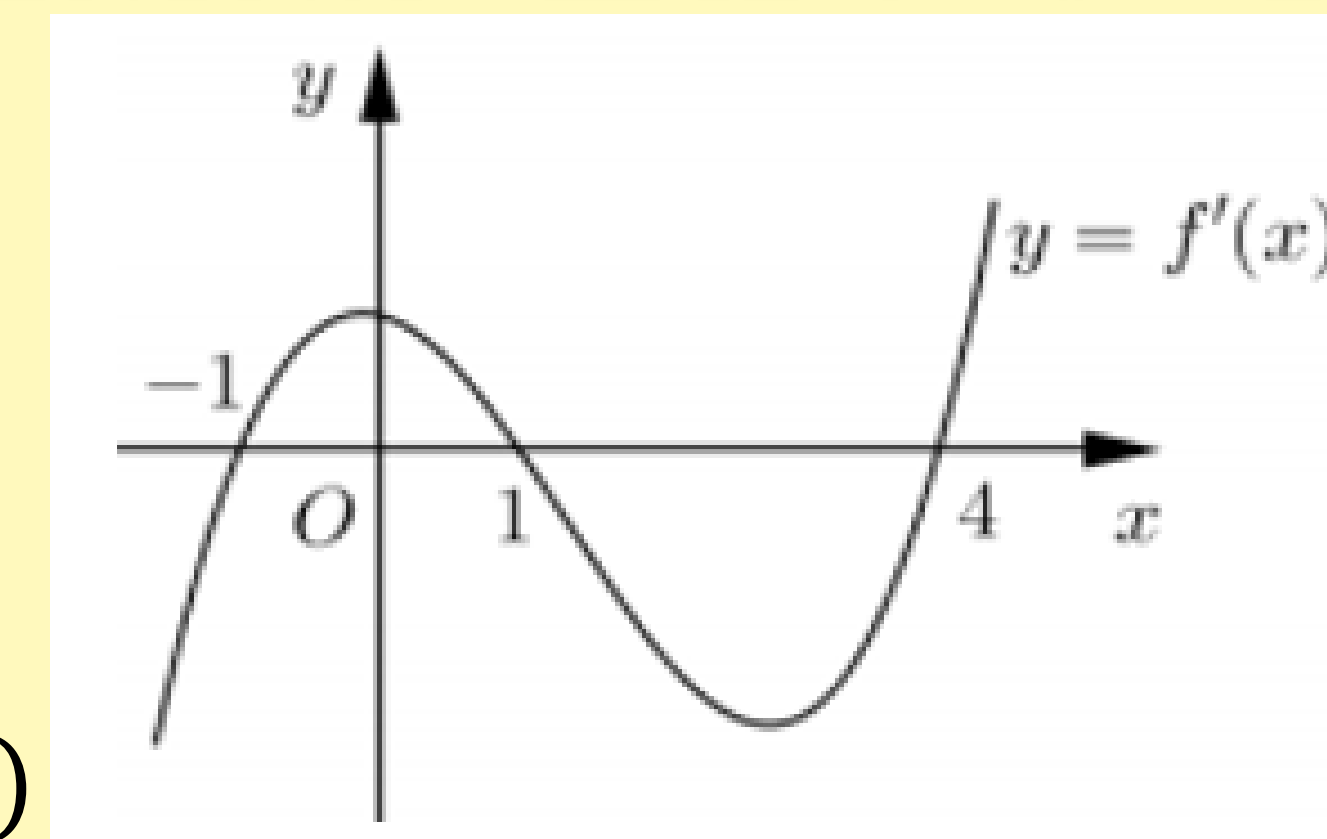


CÂU 8

Cho hàm số $y = f(x)$.

Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.

Hàm số $y = f(2 - x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?



A. $(2; +\infty)$

B $(-2; 1)$

C. $(-\infty; -2)$

D. $(1; 3)$



Bài giải

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 4 \end{cases}$.

Ta có $(f(2 - x))' = (2 - x)' \cdot f'(2 - x) = -f'(2 - x)$.

Hàm số $y = f(2 - x)$ đồng biến khi và chỉ khi

$$(f(2 - x))' > 0 \Leftrightarrow f'(2 - x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x < -1 \\ 1 < 2 - x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{cases}$$

Chọn B

IV BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM



CÂU 9

Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	+	0	−	0	+	

Hàm số $y = 3f(x + 2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(-1; 0)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(1; +\infty)$.



Bài giải

Ta có: $y' = 3[f'(x + 2) + (1 - x^2)]$

$$\text{Xet. } f'(x + 2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x + 2 \leq 3 \\ x + 2 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{Do đó : } \begin{cases} f'(x + 2) \geq 0, \forall x \in (-1; 1) \\ 1 - x^2 > 0, \forall x \in (-1; 1) \end{cases} \Rightarrow y' > 0, \forall x \in (-1; 1)$$

Suy ra hàm số $y = 3f(x + 2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$

Chọn B

IV BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM



CÂU 10

Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.

Hàm số $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x$

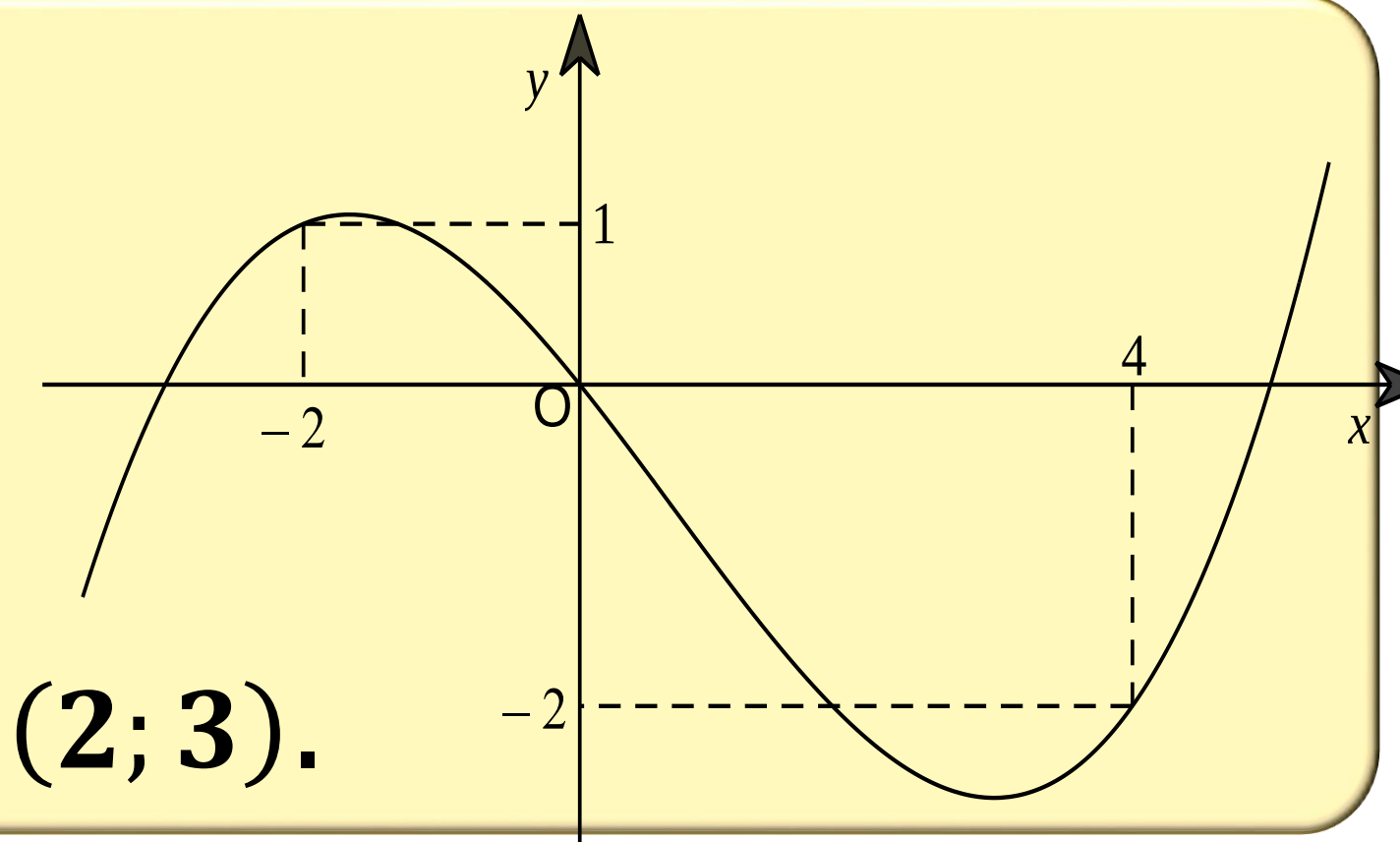
nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(1; \frac{3}{2})$.

B. $(0; \frac{1}{2})$.

C. $(-2; -1)$.

D. $(2; 3)$.



Bài giải

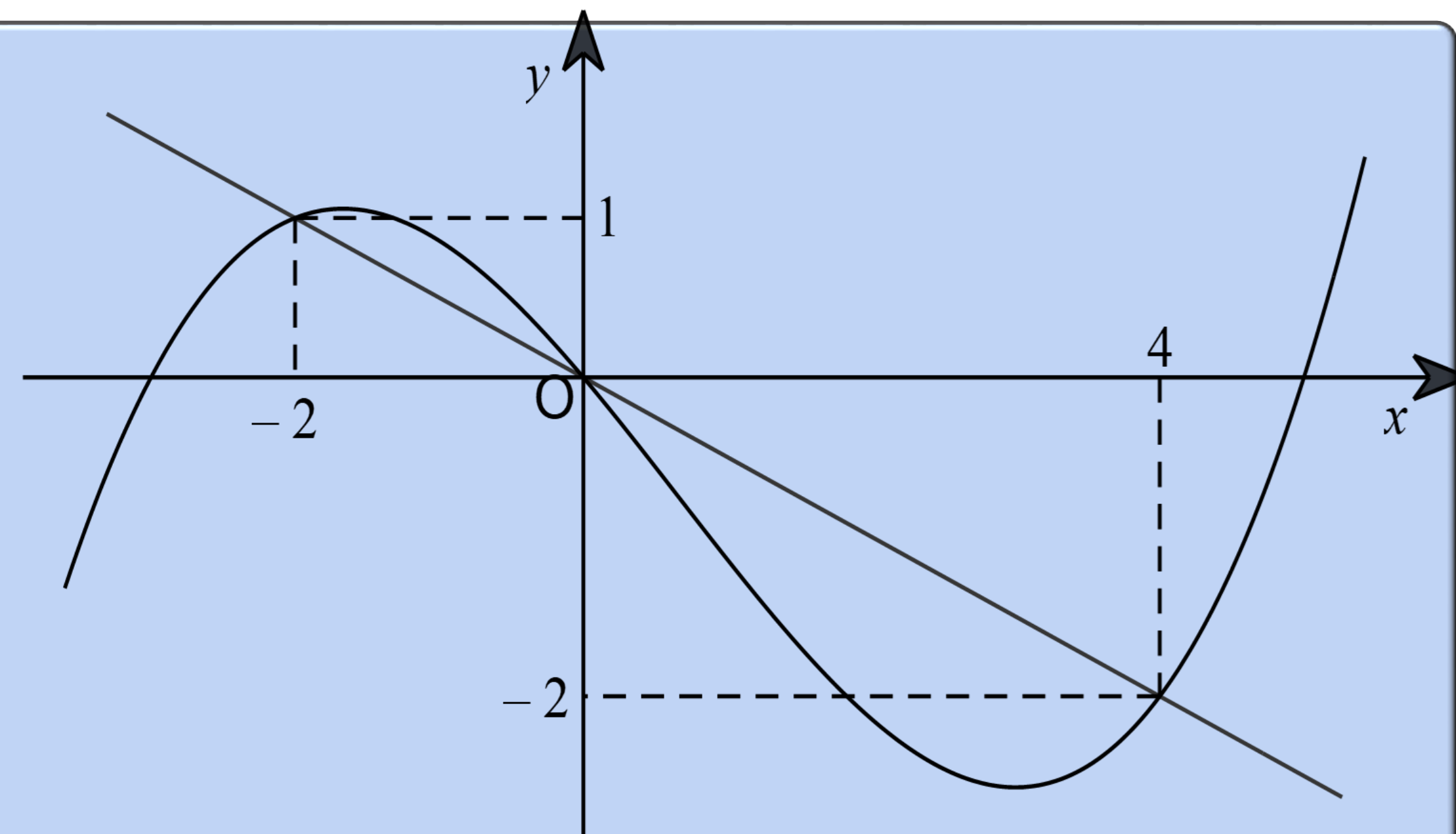
Ta có : $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x$

$\Leftrightarrow g'(x) = -2f'(1 - 2x) + 2x - 1$

Đặt $t = 1 - 2x \Rightarrow g'(x) = -2f'(t) - t$,

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = -\frac{t}{2}$

Vẽ đường thẳng $y = -\frac{x}{2}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên cùng một hệ trục.



IV BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM



CÂU 10 Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.

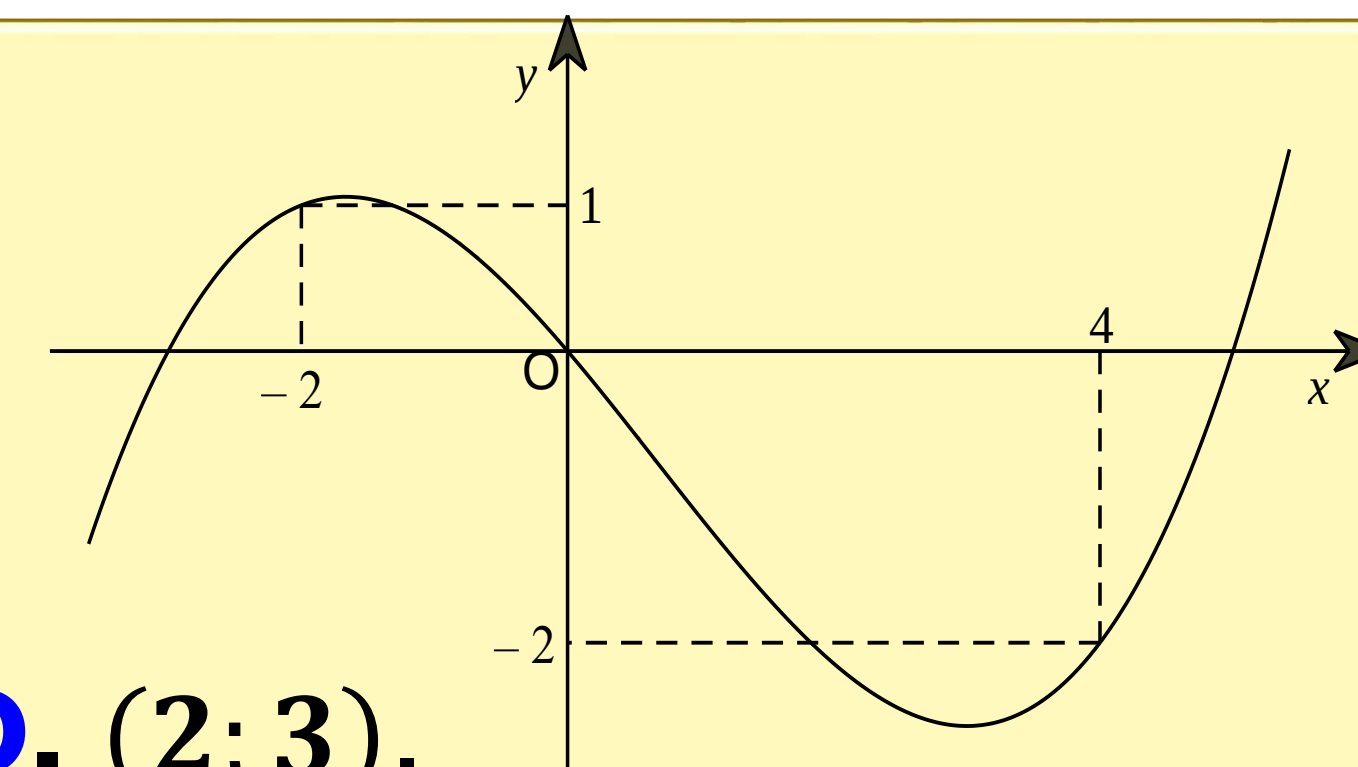
Hàm số $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

B. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

C. $(-2; -1)$.

D. $(2; 3)$.



Bài giải

Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(t) \geq -\frac{t}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq t \leq 0 \\ t \geq 4 \end{cases}$

Như vậy $f'(1 - 2x) \geq \frac{1-2x}{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq 1 - 2x \leq 0 \\ 4 \leq 1 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \\ x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}$

Vậy $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ và $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$.

Mà $\left(1; \frac{3}{2}\right) \subset \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ nên $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. **Chọn A**