



ĐẠI SỐ LỚP
11

Chương 2: TỔ HỢP – XÁC SUẤT

Bài 3. NHỊ THỨC NIU-TƠN

TIẾT 1

A PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

I CÔNG THỨC NHỊ THỨC NIU-TƠN

1 *Nhị thức Niu-tơn*

2 *Ví dụ*

II TAM GIÁC PA-XCAN

B LUYỆN TẬP

A

PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

I

CÔNG THỨC NHỊ THỨC NIU-TƠN

Ví dụ mở đầu

Khai triển: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$.



Khi số mũ tăng lên thì ta có khai triển được không?

Lời giải

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

A

PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

I

CÔNG THỨC NHỊ THỨC NIU-TƠN

1. Công thức nhị thức Niu-tơn

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n \quad (1)$$

Công thức thu gọn: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k \quad (2).$

Hệ quả

-Với $a = b = 1$ ta có: $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$

-Với $a = 1, b = -1$ ta có: $0 = C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n.$

A

PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

I

CÔNG THỨC NHỊ THỨC NIU-TƠN

1. Công thức nhị thức Niu-tơn

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n \quad (1)$$

Công thức thu gọn: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k \quad (2).$



CHÚ Ý

Trong biểu thức ở vế phải của công thức (1) :

- a) Số các hạng tử là $n + 1$;
- b) Các hạng tử có số mũ của a giảm dần từ n đến 0 , số mũ của b tăng dần từ 0 đến n , nhưng tổng các số mũ của a và b trong mỗi hạng tử luôn bằng n (qui ước $a^0 = b^0 = 1$);
- c) Các hệ số của mỗi hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối thì bằng nhau;
- d) Số hạng tổng quát là: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ với $0 \leq k \leq n$, đó là số hạng đứng hàng thứ $k + 1$ trong khai triển;

I

CÔNG THỨC NHỊ THỨC NIU-TƠN

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n \quad (1)$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k \quad (2).$$

Ví dụ 1

Khai triển: $(a + b)^5$ với $a \neq 0, b \neq 0$.



Bài giải

Hệ số : 1 5 10 10 5 1

Lũy thừa a : a^5 a^4 a^3 a^2 a^1 a^0

Lũy thừa b : b^0 b^1 b^2 b^3 b^4 b^5

Nhân theo cột ta được:

$$(a + b)^5 = C_5^0 a^5 b^0 + C_5^1 a^4 \cdot b^1 + C_5^2 a^3 \cdot b^2 + C_5^3 a^2 \cdot b^3 + C_5^4 a^1 \cdot b^4 + C_5^5 a^0 \cdot b^5.$$

$$= 1 \cdot a^5 \cdot 1 + 5 \cdot a^4 \cdot b + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a \cdot b^4 + 1 \cdot 1 \cdot b^5.$$

$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

I CÔNG THỨC NHỊ THỨC NIU-TƠN

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n \quad (1)$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k \quad (2).$$

2 Ví dụ

Ví dụ 2

Khai triển: $(x + 2)^6$ với $x \neq 0$.

Bài giải

Hệ số :	1	6	15	20	15	6	1
Lũy thừa x:	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
Lũy thừa 2:	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6

Nhân theo cột ta được:

$$\begin{aligned}
 (x + 2)^6 &= C_6^0 x^6 2^0 + C_6^1 x^5 \cdot 2^1 + C_6^2 x^4 \cdot 2^2 + C_6^3 x^3 \cdot 2^3 + C_6^4 x^2 \cdot 2^4 + C_6^5 x^1 \cdot 2^5 + C_6^6 x^0 \cdot 2^6. \\
 &= 1 \cdot x^6 \cdot 1 + 6 \cdot x^5 \cdot 2 + 15 \cdot x^4 \cdot 4 + 20 \cdot x^3 \cdot 8 + 15 \cdot x^2 \cdot 16 + 6 \cdot x \cdot 32 + 1 \cdot 1 \cdot 64. \\
 &= x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64.
 \end{aligned}$$

I

CÔNG THỨC NHỊ THỨC NIU-TƠN

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n \quad (1)$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k \quad (2).$$

2 Ví dụ

Ví dụ 3

Khai triển: $(3x - 4)^5$ với $x \neq 0$.



Bài giải

$$(3x - 4)^5$$

$$= C_5^0 (3x)^5 (-4)^0 + C_5^1 (3x)^4 \cdot (-4)^1 + C_5^2 (3x)^3 \cdot (-4)^2 + C_5^3 (3x)^2 \cdot (-4)^3 + C_5^4 (3x)^1 \cdot (-4)^4$$

$$+ C_5^5 (3x)^0 \cdot (-4)^5$$

$$= 243x^5 - 1620x^4 + 4320x^3 - 5760x^2 + 3840x - 1024.$$

I CÔNG THỨC NHỊ THỨC NIU-TƠN

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n \quad (1)$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k \quad (2).$$

2 Ví dụ

Ví dụ 4

Chứng minh rằng với $n \geq 4$, ta có: $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + \dots = 2^{n-1}$.

Bài giải

Đặt $A = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots$; $B = C_n^1 + C_n^3 + \dots$

Ta thấy: $A + B = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$ (dựa vào hệ quả).

$$A - B = C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n = 0 \quad (\text{ dựa vào hệ quả }).$$

Cộng vế theo vế ta được : $2A = 2^n \Leftrightarrow A = 2^{n-1} \quad (1).$

Trừ vế theo vế ta được : $2B = 2^n \Leftrightarrow B = 2^{n-1} \quad (2).$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

A

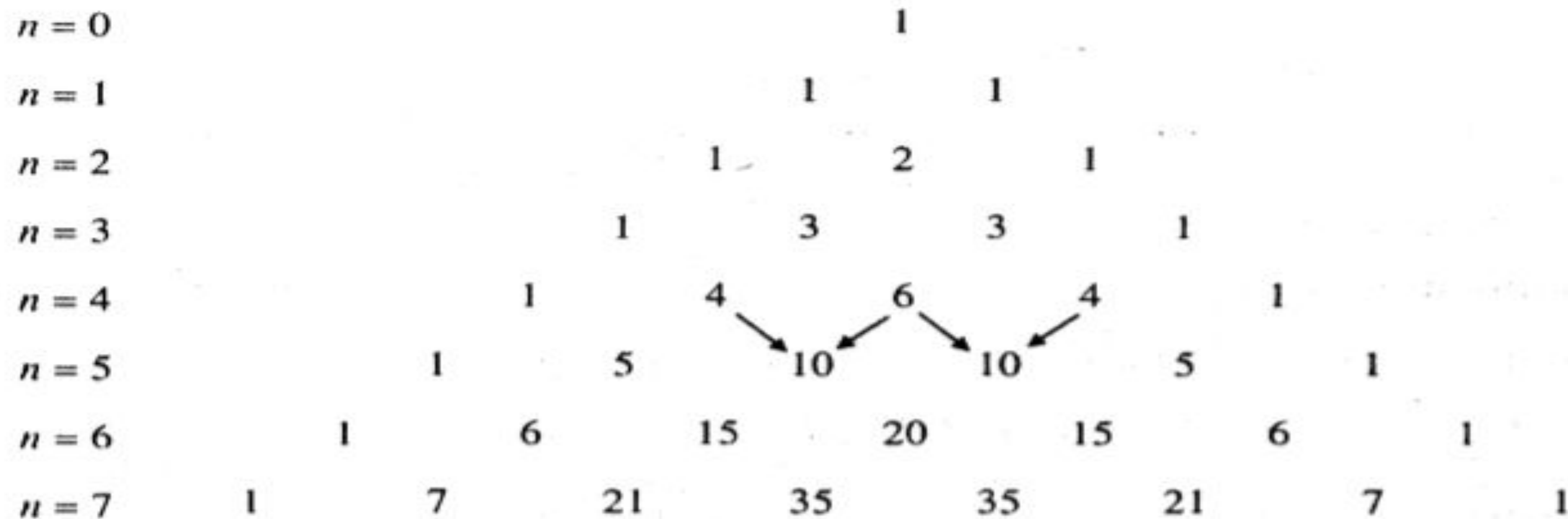
PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

I

CÔNG THỨC NHỊ THỨC NIU-TƠN

II

TAM GIÁC PA-XCAN



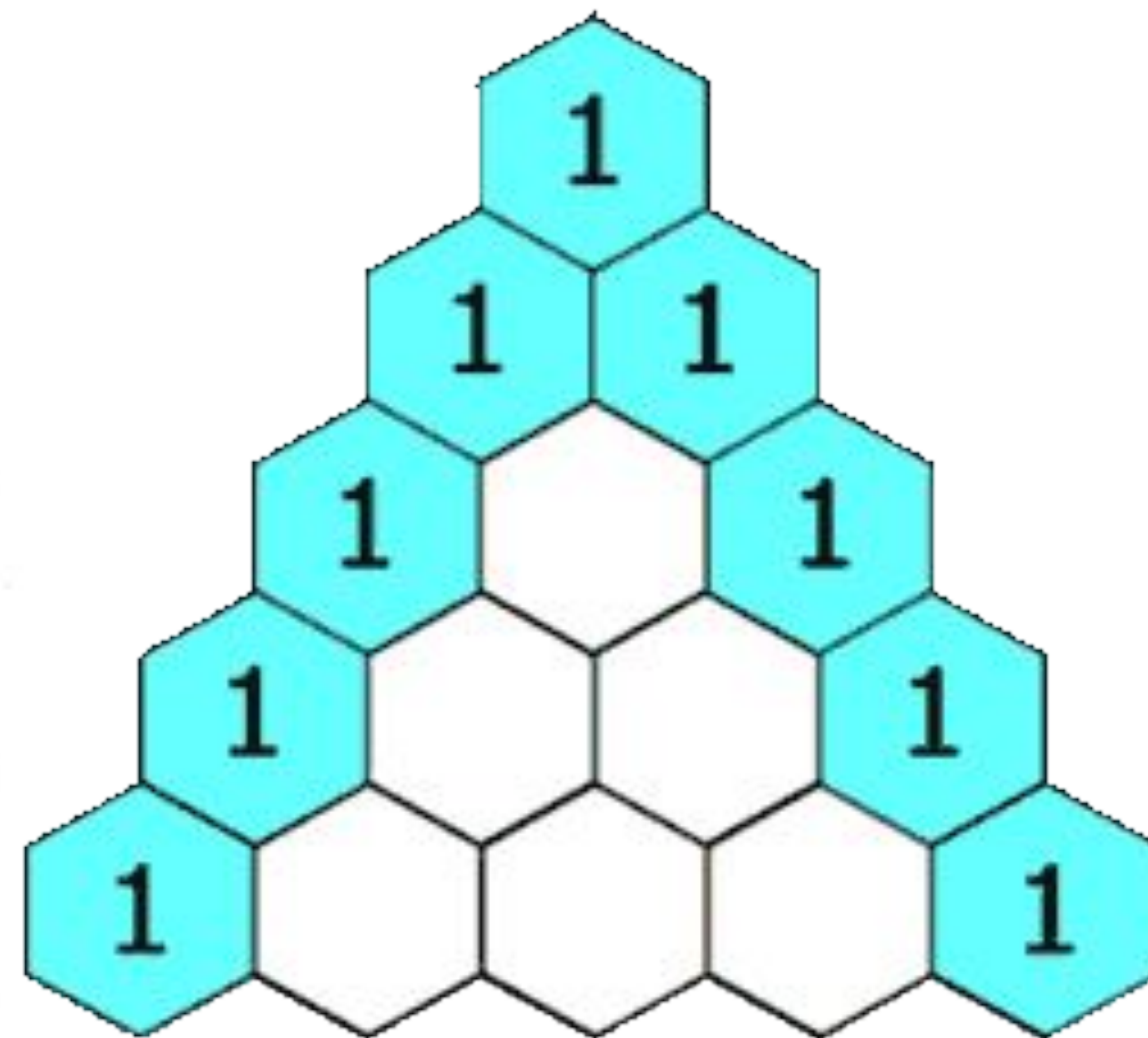
Nhận xét

Từ công thức $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$ suy ra cách tính các số ở mỗi dòng dựa vào các số ở dòng trước nó.

Chẳng hạn: $C_5^2 = C_4^1 + C_4^2 = 4 + 6 = 10$.

II

TAM GIÁC PA-XCAN



Từ công thức $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$ suy ra cách tính các số ở mỗi dòng dựa vào các số ở dòng trước nó.

Chẳng hạn: $C_5^2 = C_4^1 + C_4^2 = 4 + 6 = 10$.

A

PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

B

LUYỆN TẬP



Câu 1

Khai triển: a) $(2x + 1)^4$. b) $(2 - 3x^2)^5$. c) $\left(\frac{x}{3} + 2\right)^5$. d) $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^6$.



Bài giải

$$\begin{aligned} \text{a) } (2x + 1)^4 &= C_4^0 (2x)^4 + C_4^1 (2x)^3 \cdot 1 + C_4^2 (2x)^2 \cdot 1^2 + C_4^3 \cdot 2x \cdot 1^3 + C_4^4 \cdot 1^4 \\ &= 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (2 - 3x^2)^5 &= C_5^0 \cdot 2^5 + C_5^1 \cdot 2^4 \cdot (-3x^2) + C_5^2 \cdot 2^3 \cdot (-3x^2)^2 + C_5^3 \cdot 2^2 \cdot (-3x^2)^3 + \\ &= 32 - 240x^2 + 720x^4 - 1080x^6 + 810x^8 - 243x^{10}. \\ &C_5^4 \cdot 2 \cdot (-3x^2)^4 + C_5^5 (-3x^2)^5 \end{aligned}$$

A

PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

B

LUYỆN TẬP



Câu 1

Khai triển:

a) $(2x + 1)^4$.

b) $(2 - 3x^2)^5$.

c) $\left(\frac{x}{3} + 2\right)^5$.

d) $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^6$.



Bài giải

$$\begin{aligned} \text{c) } \left(\frac{x}{3} + 2\right)^5 &= C_5^0 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^5 + C_5^1 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^4 \cdot 2 + C_5^2 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^3 \cdot 2^2 + C_5^3 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^2 \cdot 2^3 + C_5^4 \cdot \frac{x}{3} \cdot 2^4 + C_5^5 \cdot 2^5 \\ &= \frac{1}{243}x^5 + \frac{10}{81}x^4 + \frac{40}{27}x^3 + \frac{80}{9}x^2 + \frac{80}{3}x + 32. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^6 &= C_6^0 \cdot (x^2)^6 + C_6^1 \cdot (x^2)^5 \cdot \left(-\frac{2}{x}\right) + C_6^2 \cdot (x^2)^4 \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^2 + C_6^3 \cdot (x^2)^3 \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^3 + \\ &+ C_6^4 \cdot (x^2)^2 \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^4 + C_6^5 \cdot x^2 \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^5 + C_6^6 \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^6 \\ &= x^{12} - 12x^9 + 60x^6 - 160x^3 + 240 - \frac{192}{x^3} + \frac{64}{x^6} \end{aligned}$$

A

PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

B

LUYỆN TẬP



Câu 2

Tìm số hạng không chứa x trong khai triển: $\left(x - \frac{3}{x}\right)^{24}$.



Bài giải

Ta có: Số hạng tổng quát: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ **với** $0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N}$.

$T_{k+1} = C_{24}^k a^{24-k} b^k$ **với** $0 \leq k \leq 24, k \in \mathbb{N}$.

$T_{k+1} = C_{24}^k x^{24-k} \left(-\frac{3}{x}\right)^k = C_{24}^k x^{24-2k} (-3)^k$.

Số hạng không chứa x nên $24 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 12$ **(nhận).**

Với $k = 12$ ta có: $T_{12+1} = C_{24}^{12} x^{24-2 \cdot 12} (-3)^{12} \Leftrightarrow T_{13} = C_{24}^{12} \cdot 3^{12}$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển: $\left(x - \frac{3}{x}\right)^{24}$ **là** $C_{24}^{12} \cdot 3^{12}$.



ĐẠI SỐ LỚP
10

Chương 2: TỔ HỢP – XÁC SUẤT

Bài 3. NHỊ THỨC NIU-TƠN

TIẾT 2 : LUYỆN TẬP

A KIỂM TRA BÀI CŨ

B LUYỆN TẬP

I CHỮA BÀI TẬP SGK

II BÀI TẬP TRẮC
NGHIỆM

A

KIỂM TRA BÀI CŨ

 Câu 1. Trình bày công thức và hệ quả của nhị thức Niu- tơn?

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n \quad (1)$$

Hệ quả: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$; $C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$

Câu 2. Khai triển: $(x - 3)^5$.

$$(x - 3)^5 = x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243.$$

Câu 3. Tìm hệ số của x^3 trong khai triển $\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^{15}$.

Đáp số : $C_{15}^4 \cdot 2^4 = 21840$

B LUYỆN TẬP

I CHỮA BÀI TẬP SGK



Bài 1/57

Viết khai triển theo công thức nhị thức Niu- tơn:

a) $(a + 2b)^5$

b) $(a - \sqrt{2})^6$

c) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{13}$



Bài giải

$$\begin{aligned} a) (a + 2b)^5 &= C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 (2b) + C_5^2 a^3 (2b)^2 + C_5^3 a^2 (2b)^3 + C_5^4 a (2b)^4 + C_5^5 (2b)^5 \\ &= a^5 + 10a^4 b + 40a^3 b^2 + 80a^2 b^3 + 80ab^4 + 32b^5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) (a - \sqrt{2})^6 &= C_6^0 a^6 (-\sqrt{2})^0 + C_6^1 a^5 (-\sqrt{2})^1 + C_6^2 a^4 (-\sqrt{2})^2 + C_6^3 a^3 (-\sqrt{2})^3 + C_6^4 a^2 (-\sqrt{2})^4 + \\ &\quad C_6^5 a^1 (-\sqrt{2})^5 + C_6^6 a^0 (-\sqrt{2})^6. \\ &= a^6 - 6\sqrt{2}a^5 + 30a^4 - 40\sqrt{2}a^3 + 60a^2 - 24\sqrt{2}a + 8. \end{aligned}$$



Bài 1/57

Viết khai triển theo công thức nhị thức Niu- tơn:

a) $(a + 2b)^5$

b) $(a - \sqrt{2})^6$

c) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{13}$



Bài giải

$$\begin{aligned} \text{c) } \left(x - \frac{1}{x}\right)^{13} &= C_{13}^0 x^{13} \left(-\frac{1}{x}\right)^0 + C_{13}^1 x^{12} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^1 + \dots + C_{13}^{12} x^1 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^{12} + \\ &+ C_{13}^{13} x^0 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^{13} \\ &= \sum_{k=0}^{13} C_{13}^k (-1)^k x^{13-2k}. \end{aligned}$$

(Khi công thức khai triển có quá nhiều số hạng, nên dùng dạng thu gọn (2))

Bài 2/58

Tìm hệ số của x^3 trong khai triển của biểu thức: $\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^6$ với $x \neq 0$.



Bài giải

Ta có: Số hạng tổng quát: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ với $0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N}$.

$T_{k+1} = C_6^k a^{6-k} b^k$ với $0 \leq k \leq 6, k \in \mathbb{N}$.

$T_{k+1} = C_6^k x^{6-k} \left(\frac{2}{x^2}\right)^k = C_6^k x^{6-k} 2^k x^{-2k} = C_6^k 2^k x^{6-3k}$.

Hệ số của x^3 nên $6 - 3k = 3 \Leftrightarrow k = 1$ (nhận).

Với $k = 1$ ta có: $T_{1+1} = C_6^1 2^1 x^{6-3 \cdot 1} \Leftrightarrow T_2 = 12x^3$.

Vậy hệ số của x^3 trong khai triển của biểu thức: $\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^6$ là 12.



Bài 3/58

Biết hệ số của x^2 trong khai triển của $(1 - 3x)^n$ là 90. Tìm n .



Bài giải

Ta có: Số hạng tổng quát: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ **với** $0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N}$.

$T_{k+1} = C_n^k 1^{n-k} (-3x)^k = C_n^k 1^{n-k} (-3)^k x^k$ **với** $0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N}$.

Hệ số của x^2 là 90 nên $k = 2$.

Với $k = 2$ ta có hệ số của x^2 : $C_n^2 1^{n-2} (-3)^2 = 90 \Leftrightarrow 9C_n^2 = 90 \Leftrightarrow C_n^2 = 10$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 10 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 10 \Leftrightarrow n^2 - n - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 5(N) \\ n = -4(L) \end{cases}$$

Vậy $n = 5$ là giá trị cần tìm.

Bài 4/58

Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức: $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^8$ với $x \neq 0$.



Bài giải

Ta có: Số hạng tổng quát: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ **với** $0 \leq k \leq n$.

$T_{k+1} = C_8^k a^{8-k} b^k$ **với** $0 \leq k \leq 8, k \in \mathbb{N}$.

$T_{k+1} = C_8^k (x^3)^{8-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = C_8^k x^{24-3k} \cdot x^{-k} 1^k = C_8^k x^{24-4k}$.

Số hạng không chứa x nên $24 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 6$ **(nhận).**

Với $k = 6$ ta có: $T_{6+1} = C_8^6 x^{24-4 \cdot 6} \Leftrightarrow T_7 = 28$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức: $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^8$ là 28.



Bài 5/58

Từ khai triển biểu thức $(3x - 4)^{17}$ thành đa thức, hãy tính tổng các hệ số của đa thức nhận được.



Bài giải

Ta có: $(3x - 4)^{17} = C_{17}^0 \cdot (3x)^{17} + C_{17}^1 \cdot (3x)^{16} \cdot (-4) + \dots + C_{17}^k \cdot (3x)^{17-k} \cdot (-4)^k + \dots + C_{17}^{17} \cdot (-4)^{17}$ (**với** $0 \leq k \leq 17$).

$$\Leftrightarrow (3x - 4)^{17} = C_{17}^0 \cdot 3^{17} x^{17} + C_{17}^1 \cdot 3^{16} (-4) \cdot x^{16} + \dots + C_{17}^k \cdot 3^{17-k} \cdot (-4)^k x^{17-k} + \dots + C_{17}^{17} \cdot (-4)^{17}.$$

Đặt S là tổng các hệ số của đa thức khai triển, ta có :

$$\begin{aligned} S &= C_{17}^0 \cdot 3^{17} + C_{17}^1 \cdot 3^{16} (-4) + \dots + C_{17}^k \cdot 3^{17-k} \cdot (-4)^k + \dots + C_{17}^{17} \cdot (-4)^{17} \\ &= (3 \cdot 1 - 4)^{17} = (-1)^{17} = -1. \end{aligned}$$

Vậy $S = -1$.

Bài 6/58

Chứng minh rằng:

a) $11^{10} - 1$ chia hết cho 100.

b) $101^{100} - 1$ chia hết cho 10000.

c) $\sqrt{10} \left[(1 + \sqrt{10})^{100} - (1 - \sqrt{10})^{100} \right]$ là một số nguyên.



Bài giải

a) Chứng minh $11^{10} - 1$ chia hết cho 100.

Ta có: $11^{10} = (10 + 1)^{10}$. Sử dụng khai triển nhị thức Niu- tơn:

$$\begin{aligned} (10 + 1)^{10} &= C_{10}^0 \cdot 10^{10} + C_{10}^1 \cdot 10^9 \cdot 1 + C_{10}^2 \cdot 10^8 \cdot 1^2 + \dots + C_{10}^9 \cdot 10 \cdot 1^9 + C_{10}^{10} \cdot 1^{10} \\ &= C_{10}^0 \cdot 10^{10} + C_{10}^1 \cdot 10^9 + C_{10}^2 \cdot 10^8 + \dots + 10 \cdot 10 + 1 \quad (\text{Do } C_{10}^9 = 10, C_{10}^{10} = 1). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 11^{10} - 1 = C_{10}^0 \cdot 10^{10} + C_{10}^1 \cdot 10^9 + C_{10}^2 \cdot 10^8 + \dots + 10 \cdot 10.$$

$$= 100(C_{10}^0 \cdot 10^8 + C_{10}^1 \cdot 10^7 + C_{10}^2 \cdot 10^6 + \dots + 1).$$

Do đó $11^{10} - 1$ chia hết cho 100 (đpcm).

Bài 6/58

Chứng minh rằng:

a) $11^{10} - 1$ chia hết cho 100.

b) $101^{100} - 1$ chia hết cho 10000.

c) $\sqrt{10} \left[(1 + \sqrt{10})^{100} - (1 - \sqrt{10})^{100} \right]$ là một số nguyên.



Bài giải

b) Chứng minh $101^{100} - 1$ chia hết cho 10000.

Ta có: $101^{100} = (100 + 1)^{100}$. **Sử dụng khai triển nhị thức Niu- tơn:**

$$\begin{aligned} (100 + 1)^{100} &= C_{100}^0 \cdot 100^{100} + C_{100}^1 \cdot 100^{99} \cdot 1 + C_{100}^2 \cdot 100^{98} \cdot 1^2 + \dots + C_{100}^{99} \cdot 100 \cdot 1^{99} + C_{100}^{100} \cdot 1^{100} \\ &= C_{100}^0 \cdot 100^{100} + C_{100}^1 \cdot 100^{99} + C_{100}^2 \cdot 100^{98} + \dots + 100 \cdot 100 + 1 \quad \text{(Do } C_{100}^{99} = 100, C_{100}^{100} = 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 101^{100} - 1 &= C_{100}^0 \cdot 100^{100} + C_{100}^1 \cdot 100^{99} + C_{100}^2 \cdot 100^{98} + \dots + 100 \cdot 100 \\ &= 10000(C_{100}^0 \cdot 100^{98} + C_{100}^1 \cdot 100^{97} + C_{100}^2 \cdot 100^{96} + \dots + 1) \end{aligned}$$

Do đó $101^{100} - 1$ chia hết cho 10000 (đpcm)

Bài 6/58

Chứng minh rằng:

a) $11^{10} - 1$ chia hết cho 100.

b) $101^{100} - 1$ chia hết cho 10000.

c) $\sqrt{10} \left[(1 + \sqrt{10})^{100} - (1 - \sqrt{10})^{100} \right]$ là một số nguyên.



Bài giải

c) Chứng minh $\sqrt{10} \left[(1 + \sqrt{10})^{100} - (1 - \sqrt{10})^{100} \right]$ là một số nguyên.

Sử dụng khai triển nhị thức Niu- tơn:

$$\begin{aligned} * (1 + \sqrt{10})^{100} &= C_{100}^0 \cdot 1^{100} + C_{100}^1 \cdot 1^{99} \cdot (\sqrt{10}) + C_{100}^2 \cdot 1^{98} \cdot (\sqrt{10})^2 + \dots + C_{100}^{99} \cdot 1^1 \cdot (\sqrt{10})^{99} + C_{100}^{100} \cdot (\sqrt{10})^{100} \\ &= C_{100}^0 + C_{100}^1 \cdot (\sqrt{10}) + C_{100}^2 \cdot (\sqrt{10})^2 + \dots + C_{100}^{99} \cdot (\sqrt{10})^{99} + C_{100}^{100} \cdot (\sqrt{10})^{100} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * (1 - \sqrt{10})^{100} &= C_{100}^0 \cdot 1^{100} + C_{100}^1 \cdot 1^{99} \cdot (-\sqrt{10}) + C_{100}^2 \cdot 1^{98} \cdot (-\sqrt{10})^2 + \dots + C_{100}^{99} \cdot 1 \cdot (-\sqrt{10})^{99} + C_{100}^{100} \cdot (-\sqrt{10})^{100} \\ &= C_{100}^0 - C_{100}^1 \cdot (\sqrt{10}) + C_{100}^2 \cdot (\sqrt{10})^2 - C_{100}^3 \cdot (\sqrt{10})^3 + \dots - C_{100}^{99} \cdot (\sqrt{10})^{99} + C_{100}^{100} \cdot (\sqrt{10})^{100} \end{aligned}$$

Bài 6/58

Chứng minh rằng:

a) $11^{10} - 1$ chia hết cho 100.

b) $101^{100} - 1$ chia hết cho 10000.

c) $\sqrt{10} \left[(1 + \sqrt{10})^{100} - (1 - \sqrt{10})^{100} \right]$ là một số nguyên.



Bài giải

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (1 + \sqrt{10})^{100} - (1 - \sqrt{10})^{100} \\ &= 2 \left[C_{100}^1 \cdot (\sqrt{10}) + C_{100}^3 \cdot (\sqrt{10})^3 + \dots + C_{100}^{97} \cdot (\sqrt{10})^{97} + C_{100}^{99} \cdot (\sqrt{10})^{99} \right] \\ &= 2 \cdot \sqrt{10} \left[C_{100}^1 + C_{100}^3 \cdot (\sqrt{10})^2 + \dots + C_{100}^{97} \cdot (\sqrt{10})^{96} + C_{100}^{99} \cdot (\sqrt{10})^{98} \right]. \end{aligned}$$

Đặt $A = C_{100}^1 + C_{100}^3 \cdot (\sqrt{10})^2 + \dots + C_{100}^{97} \cdot (\sqrt{10})^{96} + C_{100}^{99} \cdot (\sqrt{10})^{98}$

$$A = C_{100}^1 + C_{100}^3 \cdot 10 + \dots + C_{100}^{97} \cdot (10)^{48} + C_{100}^{99} \cdot (10)^{49}.$$

Ta thấy tất cả các số hạng của biểu thức A là số nguyên nên A là số nguyên.

Bài 6/58

Chứng minh rằng:

a) $11^{10} - 1$ chia hết cho 100.

b) $101^{100} - 1$ chia hết cho 10000.

c) $\sqrt{10} \left[(1 + \sqrt{10})^{100} - (1 - \sqrt{10})^{100} \right]$ là một số nguyên.



Bài giải

c) Chứng minh $\sqrt{10} \left[(1 + \sqrt{10})^{100} - (1 - \sqrt{10})^{100} \right]$ là một số nguyên.

Đặt $A = C_{100}^1 + C_{100}^3 \cdot (\sqrt{10})^2 + \dots + C_{100}^{97} \cdot (\sqrt{10})^{96} + C_{100}^{99} \cdot (\sqrt{10})^{98}$ thì A là số nguyên.

Ta có : $\sqrt{10} \left[(1 + \sqrt{10})^{100} - (1 - \sqrt{10})^{100} \right] = \sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10}A = 20A.$

Vậy $\sqrt{10} \left[(1 + \sqrt{10})^{100} - (1 - \sqrt{10})^{100} \right]$ là một số nguyên (đpcm).

B LUYỆN TẬP

II BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Viết khai triển theo công thức nhị thức Newton $(x - y)^5$.

A $x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5.$

B. $x^5 + 5x^4y - 10x^3y^2 + 10x^2y^3 - 5xy^4 + y^5.$

C. $x^5 - 5x^4y - 10x^3y^2 - 10x^2y^3 - 5xy^4 + y^5.$

D. $x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.$



Bài giải

Ta có $(x - y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5.$

Chọn A.



Câu 2

Trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $(3 - 2x)^{2021}$ có bao nhiêu số hạng?

A. 2019.

B. 2020.

C. 2022.

D. 2021.



Bài giải

Ta có: Khai triển nhị thức Niu-tơn $(a + b)^n$ có $n + 1$ số hạng.

Vậy trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $(3 - 2x)^{2021}$ có 2022 số hạng.

Chọn C.



Câu 3

Từ khai triển biểu thức $(x + 1)^{10}$ thành đa thức. Tổng các hệ số của đa thức là

A. 1023.

B. 512.

C 1024.

D. 2048.



Bài giải

Xét khai triển $f(x) = (x + 1)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot x^k$ với $0 \leq k \leq 10, k \in \mathbb{N}$.

Gọi S là tổng các hệ số trong khai triển thì ta có $S = f(1) = (1 + 1)^{10} = 2^{10} = 1024$.

Chọn C.

 Câu 4

Hệ số của x^2 trong khai triển của biểu thức $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^{10}$ bằng

A. 3124.

B. 2268.

C. 13440.

D. 210.



Bài giải

Số hạng tổng quát của khai triển:

$$T_{k+1} = C_{10}^k (x^2)^{10-k} \left(\frac{2}{x}\right)^k = C_{10}^k 2^k x^{20-3k} (0 \leq k \leq 10, k \in \mathbb{N}).$$

Số hạng chứa x^2 ứng với: $20 - 3k = 2 \Leftrightarrow k = 6$.

Hệ số cần tìm là: $2^6 C_{10}^6 = 13440$.

Chọn C.

Câu 5

Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x + \frac{2}{x}\right)^{10}$ là

A. C_{10}^5 .

B. $-C_{10}^5 \cdot 2^5$.

C. $-C_{10}^5$.

D. $C_{10}^5 \cdot 2^5$.


Bài giải

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x + \frac{2}{x}\right)^{10}$ là:

$$T_{k+1} = C_{10}^k x^{10-k} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^k = C_{10}^k \cdot 2^k x^{10-2k} \text{ với } 0 \leq k \leq 10, k \in \mathbb{N}$$

Số hạng không chứa x trong khai triển tương ứng với $10 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 5$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là: $C_{10}^5 \cdot 2^5$.

Chọn D.

 Câu 6

Cho n là số nguyên dương. Khi đó tổng $S = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$ là

A. 3^n .

B

2^n .

C. 1.

D. 0.



Bài giải

Xét: $(1 + x)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \dots + C_n^n x^0$.

Chọn $x = 1$ **ta được:** $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$.

Vậy $S = 2^n$.

Chọn B.

 Câu 7

Tìm số tự nhiên n , biết hệ số của số hạng thứ 3 theo số mũ giảm dần của x trong khai triển $\left(x - \frac{1}{3}\right)^n$ bằng 4.

A. 8.

B. 17.

C. 9.

D. 4.



Bài giải

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 \left(-\frac{1}{3}\right) x^{n-1} + C_n^2 \left(-\frac{1}{3}\right)^2 x^{n-2} + \dots + C_n^n \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

$\Rightarrow$ số hạng thứ 3 theo số mũ giảm dần của x là $C_n^2 \left(-\frac{1}{3}\right)^2 x^{n-2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow C_n^2 \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{1}{9} = 4 \Rightarrow n = 9$.

Do $n \in \mathbb{N}$ nên ta chọn $n = 9$ thỏa mãn.

Chọn C.

 Câu 8

Tính tổng $S = C_n^0 + 3C_n^1 + 3^2C_n^2 + \dots + 3^nC_n^n$.

A. $S = 3^n$.

B. $S = 2^n$.

C. $S = 3 \cdot 2^n$.

D. $S = 4^n$.



Bài giải

Khai triển nhị thức Niu-tơn của $(1 + x)^n$, ta có

$$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \dots + C_n^nx^n.$$

Cho $x = 3$, ta được $C_n^0 + 3C_n^1 + 3^2C_n^2 + \dots + 3^nC_n^n = (1 + 3)^n = 4^n$.

Chọn D.


Câu 9

Tìm hệ số của x^9 trong khai triển $(x + 1)^2(x - 2)^9$.

A. 99.

B. 100.

C. 110.

D. 109.


Bài giải

Áp dụng công thức khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có:

$$(x + 1)^2(x - 2)^9 = (x^2 + 2x + 1)(C_9^0 x^9 - 2C_9^1 x^8 + (-2)^2 C_9^2 x^7 - \dots + (-2)^9 C_9^9).$$

Hệ số của x^9 trong khai triển trên là: $C_9^0 - 2.2C_9^1 + 4C_9^2 = 109$.

Chọn D.

Câu 10

Khai triển đa thức $P(x) = (1 + 2x)^{12} = a_0 + a_1x + \dots + a_{12}x^{12}$. **Tìm hệ số** a_k ($0 \leq k \leq 12, k \in \mathbb{N}$) **lớn nhất trong khai triển trên**

A $C_{12}^8 2^8$.

B. $C_{12}^9 2^9$.

C. $C_{12}^{10} 2^{10}$.

D. $1 + C_{12}^8 2^8$.



Bài giải

Áp dụng khai triển nhị thức Niu-tơn ta có

$$(1 + 2x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (2x)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k 2^k x^k.$$

Suy ra $a_k = C_{12}^k 2^k$.

Hệ số a_k **lớn nhất khi** $\begin{cases} a_k \geq a_{k+1} \\ a_k \geq a_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k C_{12}^k \geq 2^{k+1} C_{12}^{k+1} \\ 2^k C_{12}^k \geq 2^{k-1} C_{12}^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{12-k} \geq \frac{2}{k+1} \\ \frac{2}{k} \geq \frac{1}{12-k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{23}{3} \leq k \leq \frac{26}{3}.$

$\xrightarrow{0 \leq k \leq 12, k \in \mathbb{N}} k = 8$. **Vậy hệ số lớn nhất là** $a_8 = C_{12}^8 2^8$.

Chọn A.



TÓM TẮT BÀI HỌC

KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NIU_TƠN

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n \quad (1).$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k \quad (2).$$

HỆ QUẢ

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$$

$$C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$$

SỐ HẠNG TỔNG QUAT TRONG KT

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k \text{ với } 0 \leq k \leq n$$

đó là số hạng đứng hàng thứ $k + 1$ trong khai triển;