



ĐẠI SỐ LỚP
11

Chương 1: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Bài 2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

I KIẾN THỨC CƠ BẢN

1 Phương trình $\sin x = a$

2 Phương trình $\cos x = a$

3 Phương trình $\tan x = a$

4 Phương trình $\cot x = a$

II GIẢI BÀI TẬP

III SGK BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I KIẾN THỨC CƠ BẢN

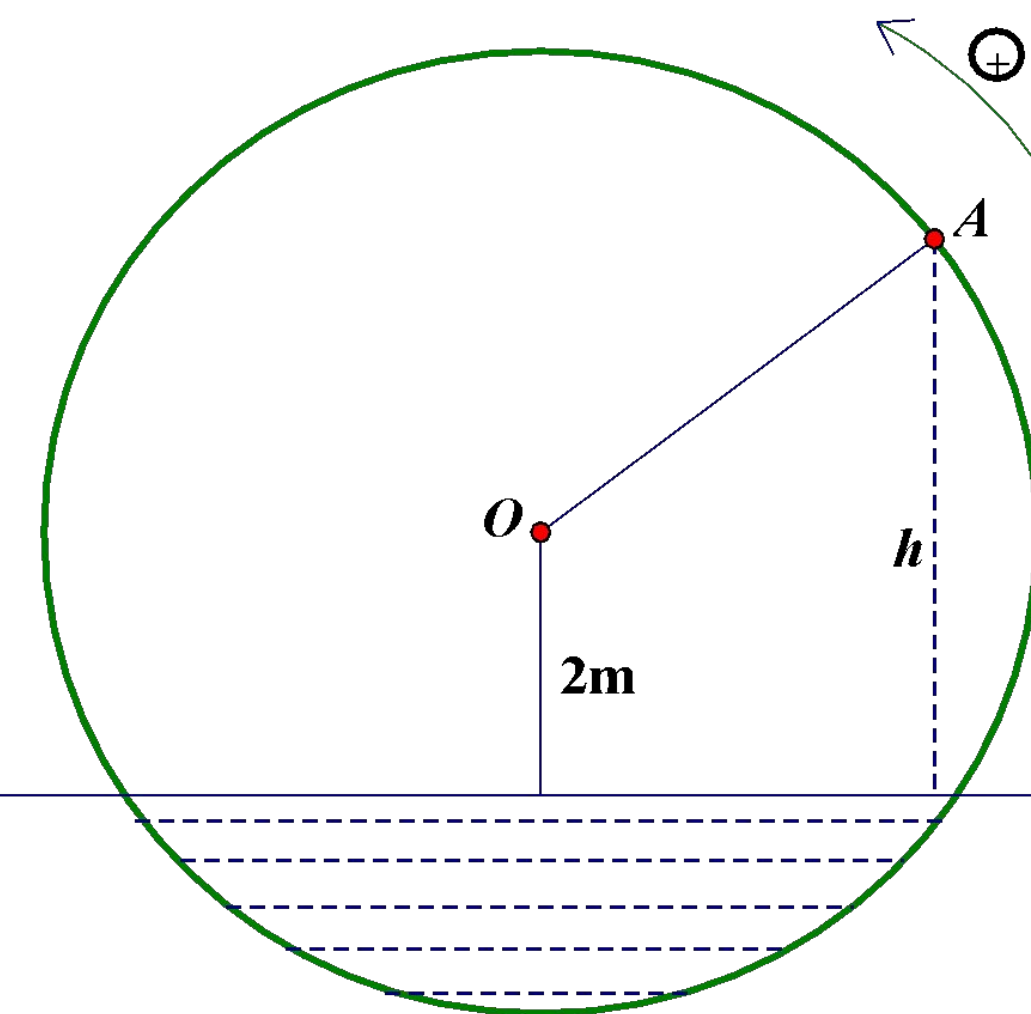
Bài toán:

Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5m, trục của nó đặt cách mặt nước 2m. Khi guồng quay đều, khoảng cách h (mét) từ một chiếc gầu gắn tại điểm A của guồng đến mặt nước được tính theo công thức $h = |y|$,

trong đó: $y = 2 + 2,5\sin\left(2\pi\left(t - \frac{1}{4}\right)\right)$ với t là thời gian quay của guồng ($t \geq 0$) tính bằng phút; ta quy ước rằng $y > 0$ khi gầu ở bên trên mặt nước và $y < 0$ khi gầu ở dưới nước. Hỏi:

a) Khi nào gầu nước ở vị trí thấp nhất?

b) Chiếc gầu cách mặt nước 3,5m lần đầu tiên khi nào?



Bài toán này dẫn đến việc giải phương trình:

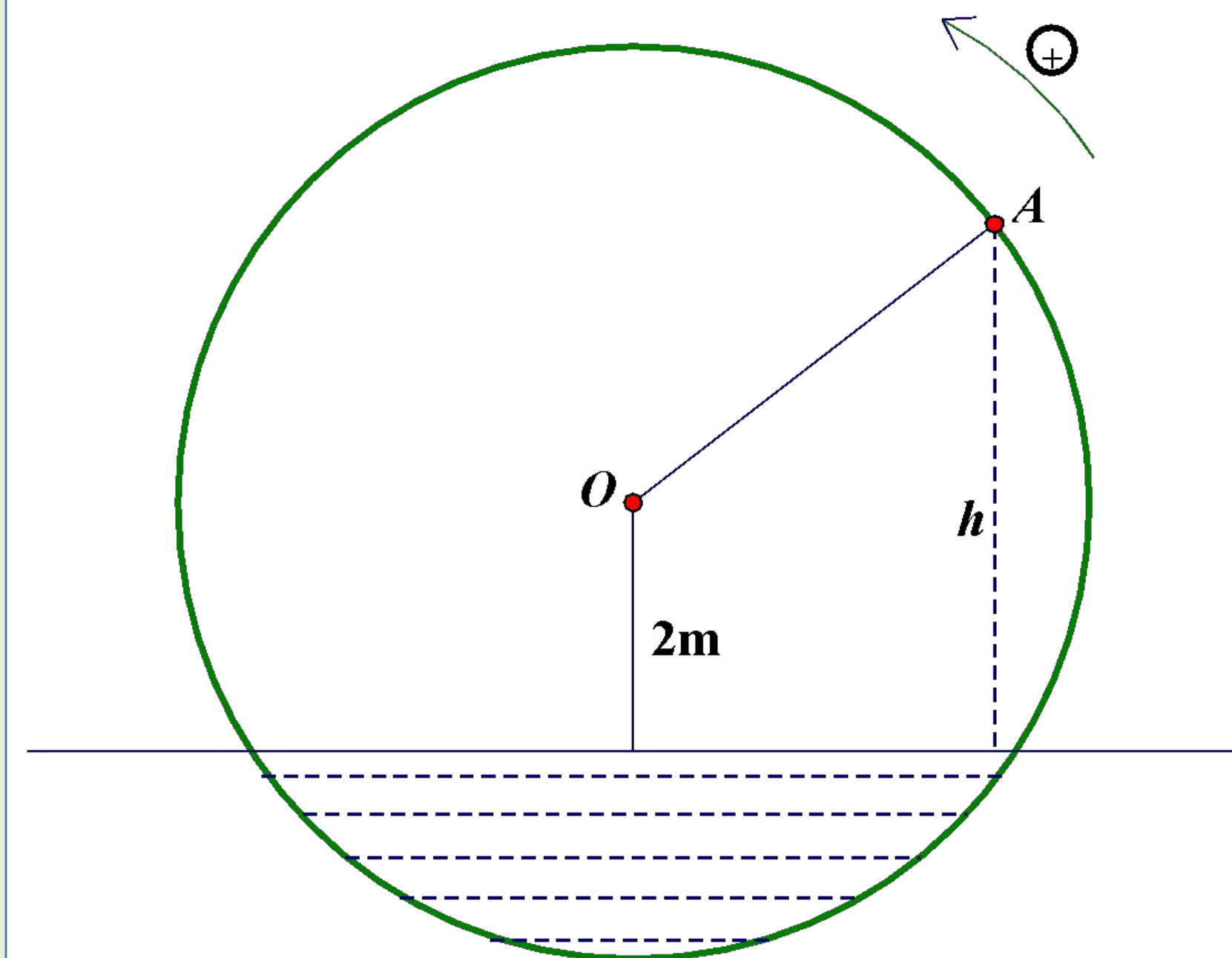
$$\sin \left(2\pi \left(t - \frac{1}{4} \right) \right) = -1 \quad (\text{a})$$

$$\sin \left(2\pi \left(t - \frac{1}{4} \right) \right) = \frac{3}{5} \quad (\text{b})$$

Nếu đặt $x = 2\pi \left(t - \frac{1}{4} \right)$ thì các phương trình trên có dạng $\sin x = -1$ và $\sin x = \frac{3}{5}$.

Trên thực tế có nhiều bài toán dẫn đến việc giải phương trình có một trong các dạng $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\tan x = a$, $\cot x = a$.

Đó là các **phương trình lượng giác cơ bản**.



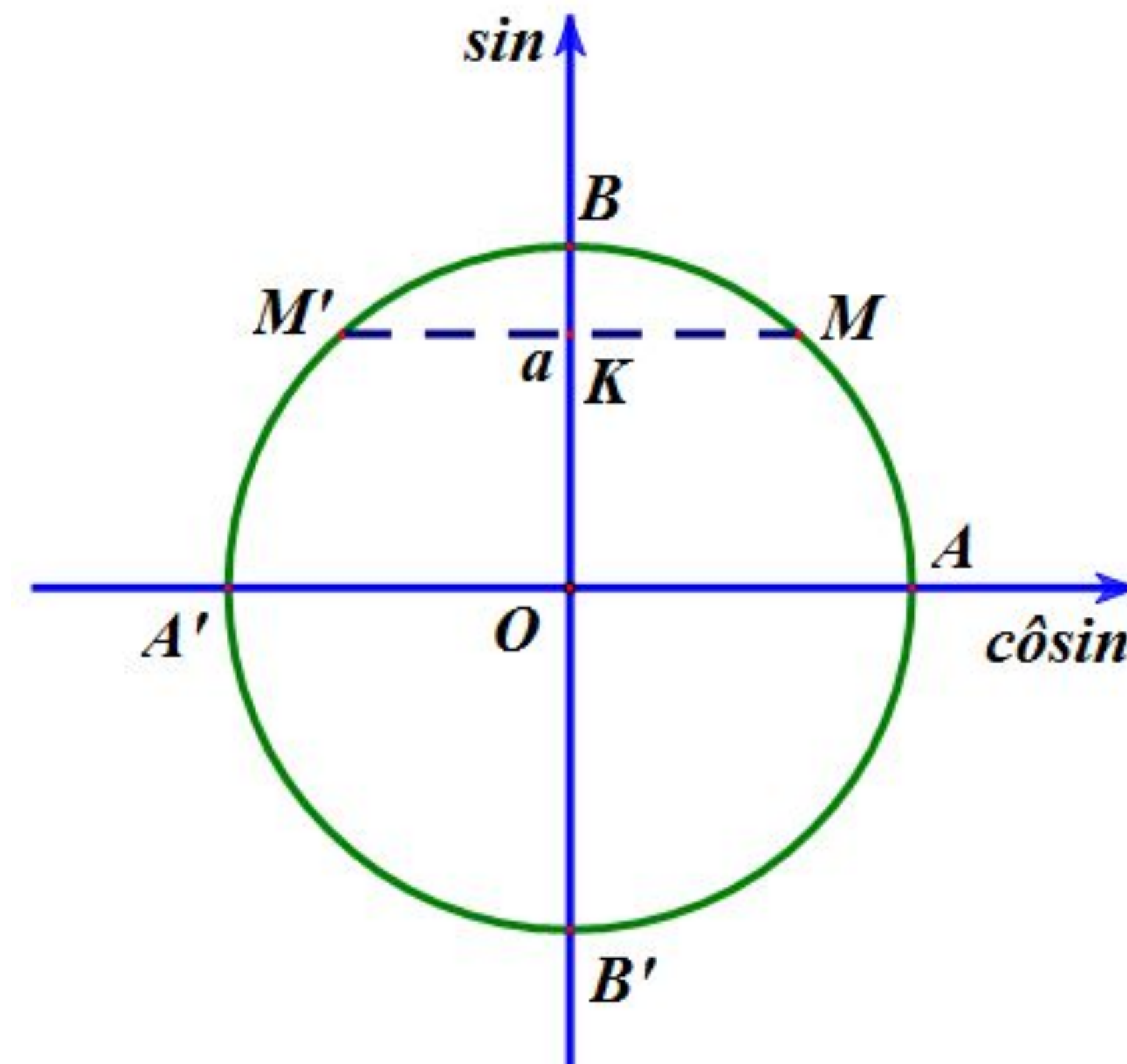
1 PHƯƠNG TRÌNH $\sin x = a$ (1)

+ Trường hợp 1: $|a| > 1$ thì (1) vô nghiệm.

+ Trường hợp 2: $|a| \leq 1$

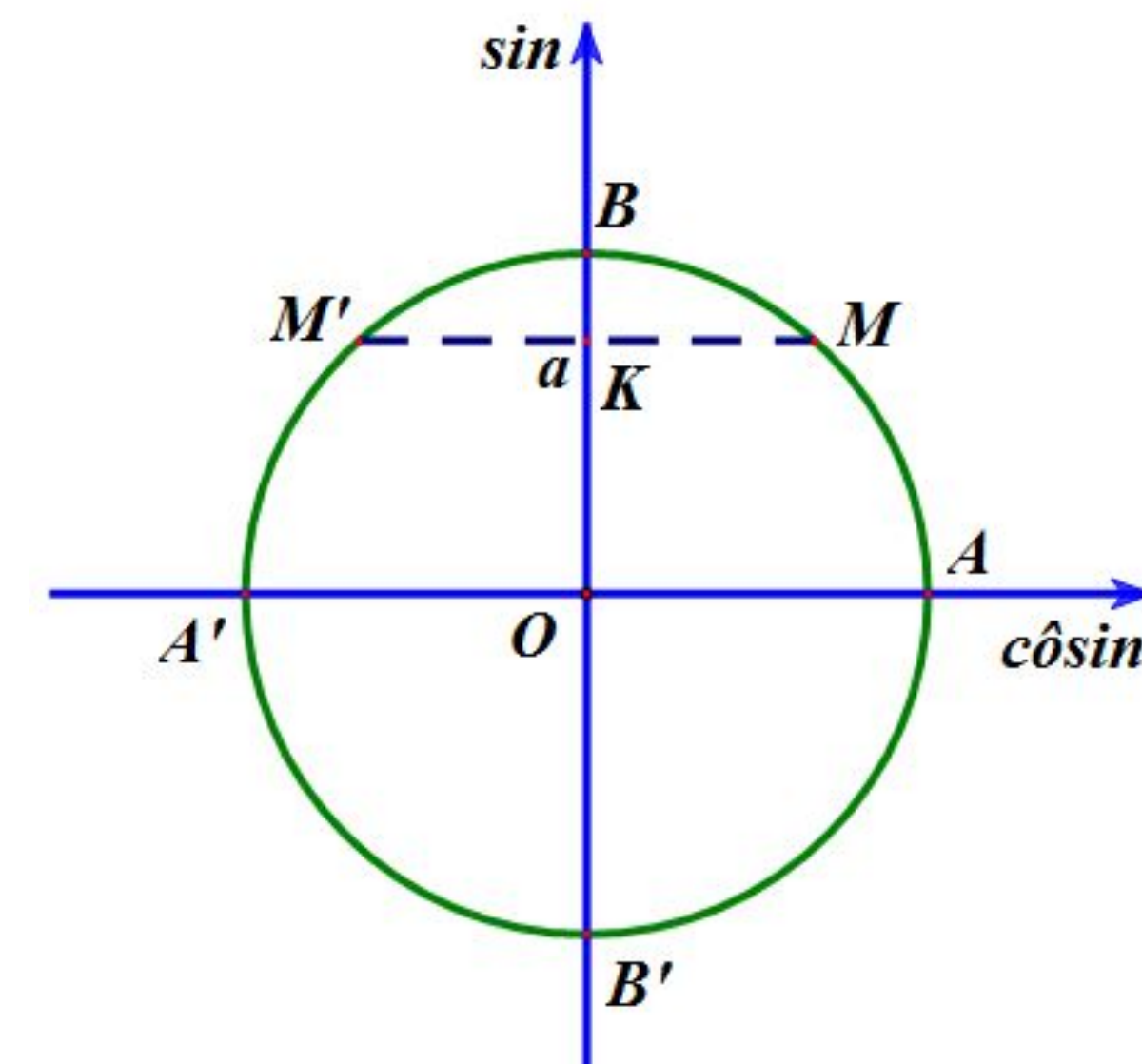
Vẽ đường tròn lượng giác tâm O , trục hoành là trục côsin, trục tung là trục sin. Trên trục sin lấy điểm K : $\overline{OK} = a$. Từ K kẻ đường thẳng vuông góc trục sin, cắt đường tròn lượng giác tại hai điểm M và M' .

Khi đó số đo các cung lượng giác $\widehat{AM}$ và $\widehat{AM'}$ là tất cả các nghiệm của phương trình $\sin x = a$.



THẢO LUẬN NHÓM

	NHÓM 1	NHÓM 2
Nhiệm vụ	Gọi α là số bằng rad của một cung lượng giác $\widehat{AM}$. Khi đó: số $\widehat{AM} = ?$	Gọi α là số bằng rad của một cung lượng giác $\widehat{AM'}$. Khi đó: số $\widehat{AM'} = ?$

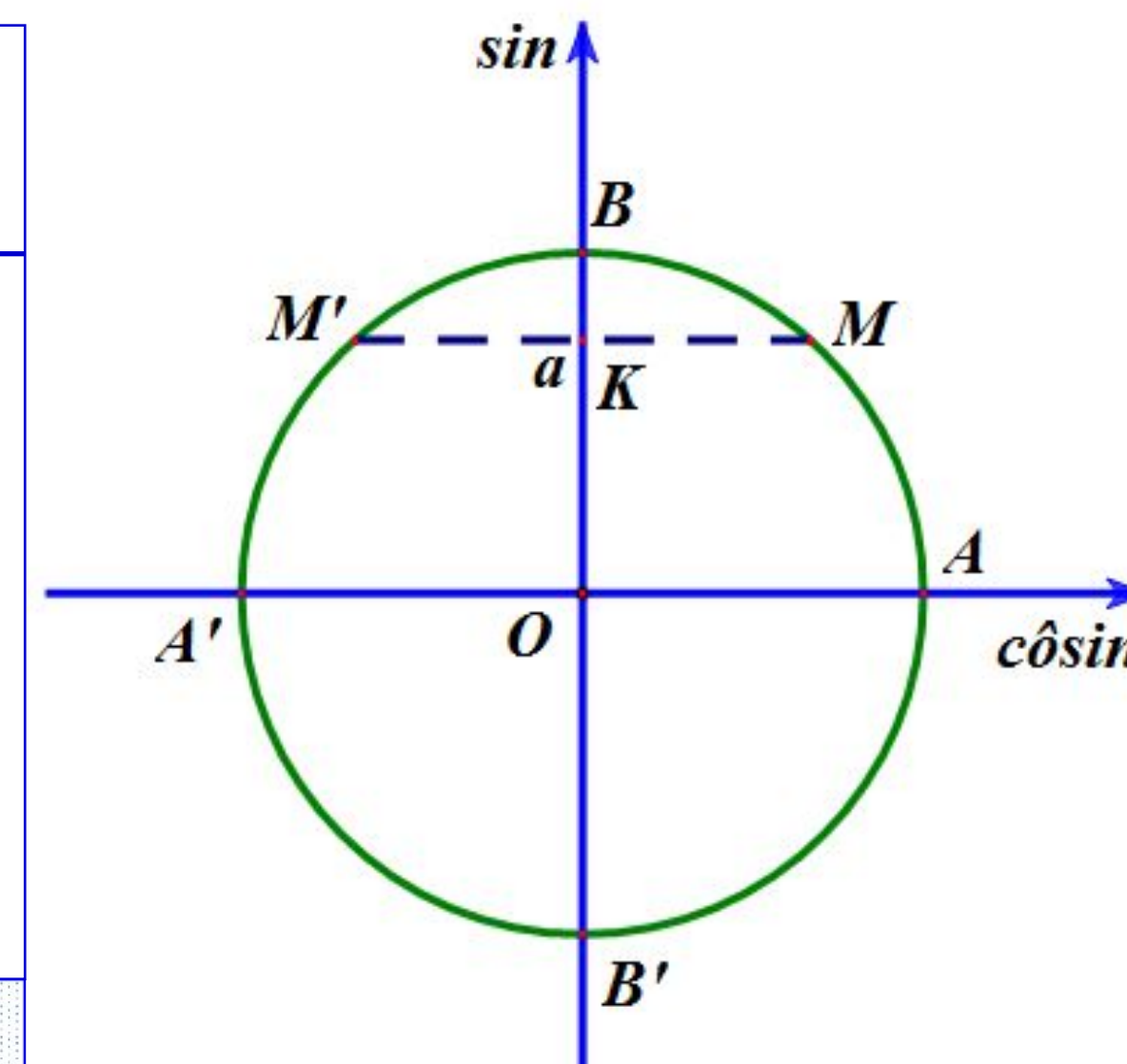


Phương thức hoạt động

- Chia lớp thành các nhóm nhỏ, mỗi nhóm gồm 6 học sinh.
- Mỗi nhóm cử 1 bạn nhóm trưởng để điều hành nhóm thảo luận.
- Các nhóm trao đổi, thảo luận viết kết quả chung vào giấy.
- 2 nhóm báo cáo kết quả. Các nhóm khác nhận xét.

THẢO LUẬN NHÓM

	NHÓM 1	NHÓM 2
Nhiệm vụ	Gọi α là số bằng rad của một cung lượng giác $\overset{\frown}{AM}$. Khi đó: $sđ\overset{\frown}{AM} = ?$	Gọi α là số bằng rad của một cung lượng giác $\overset{\frown}{AM'}$. Khi đó: $sđ\overset{\frown}{AM'} = ?$
Kết quả	$sđ\overset{\frown}{AM} = \alpha + k2\pi$	$sđ\overset{\frown}{AM'} = \pi - \alpha + k2\pi$



??? Từ đó hãy nêu các nghiệm của phương trình $\sin x = a$?

$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(Trong đó α thỏa mãn $\sin \alpha = a$)

Chú ý

$$\text{a) } \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Tổng quát: } \sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{b) } \sin x = \sin \beta^0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^0 + k360^0 \\ x = 180^0 - \beta^0 + k360^0 \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Trong một công thức nghiệm không dùng đồng thời 2 đơn vị đo.

Các trường hợp đặc biệt

- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$
- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$
- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

Ví dụ 1 Giải các phương trình sau

a) $\sin x = \frac{1}{2}$

b) $\sin x = \frac{2}{5}$

c) $\sin(x + 15^\circ) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

d) $\sin x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

Bài giải

$$a) \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \sin x = \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin \frac{2}{5} + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin \frac{2}{5} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 1 Giải các phương trình sau

a) $\sin x = \frac{1}{2}$

b) $\sin x = \frac{2}{5}$

c) $\sin(x + 15^\circ) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

d) $\sin x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

Bài giải

$$c) \sin(x + 15^\circ) = \frac{-\sqrt{3}}{2} = \sin(-60^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 15^\circ = -60^\circ + k360^\circ \\ x + 15^\circ = 180^\circ + 60^\circ + k360^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -75^\circ + k360^\circ \\ x = 225^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$d) \sin x = \frac{-\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{4} + k2\pi \\ x = \pi + \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

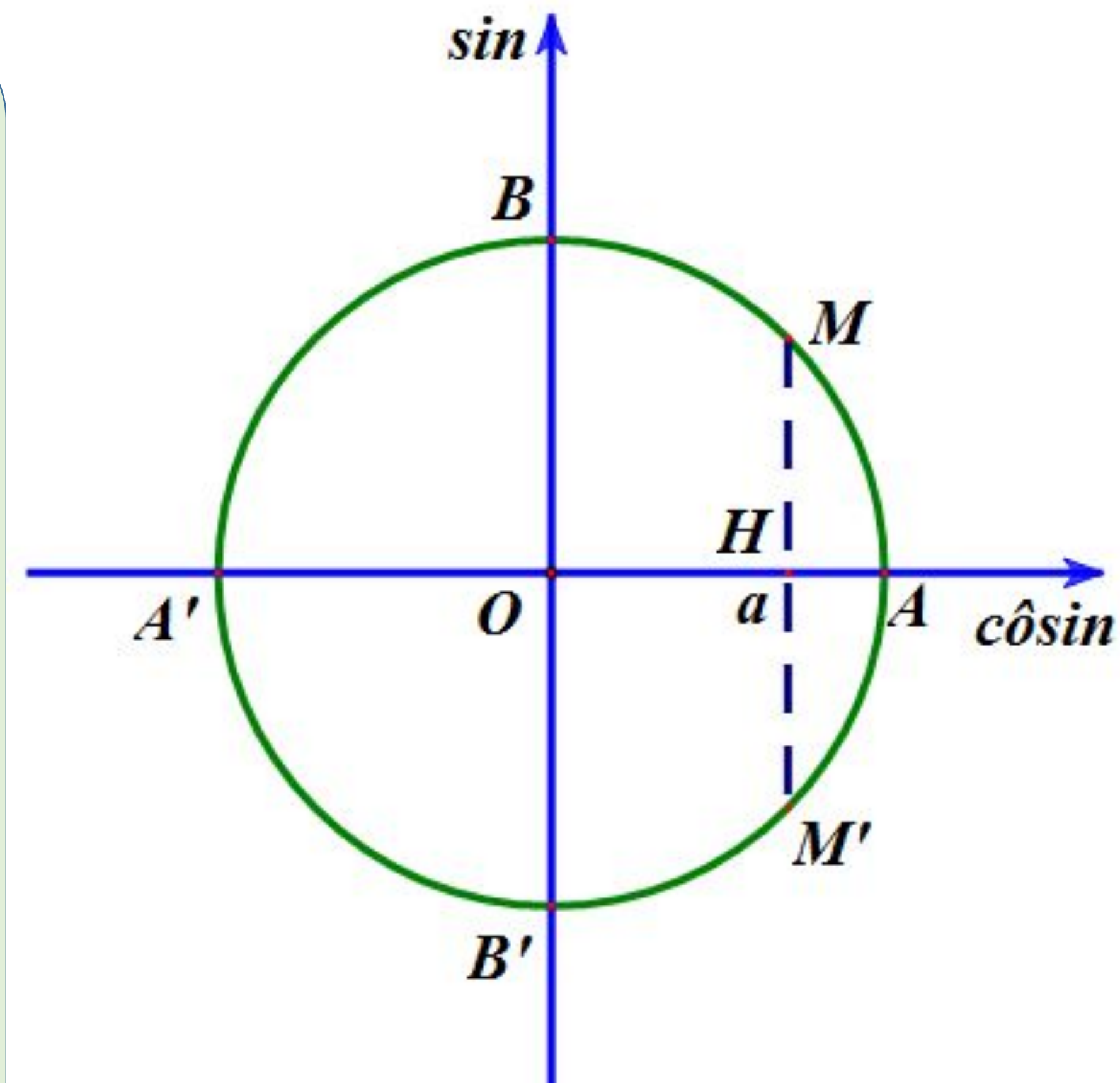
2 PHƯƠNG TRÌNH $\cos x = a$ (2)

+ Trường hợp 1: $|a| > 1$ thì (2) vô nghiệm.

+ Trường hợp 2: $|a| \leq 1$

Cho đường tròn lượng giác tâm O , trên trục côsin lấy điểm H : $\overline{OH} = a$. Từ H kẻ đường vuông góc với trục côsin cắt đường tròn lượng giác tại hai điểm M và M' đối xứng nhau qua trục côsin.

Khi đó số đo các cung lượng giác $\widehat{AM}$ và $\widehat{AM'}$ là tất cả các nghiệm của phương trình $\cos x = a$.

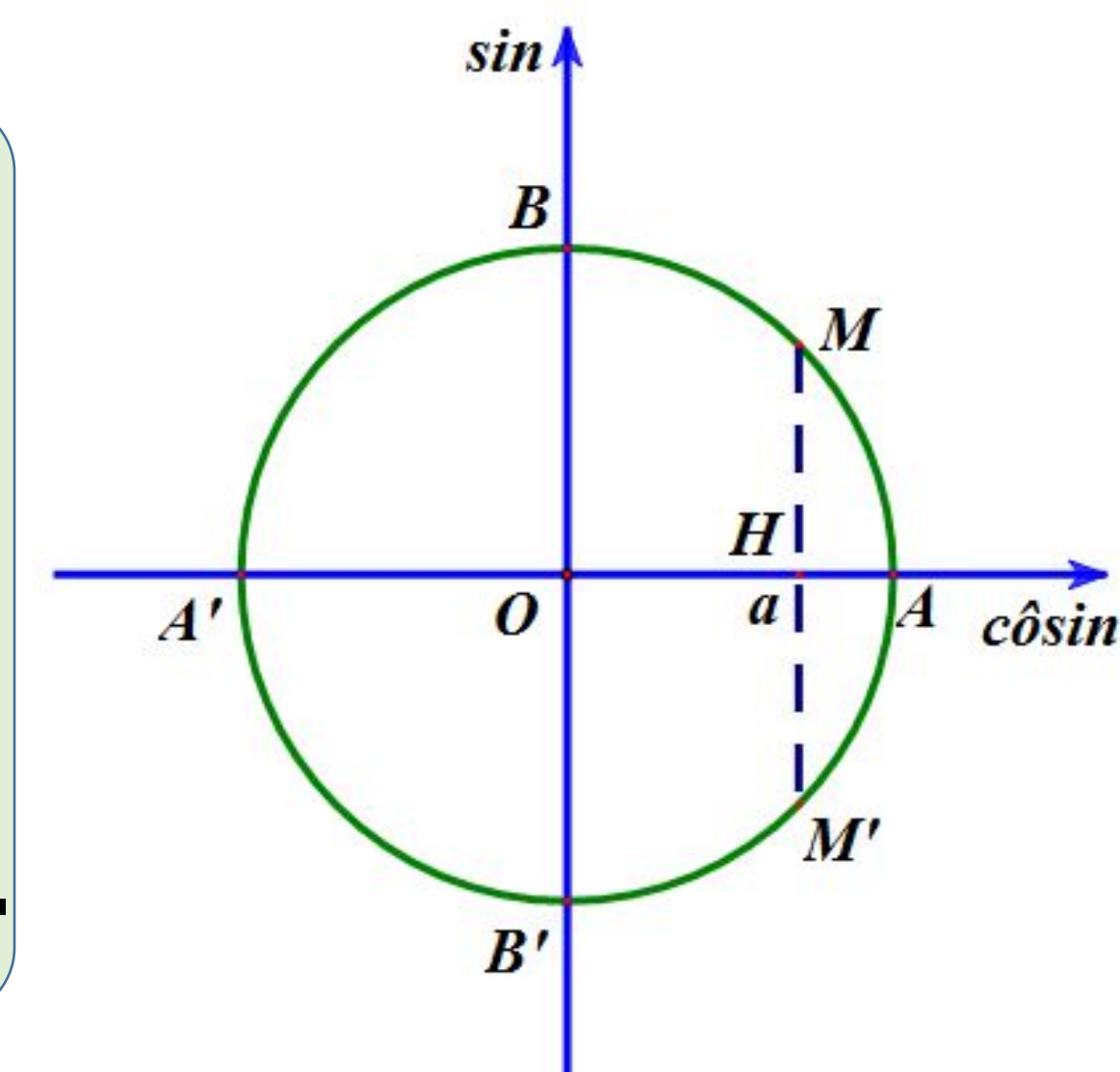


THẢO LUẬN NHÓM

	NHÓM 1	NHÓM 2	NHÓM 3
Nhiệm vụ	Gọi α là số bằng rad của một cung lượng giác $\overset{\sim}{AM}$ Khi đó : $\overset{\sim}{sđAM} = ? \quad \overset{\sim}{sđAM'} = ?$	Phương trình (2) có nghiệm là gì?	Nếu số thực α thỏa mãn điều kiện $0 \leq \alpha \leq \pi$ và $\cos \alpha = a$ thì ta viết $\alpha = \arccos a$ Khi đó nghiệm phương trình viết thể nào?

Phương thức hoạt động

- Chia lớp thành các nhóm nhỏ, mỗi nhóm gồm 6 học sinh.
- Mỗi nhóm cử 1 bạn nhóm trưởng để điều hành nhóm thảo luận.
- Các nhóm trao đổi, thảo luận viết kết quả chung vào giấy.
- Các nhóm 1,2,3 lần lượt báo cáo kết quả. Các nhóm khác nhận xét.



THẢO LUẬN NHÓM

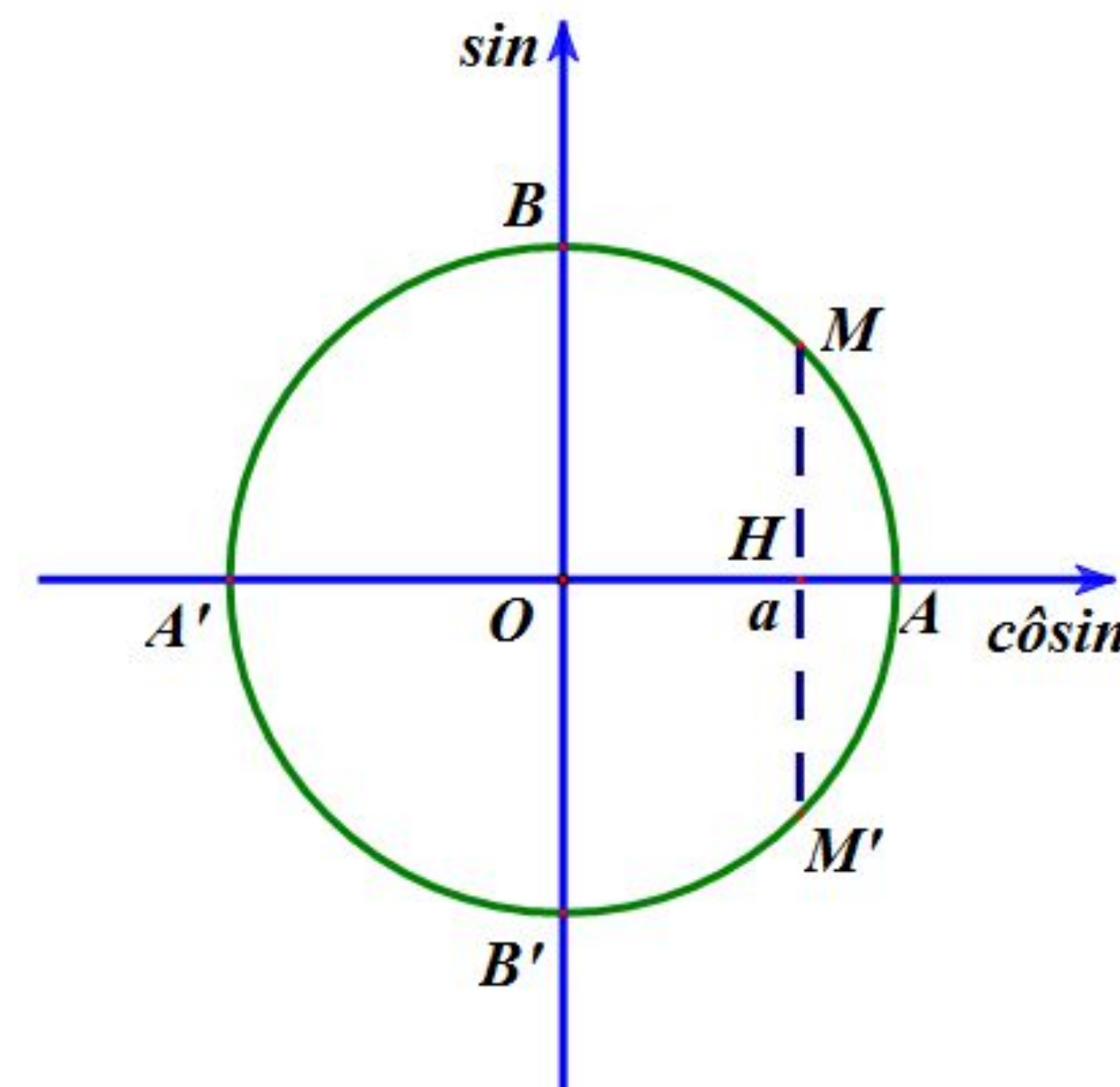
	NHÓM 1	NHÓM 2	NHÓM 3
Kết quả	$\begin{aligned} \text{Sđ } \widehat{AM} &= \alpha + k2\pi \\ \text{Sđ } \widehat{AM'} &= -\alpha + k2\pi \end{aligned}$	$\begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$	$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

+ Nghiệm của phương trình $\cos x = a$

$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (\text{Với } \alpha \text{ thỏa mãn } \cos \alpha = a)$$

+ Nếu số thực α thỏa mãn điều kiện $0 \leq \alpha \leq \pi$ và $\cos \alpha = a$ thì ta viết $\alpha = \arccos a$. Khi đó:

$$\cos \alpha = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



Chú ý

$$\text{a) } \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Tổng quát: } \cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{b) } \cos x = \cos \beta^0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^0 + k360^0 \\ x = -\beta^0 + k360^0 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Trong một công thức nghiệm **không dùng đồng thời 2 đơn vị đo.**

d) Các trường hợp đặc biệt

- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Ví dụ 2 Giải các phương trình sau

$$a) \cos \left(x + \frac{3\pi}{8} \right) = \frac{-3}{2}$$

$$b) \cos(2x + 5^0) = \frac{-1}{2}$$

$$c) \cos 3x = \frac{4}{5}$$

$$d) \cos 2x = \cos \frac{\pi}{10}$$

Bài giải

$$a) \cos \left(x + \frac{3\pi}{8} \right) = \frac{-3}{2}$$

Phương trình vô nghiệm vì $\frac{-3}{2} \notin [-1; 1]$

$$b) \cos(2x + 5^0) = \frac{-1}{2} = \cos 120^0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5^0 = 120^0 + k360^0 \\ 2x + 5^0 = -120^0 + k360^0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{115^0}{2} + k180^0 \\ x = \frac{-125^0}{2} + k180^0 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

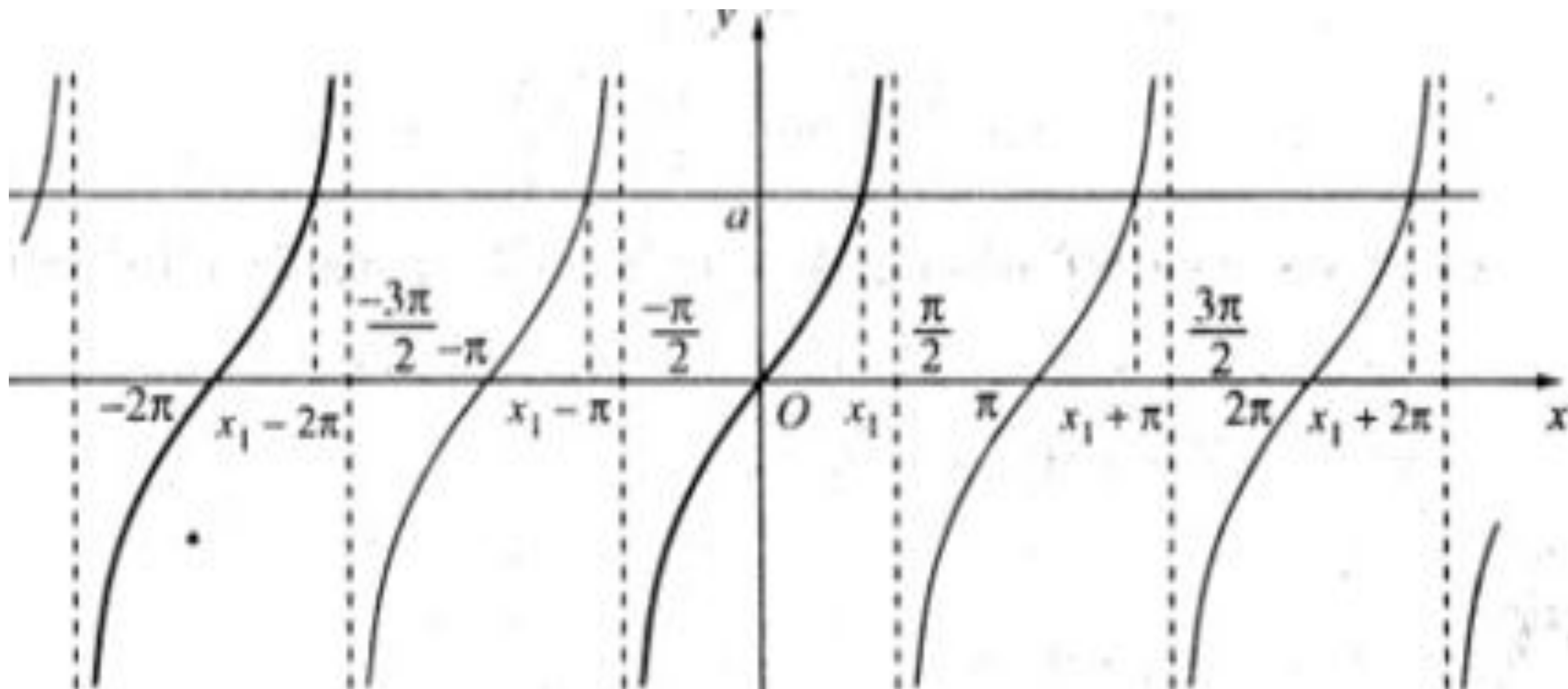
$$c) \cos 3x = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 3x = \pm \arccos \frac{4}{5} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{3} \arccos \frac{4}{5} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$d) \cos 2x = \cos \frac{\pi}{10} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{10} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{20} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = \tan x$, $y = a$. Có nhận xét gì về mối quan hệ của các hoành độ giao điểm của hai đồ thị đó



Các hoành độ giao điểm của hai đồ thị
sai khác nhau một bội số của π

Hoành độ của
mỗi giao điểm là
một nghiệm của
phương trình
 $\tan x = a$. Khi đó
nghiệm của
phương trình
 $\tan x = a$ là:
 $x = x_1 + k\pi$
($k \in \mathbb{Z}$)

3 PHƯƠNG TRÌNH $\sin x = a$ (1)

+ Điều kiện của phương trình: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

+ Gọi x_1 là hoành độ giao điểm ($\tan x_1 = a$) thỏa mãn điều kiện $-\frac{\pi}{2} < x_1 < \frac{\pi}{2}$.

Kí hiệu: $x_1 = \arctan a$. đó, nghiệm của pt là: $x = \arctan a + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Chú ý

a) $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Tổng quát: $\tan f(x) = \tan g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

b) $\tan x = \tan \beta^0 \Leftrightarrow x = \beta^0 + k180^0 (k \in \mathbb{Z})$.

c) Trong một công thức nghiệm **không dùng đồng thời 2 đơn vị đo**.

Các trường hợp đặc biệt

- $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
- $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
- $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 3

Giải các phương trình sau

$$a) \tan x = \tan \frac{2\pi}{5}$$

$$b) \tan x = -5$$

$$c) \tan(x - 35^\circ) = \sqrt{3}$$

$$d) \tan 4x = -1$$



Bài giải

$$a) \tan x = \tan \frac{2\pi}{5} \quad (1) \quad (\text{Đk: } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi).$$

$$\text{PT (1)} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (TM)$$

$$b) \tan x = -5 \quad (2) \quad (\text{Điều kiện: } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi).$$

$$\text{PT (2)} \Leftrightarrow x = \arctan(-5) + k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (TM)$$

$$c) \tan(x - 35^\circ) = \sqrt{3} \quad (3)$$

$$(\text{Đk: } x \neq 125^\circ + k180^\circ).$$

$$\text{PT (3)} \Leftrightarrow x - 35^\circ = 60^\circ + k180^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = 95^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z} \quad (TM)$$

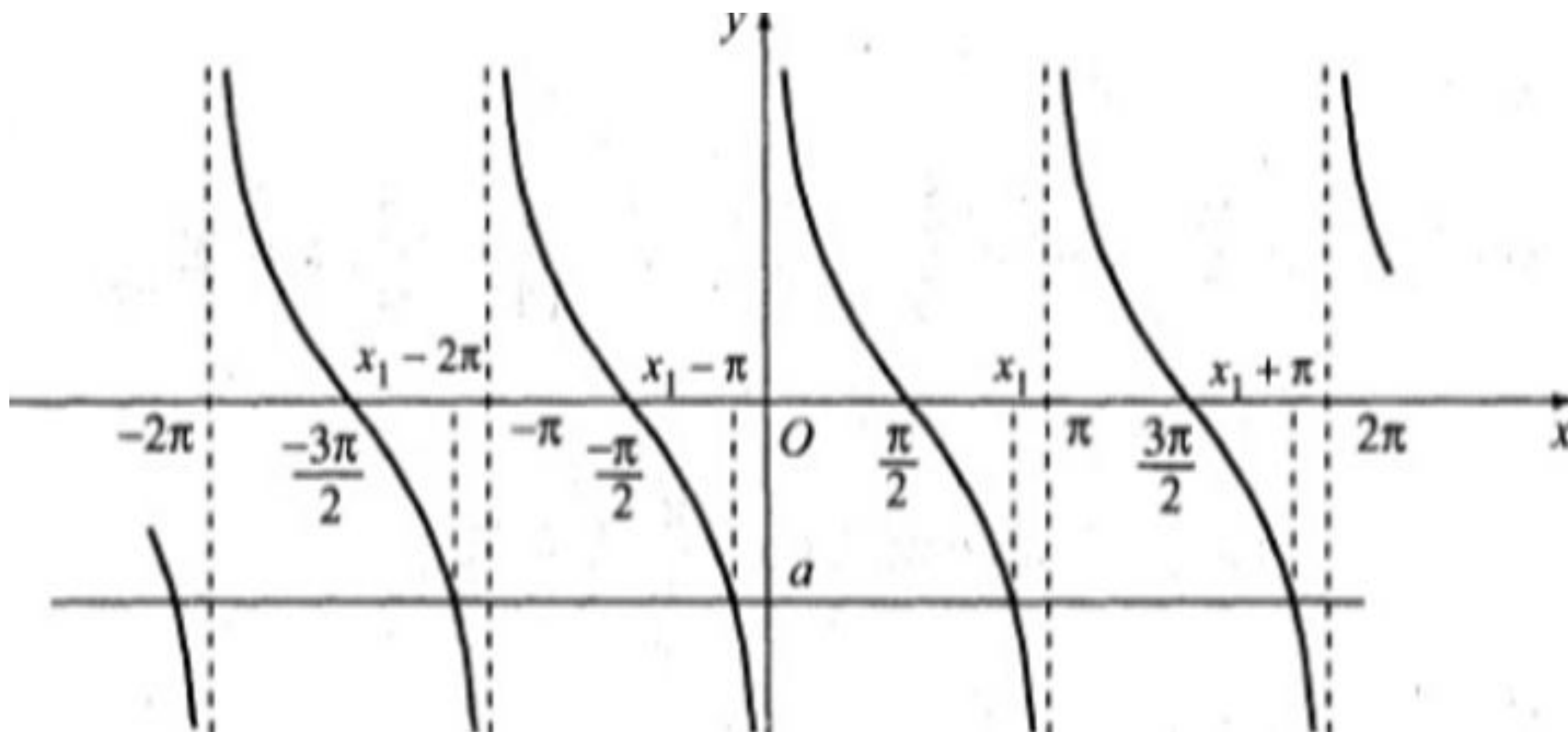
$$d) \tan 4x = -1 \quad (4)$$

$$(\text{Đk: } x \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}).$$

$$\text{PT (4)} \Leftrightarrow 4x = \frac{-\pi}{4} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \quad (TM)$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = \cot x$, $y = a$. Có nhận xét gì về mối quan hệ của các hoành độ giao điểm của hai đồ thị đó



Hoành độ của mỗi giao điểm là một nghiệm của phương trình

$\cot x = a$. Khi đó nghiệm của phương trình $\cot x = a$ là:
 $x = x_1 + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Các hoành độ giao điểm của hai đồ thị sai khác nhau một bội số của π

4 PHƯƠNG TRÌNH $\sin x = a$ (1)

+ Điều kiện của phương trình: $x \neq k\pi$.

+ Gọi x_1 là hoành độ giao điểm ($\cot x_1 = a$) thỏa mãn điều kiện $0 < x_1 < \pi$.

Kí hiệu: $x_1 = \operatorname{arccot} a$. Khi đó, nghiệm của phương trình là : $x = \operatorname{arccot} a + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Chú ý

a) $\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Tổng quát: $\cot f(x) = \cot g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

b) $\cot x = \cot \beta^0 \Leftrightarrow x = \beta^0 + k180^0 (k \in \mathbb{Z})$.

c) Trong một công thức nghiệm không dùng đồng thời 2 đơn vị đo.

Các trường hợp đặc biệt

- $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$
- $\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$
- $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 4 Giải các phương trình sau

$$a) \cot x = \cot \frac{\pi}{5} \quad b) \cot(x + 5^0) = \frac{-1}{\sqrt{3}} \quad c) \cot\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = -1 \quad d) \cot 2x = 7$$

Bài giải

$$a) \cot x = \cot \frac{\pi}{5} \quad (\text{Đk: } x \neq k\pi).$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{5} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ (TM)}$$

$$b) \cot(x + 5^0) = \frac{-1}{\sqrt{3}} \quad (\text{Đk: } x \neq -5^0 + k180^0).$$

$$\Leftrightarrow x + 5^0 = -60^0 + k180^0$$

$$\Leftrightarrow x = -65^0 + k180^0, k \in \mathbb{Z} \text{ (TM)}$$

$$c) \cot\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = -1 \quad (\text{Đk: } x \neq \frac{\pi}{8} - \frac{k\pi}{2}).$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - 2x = \frac{-\pi}{4} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ (TM)}$$

$$d) \cot 2x = 7 \quad (\text{Đk: } x \neq \frac{k\pi}{2}).$$

$$\Leftrightarrow 2x = \operatorname{arccot} 7 + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \operatorname{arccot} 7 + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \text{ (TM)}$$

BÀI TẬP SGK

Bài 1/T28

Giải các phương trình sau: a) $\sin(x + 2) = \frac{1}{3}$. b) $\sin(2x + 20^\circ) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.



Bài giải

a) $\sin(x + 2) = \frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = \arcsin \frac{1}{3} + k \\ x + 2 = \pi - \arcsin \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + \arcsin \frac{1}{3} + k2\pi \\ x = \pi - 2 - \arcsin \frac{1}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có tập các họ nghiệm

$$\left\{ -2 + \arcsin \frac{1}{3} + k2\pi; \pi - 2 - \arcsin \frac{1}{3} + k2\pi \right\} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) $\sin(2x + 20^\circ) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin(2x + 20^\circ) = \sin(-60^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 20^\circ = -60^\circ + \\ 2x + 20^\circ = 240^\circ + \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -40^\circ + k180^\circ \\ x = 110^\circ + k180^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có tập các họ nghiệm
 $\{-40^\circ + k180^\circ; 110^\circ + k180^\circ\}, (k \in \mathbb{Z}).$

Bài 2/T28

Giải các phương trình sau:

a) $\cos(x - 1) = \frac{2}{3}$

b) $\cos 3x = \cos 12^\circ$

c) $\cos^2 2x = \frac{1}{4}$



Bài giải

a) $\cos(x - 1) = \frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \arccos \frac{2}{3} + k2\pi \\ x - 1 = -\arccos \frac{2}{3} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \arccos \frac{2}{3} + k2\pi \\ x = 1 - \arccos \frac{2}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy PT đã cho có tập nghiệm $\left\{ 1 + \arccos \frac{2}{3} + k2\pi; 1 - \arccos \frac{2}{3} + k2\pi \right\}, (k \in \mathbb{Z}).$

b) $\cos 3x = \cos 12^\circ$

$$\Leftrightarrow 3x = \pm 12^\circ + k.360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 4^\circ + k.120^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có họ nghiệm

$$x = \pm 4^\circ + k.120^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

Bài 3/T28

Giải các phương trình sau:

a) $\cos(x - 1) = \frac{2}{3}$

b) $\cos 3x = \cos 12^0$

c) $\cos^2 2x = \frac{1}{4}$



Bài giải

d) $\cos^2 2x = \frac{1}{4}$ $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} = \cos 2x \\ \frac{1}{2} = -\cos 2x \end{array} \right] \Leftrightarrow$

Với: $\cos 2x = \frac{1}{2}$
 $\Leftrightarrow \cos 2x = \cos \frac{\pi}{3}$
 $\Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$
 $\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Với: $\cos 2x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Vậy phương trình có tập các họ nghiệm

$\left\{ \pm \frac{\pi}{6} + k\pi; \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \right\} (k \in \mathbb{Z}).$

 Bài 4/T28

Giải phương trình $\frac{2 \cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0$



Bài giải

+ Điều kiện: $\sin 2x \neq 1$

Ta có $\frac{2 \cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0$

$$\Leftrightarrow 2 \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

+ Xét k lẻ. Đặt $k = 2n + 1 (n \in \mathbb{Z})$.

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{(2n + 1)\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} + n\pi$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \sin \left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi \right) = -1 (tmdk)$$

+ Xét k chẵn. Đặt $k = 2n (n \in \mathbb{Z})$.

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{2n\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + n\pi$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) = 1 (ktmdk)$$

Vậy phương trình có 1 họ nghiệm $\frac{3\pi}{4} + n\pi (n \in \mathbb{Z})$.

Bài 1/T29

Giải các phương trình sau:

a. $\sin 3x - \cos 5x = 0.$ **b.** $\tan 3x \cdot \tan x = 1.$

Bài giải

a) $\sin 3x - \cos 5x = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 5x = \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \cos 5x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 3x \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} - 3x + k2\pi \\ 5x = -\frac{\pi}{2} + 3x + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm $\left\{ \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}; -\frac{\pi}{4} + k\pi \right\} (k \in \mathbb{Z})$

 Bài 7/T29

Giải các phương trình sau:

a. $\sin 3x - \cos 5x = 0;$

b. $\tan 3x \cdot \tan x = 1.$



Bài giải

b. $\tan 3x \cdot \tan x = 1$

(Điều kiện: $3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$)

$$\tan 3x \cdot \tan x = 1 \Leftrightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\Leftrightarrow \tan 3x = \cot x$$

$$\Leftrightarrow \tan 3x = \tan \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\pi k + x - \frac{\pi}{2} = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$$

Các nghiệm thuộc họ nghiệm trên đều thỏa mãn điều kiện.

Vậy phương trình có họ nghiệm

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$$



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

 Câu 1.

Giải phương trình sau: $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

A. $x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

B. $x = \frac{2\pi}{3} - \frac{k3\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$

C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

D $x = \frac{\pi}{2} - \frac{k3\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$



Bài giải

Ta có: $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3} = k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{k3\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

Chọn D.

 Câu 2.

Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\sin x = m$ có nghiệm.

A. $m \neq 1$.

B. $m \neq -1$.

C $-1 \leq m \leq 1$.

D. $m > 1$.



Bài giải

$\sin x = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow |m| \leq 1$

$\Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$.

Chọn C.

 Câu 3.

Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\cos x - m = 0$ có nghiệm.

A. $m \in (-\infty, -1]$. **B.** $m \in (1, +\infty]$. **C.** $m \in [-1, 1]$. **D.** $m \neq -1$.



Bài giải

Để phương trình $\cos x - m = 0$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \cos x = m$ có nghiệm

$\Leftrightarrow m \in [-1, 1]$.

Chọn C.

 Câu 4.

Số nghiệm của phương trình $\sin(2x - 40^\circ) = 1$ với $-180^\circ < x < 180^\circ$ là

A. 1.

B 2.

C. 3.

D. 4.



Bài giải

$$\text{Ta có: } \sin(2x - 40^\circ) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x - 40^\circ = 90^\circ + k360^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = 65^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Vì } -180^\circ < x < 180^\circ \Rightarrow x = 65^\circ (k = 0), x = -115^\circ (k = -1).$$

Chọn B.

Câu 5.

Gọi a là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\frac{2\cos 2x}{1-\sin 2x} = 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$. **B.** $a \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. **C.** $a \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. **D.** $a = 0$.



Bài giải

Điều kiện: $\sin 2x \neq 1$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ta có: $\frac{2\cos 2x}{1-\sin 2x} = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ (không thỏa mãn)}.$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}.$$

Chọn B.

 Câu 6.

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos x = m + 1$ có nghiệm?

A. 1.

B 2.

C. 3.

D. 4.



Bài giải

$\cos x = m + 1$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow |m + 1| \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0.$$

Vì m nguyên $\Rightarrow m \in \{-2; -1; 0\}$.

Chọn B.

 Câu 7.

Nghiệm nhỏ nhất của phương trình $\cos x = 1$ trên $[0, 10\pi]$ là

A. 0.

B. π .

C. 2π

D. $\frac{3\pi}{2}$.



Bài giải

Ta có: $\cos x = 1$

$$\Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ Nghiệm nhỏ nhất là 0.

Chọn A.

 Câu 8.

Số nghiệm của phương trình $\cos x = 0.566$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$ là

A 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.



Bài giải

Ta có: $\cos x = 0,566$

$$\Leftrightarrow x \approx \pm 0,3\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$\Rightarrow$ Số nghiệm trên $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$ là 1 nghiệm.

Chọn A.

 Câu 9.

Gọi X là tập nghiệm của phương trình $\cos\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = \sin x$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A $290^\circ \in X$.

B. $20^\circ \in X$.

C. $220^\circ \in X$.

D. $240^\circ \in X$.

 Bài giải

Ta có: $\cos\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = \sin x$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = \cos(90^\circ - x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 50^\circ + k240^\circ \\ x = 210^\circ - k720^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Chọn A.

 Câu 10.

Phương trình $\sin^2 x = 0,5$ tương đương với phương trình nào sau đây?

A. $\cos x = 1.$

B $\cos 2x = 0.$

C. $\sin 2x = 0.$

D. $\sin(0,5x) = 1$



Bài giải

Ta có: $\sin^2 x = 0,5$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} = 0,5$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0.$$

Chọn B.

 Câu 11.

Giải phương trình sau: $\tan x = -\sqrt{3}$

A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

B. $x = \frac{-\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

D. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$



Bài giải

Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Ta có: $\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{3} + k\pi \text{ (TM)}$

Chọn D.

Câu 12.

Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ trên đường tròn lượng giác là:



4.

B. 3

C. 2

D. 1.



Bài giải

Với điều kiện: $x \neq \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$

Ta có: $\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \quad (TM)$

Theo ycbt ta có: $0 \leq \frac{k\pi}{2} \leq 2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow k = 0, 1, 2, 3$

Chọn A.

 Câu 13.

Phương trình $\tan x = 4$ có nghiệm là:

A. Vô nghiệm

B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

C. $x = \arctan 4 + k\pi$.

D. $x = \arctan 4 + k2\pi$



Bài giải

Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\tan x = 4 \Leftrightarrow x = \arctan 4 + k\pi \quad (TM)$$

Chọn C.

 Câu 14.

Phương trình $2\tan x = 1$ có nghiệm trong $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ là:

A. $x = \frac{5\pi}{4}$

B. $x = \arctan \frac{1}{2}$

C $x = \pi + \arctan \frac{1}{2}$

D. Đáp số khác



Bài giải

Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\tan x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \arctan \frac{1}{2} + k\pi$$

Mặt khác, do: $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ nên $k = 1$ (TM)

Chọn C.

 Câu 15.

Phương trình $\tan(x + 3^\circ) = -1$ có nghiệm là:

A. $x = -45^\circ + k180^\circ$

B. $x = \frac{-\pi}{4} - 3 + k\pi$

C. $x = -48^\circ + k180^\circ$.

D. $x = -48^\circ + k\pi^\circ$



Bài giải

Đk: $x \neq 87^\circ + k180^\circ$.

$\tan(x + 3^\circ) = -1$

$\Leftrightarrow x = -48^\circ + k180^\circ$ (TM)

Chọn C.

 Câu 16.

Giải phương trình sau: $\cot 2x = -\sqrt{3}$

A. $x = \frac{-\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$

B. $x = \frac{-\pi}{12} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

C. $x = \frac{-\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$

D. $x = \operatorname{arccot}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + k\pi$



Bài giải

Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\cot 2x = -\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \cot 2x = \cot \frac{-\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$$

Chọn B.

 Câu 17.

Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $\cot\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$ trên đường tròn lượng giác là:

A. 4.

B. 3

C. 2

D. 1.



Bài giải

Điều kiện: $x \neq \frac{k\pi}{2}$

$$\cot\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cot\frac{-\pi}{6} \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{-\pi}{6} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} \quad (\text{TM})$$

Mặt khác: $0 \leq \frac{k\pi}{2} < 2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow k = 1, 2$

Chọn C.

 Câu 18.

Phương trình $\cot(3x - 15^\circ) = \sqrt{3}$ có nghiệm là:

A. $x = 60^\circ + k180^\circ$

C. $x = 45^\circ + k60^\circ$

$(k \in \mathbb{Z})$

B. $x = 45^\circ + k180^\circ$

D. $x = 15^\circ + k60^\circ$



Bài giải

Đk: $x \neq 5^\circ + k60^\circ.$

$$\cot(3x - 15^\circ) = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 15^\circ + k60^\circ \quad (TM)$$

M

Chọn D.

 Câu 19.

Phương trình $\cot x = -3$ có nghiệm là:

A. Vô nghiệm

B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

C $x = \operatorname{arccot} -3 + k\pi$

D. $x = \operatorname{arccot} -3 + k2\pi$



Bài giải

Điều kiện: $x \neq k\pi$

$$\cot x = -3 \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} -3 + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (TM)$$

Chọn C.

 Câu 20.

Trong các nghiệm dương bé nhất của các phương trình sau, phương trình nào có nghiệm nhỏ nhất?

- A. $\tan 2x = 1$. B. $\tan \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{3}$ **C** $\cot x = 0$ D. $\cot x = -\sqrt{3}$.



Bài giải

A. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ nên nghiệm dương bé nhất là: $x = \frac{\pi}{8}$

B. $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$ nên nghiệm dương bé nhất là: $x = \frac{7\pi}{12}$

C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ nên nghiệm dương bé nhất là: $x = \frac{\pi}{2}$

D. $x = \frac{-\pi}{6} + k\pi$ nên nghiệm dương bé nhất là: $x = \frac{5\pi}{6}$

Chọn C.