

ĐỀ CƯƠNG MÔN TOÁN KHỐI 10

HỌC KÌ I - NĂM HỌC: 2023-2024

Tổ toán - Trường THPT Đào Sơn Tây

CHƯƠNG I: MỆNH ĐỀ VÀ TẬP HỢP

§1. MỆNH ĐỀ

1 Lý thuyết

1.1 Mệnh đề và mệnh đề chứa biến

1.1.1 Mệnh đề

- Mệnh đề là câu khẳng định có tính đúng hoặc sai.
- Một mệnh đề phải hoặc đúng hoặc sai.
- Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.
- Người ta thường sử dụng các chữ cái $P, Q, R, \dots$ để đặt tên các mệnh đề.

Ví dụ.

- a) Mệnh đề P : “Ngày 2/9 là Quốc Khánh nước CHXHCN Việt Nam” là mệnh đề đúng.
- b) Mệnh đề Q : “Số 3 là một số chẵn” là mệnh đề sai.

1.1.2 Mệnh đề chứa biến

- Mệnh đề chứa biến là một câu khẳng định có chứa một hay nhiều biến.
- Mệnh đề chứa biến chưa rõ tính đúng sai nên chưa phải là mệnh đề.
- Khi thay biến bởi giá trị cụ thể thì mệnh đề chứa biến trở thành mệnh đề.
- Kí hiệu: $P(x), Q(x, y), \dots$

Ví dụ. $P(n)$: “ n chia hết cho 5” (n là số tự nhiên) là mệnh đề chứa biến n .

- Với $n = 10$ thì $P(10)$: “10 chia hết cho 5” là mệnh đề đúng.
- Với $n = 3$ thì $P(3)$: “3 chia hết cho 5” là mệnh đề sai.

1.2 Mệnh đề phủ định

- Cho mệnh đề P . Mệnh đề phủ định của P là mệnh đề “không phải P ”.
- Kí hiệu: $\bar{P}$.
- Nếu P đúng thì $\bar{P}$ sai.
- Nếu P sai thì $\bar{P}$ đúng.

1.3 Mệnh đề kéo theo

1.3.1 Khái niệm

- Cho hai mệnh đề P và Q . Mệnh đề “Nếu P thì Q ” được gọi là mệnh đề kéo theo.
- Kí hiệu $P \Rightarrow Q$.
- Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai.

1.3.2 Định lý

- Định lý là một mệnh đề toán học đúng.
- Khi mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là định lý, ta nói:
 - P là giả thiết, Q là kết luận của định lý.
 - P là điều kiện đủ để có Q .
 - Q là điều kiện cần để có P .

1.4 Mệnh đề đảo - Mệnh đề tương đương

1. Mệnh đề đảo

- Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.
- Mệnh đề đảo của một mệnh đề đúng thì **chưa chắc** đúng.

2. Hai mệnh đề tương đương

- Nếu hai mệnh đề $(P \Rightarrow Q)$ và $(Q \Rightarrow P)$ đều đúng thì ta nói P và Q là hai mệnh đề tương đương.
- Ký hiệu $P \Leftrightarrow Q$.
- Khi đó ta nói P là điều kiện cần và đủ để có Q .
- Nhận xét: *Hai mệnh đề P và Q tương đương khi chúng cùng đúng hoặc cùng sai.*

1.5 Mệnh đề có chứa kí hiệu $\forall, \exists$

1. Mệnh đề chứa kí hiệu $\forall$ (với mọi)

- Là mệnh đề có dạng $\boxed{\forall x \in M, P(x)}$
- Mệnh đề $\forall x \in M, P(x)$ đúng nếu với mọi $x_0 \in M, P(x_0)$ là mệnh đề đúng.
Ví dụ. Mệnh đề $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ là mệnh đề đúng.

2. Mệnh đề chứa kí hiệu $\exists$

- Là mệnh đề có dạng $\boxed{\exists x \in M, P(x)}$
- Mệnh đề $\exists x \in M, P(x)$ đúng nếu tồn tại $x_0 \in M$ làm cho $P(x_0)$ là mệnh đề đúng.
Ví dụ. $\exists x \in \mathbb{Z}, x + x = 0$ là mệnh đề đúng vì có $x = 0 \in \mathbb{Z}$ sao cho $0 + 0 = 0$.

3. Phủ định của mệnh đề chứa $\forall, \exists$

- Mệnh đề “ $\forall x \in M, P(x)$ ” có phủ định là “ $\exists x \in M, \overline{P(x)}$ ”
- Mệnh đề “ $\exists x \in M, P(x)$ ” có phủ định là “ $\forall x \in M, \overline{P(x)}$ ”

Ví dụ. Viết mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$. b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 5x - 4$. c) $\exists x \in \mathbb{Z}, 2x + 1 \leq 0$.

Giải

- a) Mệnh đề phủ định: $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$
b) Mệnh đề phủ định: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 5x - 4$
c) Mệnh đề phủ định: $\forall x \in \mathbb{Z}, 2x + 1 > 0$

2 Bài tập thực hành

2.1 Dạng 1: Xác định mệnh đề và mệnh đề chứa biến

Câu 1. Các câu sau đây, có bao nhiêu câu là mệnh đề?

- a) Ổ đây đẹp quá!
- b) Phương trình $x^2 + 4x + 4 = 0$ vô nghiệm.
- c) 16 không phải là số nguyên tố.
- d) Hãy chứng minh $2n$ là số chẵn với n là số tự nhiên bất kì.
- e) Hai phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$ và $2x - 2 = 0$ có nghiệm chung.
- f) Số π có lớn hơn 3 hay không?
- g) Đội tuyển Italia giành chức vô địch World Cup 2006.
- h) Hai tam giác bằng nhau nếu chúng có diện tích bằng nhau.
- i) Món kem này khá ngon.
- j) Ấn Độ là một quốc gia ở khu vực Nam Á.
- k) Một tỷ đồng là số tiền rất lớn.

Câu 2. Xét tính đúng - sai của các mệnh đề sau:

- a) 32 là hợp số.
- b) Tổng số đo ba góc trong một tam giác bằng 360° .
- c) Hình bình hành là tứ giác có hai cặp cạnh đối song song.
- d) Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm phân biệt khi $b^2 - 4ac \geq 0$.
- e) Hình thoi là tứ giác có bốn góc vuông.

Câu 3. Cho n là một số tự nhiên tùy ý, xét tính đúng - sai của các mệnh đề sau:

- a) $2n + 1$ là một số lẻ.
- b) Chữ số tận cùng của n là 4.
- c) n^2 là một số chính phương.
- d) $n^2 + n$ là một số chẵn.

Chú thích. Một số được gọi là số chính phương nếu nó là bình phương của một số tự nhiên. Ví dụ 9 là số chính phương do $9 = 3^2$

Câu 4. Xét tính đúng - sai của các mệnh đề sau:

- a) M : “ π là một số hữu tỉ”.
- b) N : “Tổng độ dài hai cạnh của một tam giác lớn hơn độ dài cạnh thứ ba”.
- c) P : “Số nguyên tố lớn hơn 2 là một số lẻ”.
- d) Q : “Số tự nhiên có chữ số tận cùng là 0 hoặc 5 thì chia hết cho 5”.
- e) R : “Bình phương của một số nguyên bất kì đều chia hết cho 2”.
- f) A : “Tổng của hai số tự nhiên là một số chẵn khi và chỉ khi cả hai số đều là số chẵn”.
- g) B : “Tích của hai số tự nhiên là một số chẵn khi và chỉ khi cả hai số đều là số chẵn”.
- h) C : “Tổng của hai số tự nhiên là một số lẻ khi và chỉ khi cả hai số đều là số lẻ”.
- i) D : “Tích của hai số tự nhiên là một số lẻ khi và chỉ khi cả hai số đều là số lẻ”.

Câu 5. Xét mệnh đề chứa biến $P(x)$: “ $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ ” ($x \in \mathbb{R}$). Tìm tất cả các giá trị x để $P(x)$ trở thành mệnh đề đúng?

Câu 6. Xét mệnh đề chứa biến $Q(x) : “|x| > 0” (x \in \mathbb{R})$. Tìm tất cả các giá trị x để $Q(x)$ trở thành mệnh đề sai?

Câu 7. Tại một giải đấu bóng đá khu vực ASEAN, có bốn đội lọt vào vòng bán kết là Việt Nam, Singapore, Thái Lan và Indonesia. Trước khi thi đấu vòng bán kết, ba bạn Dung, Quang, Trung dự đoán như sau:

- Dung: Singapore nhì, còn Thái Lan ba.
- Quang: Việt Nam nhì, còn Thái Lan tư.
- Trung: Singapore nhất và Indonesia nhì.

Kết quả, mỗi bạn dự đoán đúng một đội và sai một đội. Hãy xác định thứ hạng từng đội sau giải đấu.

2.2 Dạng 2: Mệnh đề phủ định

Câu 1. Phát biểu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

- a) A : “Tổng ba góc trong một tam giác bằng 180° ”.
- b) B : “6 không phải là số nguyên tố”.
- c) C : “Phương trình $x^2 + 1 = 0$ có nghiệm”.

Câu 2. Viết mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

- a) A : “ $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ ”.
- b) B : “ $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 < n$ ”.
- c) C : “ $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 + 2x + 5 = 0$ ”.
- d) D : “ $\forall x \in \mathbb{Q} : 3x \neq x^2 + 2$ ”.

Câu 3. Phát biểu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

- a) M : “Mọi hình vuông đều là hình thoi”.
- b) N : “Có một tam giác cân không phải là tam giác đều”.
- c) P : “Mọi số tự nhiên có chữ số tận cùng bằng 0 đều chia hết cho 10”.

Câu 4. Sử dụng kí hiệu $\forall$ hoặc $\exists$ để viết lại các mệnh đề sau. Viết mệnh đề phủ định của các mệnh đề đó.

- a) Với mọi số thực x , đều có $x^2 - 2x + 1 \geq 0$.
- b) Có số nguyên x sao cho $x^2 - 5 = 0$.
- c) Tồn tại số thực x thoả mãn $x^2 + 2x + 2 < 0$.
- d) Có một số hữu tỉ mà nghịch đảo của nó lớn hơn chính nó.

Câu 5. Xét tính đúng - sai và viết mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

- a) A : “ $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \neq 20$ ”.
- b) B : “ $\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$ ”.
- c) C : “ $\forall x \in \mathbb{R} : x < x + 1$ ”.
- d) D : “ $\exists x \in \mathbb{R} : 3x = x^2 + 2$ ”.
- e) E : “ $\exists x \in \mathbb{N} : 6x^2 = x + 1$ ”.
- f) F : “ $\forall x \in \mathbb{Z} : x \leq x^3$ ”.

Câu 6. Sử dụng kí hiệu $\forall$ hoặc $\exists$ để viết lại các mệnh đề sau và xét tính đúng sai của chúng.

- a) Mọi số thực khác 0 nhân với nghịch đảo của nó bằng 1.
- b) Có một số tự nhiên mà bình phương của nó bằng 10.
- c) Bình phương của mọi số thực đều dương.

2.3 Dạng 3: Mệnh đề kéo theo - Mệnh đề đảo - Mệnh đề tương đương

Câu 1. Cho hai mệnh đề P : “ $2 < 3$ ” và Q : “ $-4 < -6$ ”. Lập mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xét tính đúng sai của nó.

Câu 2. Cho hai mệnh đề P : “ $-1 > -2$ ” và Q : “ $(-1)^2 > (-2)^2$ ”. Lập mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xét tính đúng sai của nó.

Câu 3. Cho tam giác ABC . Xét hai mệnh đề P : “Góc $\hat{A} = 90^\circ$ ” và Q : “ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ”. Lập mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xét tính đúng sai của nó.

Câu 4. Phát biểu mệnh đề đảo của định lý: “Trong một tam giác cân, các đường cao ứng với các cạnh bên bằng nhau”. Mệnh đề đảo đó đúng hay sai? Tại sao?

Câu 5. Phát biểu mệnh đề đảo của các mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mệnh đề đảo đó.

- a) Nếu một số chia hết cho 6 thì nó chia hết cho 3.
- b) Nếu tam giác ABC có $AB = AC$ thì tam giác ABC cân.
- c) Nếu tam giác ABC có hai góc bằng 60° thì tam giác ABC đều.

Câu 6. Cho các mệnh đề sau, mệnh đề nào có mệnh đề đảo đúng?

- a) Nếu tứ giác $ABCD$ là hình thang cân thì 2 góc đối bù nhau.
- b) Nếu $a = b$ thì $ac = bc$.
- c) Nếu $a > b$ thì $a^2 > b^2$.
- d) Nếu một số nguyên chia hết cho 10 thì nó chia hết cho 5 và 2.

Câu 7. Cho tam giác ABC . Xét hai mệnh đề P : “ $\triangle ABC$ là tam giác cân” và Q : “ $\triangle ABC$ có hai đường trung tuyến bằng nhau”. Lập mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ và xét tính đúng sai của nó.

Câu 8. Cho mệnh đề: “Nếu một tứ giác là hình thang cân thì tứ giác đó có hai đường chéo bằng nhau”. Phát biểu mệnh đề trên bằng cách sử dụng khái niệm “điều kiện cần”.

Câu 9. Cho mệnh đề: “Nếu thì một trong hai số và nhỏ hơn 1”. Phát biểu mệnh đề trên bằng cách sử dụng khái niệm “điều kiện đủ”.

Câu 10. Phát biểu dưới dạng “điều kiện cần” đối với các mệnh đề sau:

- a) Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.
- b) Số tự nhiên có tổng các chữ số của nó chia hết cho 3 thì chia hết cho 3.

Câu 11. Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ và xét tính đúng sai của chúng trong các trường hợp:

- a) P : “ $x^2 + y^2 = 0$ ”; Q : “ $x = 0$ và $y = 0$ ”.
- b) P : “ $x^2 > 0$ ”; Q : “ $x > 0$ ”.

§2. TẬP HỢP

1 Lý thuyết

1.1 Tập hợp và phần tử

- Tập hợp dùng để chỉ một nhóm gồm các đối tượng nào đó hoàn toàn xác định.
- Mỗi đối tượng của một tập hợp được gọi là một phần tử.
- Để chỉ a là phần tử của tập hợp M , ta viết $a \in M$.
- Để chỉ b không phải là phần tử của tập hợp M , ta viết $b \notin M$.
- Tập hợp $\emptyset$ (tập rỗng) là tập hợp không chứa bất kì phần tử nào.

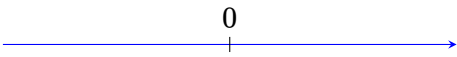
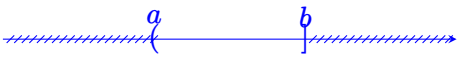
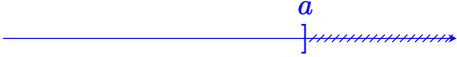
1.2 Tập con và Hai tập hợp bằng nhau

- Tập A được gọi là tập con của tập B nếu mọi phần tử của A đều thuộc B .
- Kí hiệu: $A \subset B$ (A chứa trong B) hoặc $B \supset A$ (B chứa A).
- Nếu A không phải tập con của B thì ta kí hiệu $A \not\subset B$.
- Ta nói $A = B$ nếu $A \subset B$ và $B \subset A$

Chú ý. Với mọi tập hợp A ta đều có: $A \subset A$ và $\emptyset \subset A$

1.3 Tập hợp con của tập số thực $\mathbb{R}$

Trong bảng sau, $a, b \in \mathbb{R}$ và $a < b$.

Tên gọi và kí hiệu	Tập hợp	Biểu diễn trên trục số
Tập số thực $(-\infty; +\infty)$	$\mathbb{R}$	
Đoạn $[a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
Khoảng $(a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
Khoảng $(a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$	
Khoảng $(-\infty; a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
Nửa khoảng $[a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
Nửa khoảng $(a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
Nửa khoảng $[a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$	
Nửa khoảng $(-\infty; a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	

2 Bài tập thực hành

2.1 Trắc nghiệm

Câu 1. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A $\{0\} \subset \emptyset$. ☐ B $0 \subset \emptyset$. ☐ C $\emptyset = \{0\}$. ☐ D $\emptyset \subset \{0\}$.

Câu 2. Mệnh đề nào sau đây sai?

- ☐ A $\emptyset \subset \mathbb{Q}$. ☐ B $\{-2; 3\} \subset [-2; 3]$. ☐ C $\mathbb{N} \subset [0; +\infty)$. ☐ D $[3; 6] = \{3; 4; 5; 6\}$.

Câu 3. Cho x là một phần tử của tập hợp A . Xét các mệnh đề sau:

- (I) $x \in A$; (II) $\{x\} \in A$; (III) $x \subset A$; (IV) $\{x\} \subset A$.

Trong các mệnh đề trên, mệnh đề nào đúng?

- ☐ A (I) và (IV). ☐ B (I) và (II). ☐ C (I) và (III). ☐ D (II) và (IV).

Câu 4. Cho hai tập hợp $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 3x - 4 = 0\}$ và $N = \{a; -1\}$. Với giá trị nào của a thì $M = N$?

- ☐ A $a = 3$. ☐ B $a = 2$. ☐ C $a = -1$ hoặc $a = 4$. ☐ D $a = 4$.

Câu 5. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập rỗng?

- ☐ A $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4 = 0\}$. ☐ B $D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 + x - 12 = 0\}$.
☐ C $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 3 = 0\}$. ☐ D $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 8 = 0\}$.

Câu 6. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập rỗng?

- ☐ A $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 6x^2 - 7x + 1 = 0\}$. ☐ B $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 4x + 2 = 0\}$.
☐ C $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1\}$. ☐ D $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 0\}$.

Câu 7. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < 3\}$. Hỏi A là tập hợp nào sau đây?

- ☐ A $\{-4; 3\}$. ☐ B $[-4; 3]$. ☐ C $(-4; 3]$. ☐ D $(-4; 3)$.

Câu 8. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$. Hỏi A là tập hợp nào sau đây?

- ☐ A $(-\infty; -1)$. ☐ B $(-1; +\infty)$. ☐ C $(-\infty; -1]$. ☐ D $[-1; +\infty)$.

Câu 9. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5\}$. Hỏi A là tập hợp nào sau đây?

- ☐ A $(-\infty; -5]$. ☐ B $[-5; +\infty)$. ☐ C $(-\infty; -5)$. ☐ D $(-5; +\infty)$.

Câu 10. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$. Hỏi A là tập hợp nào sau đây?

- ☐ A $[4; +\infty)$. ☐ B $(4; +\infty)$. ☐ C $(-\infty; 4]$. ☐ D $(-\infty; 4)$.

Câu 11. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2, x \neq 5\}$. Hỏi A là tập hợp nào sau đây?

- ☐ A $(2; 5)$. ☐ B $(2; +\infty) \setminus \{5\}$. ☐ C $[2; 5)$. ☐ D $[2; +\infty) \setminus \{5\}$.

Câu 12. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -10 < x \leq 0, x \neq -2, x \neq -3\}$. Hỏi A là tập hợp nào sau đây?

- ☐ A $[-10; 0) \setminus \{-3; -2\}$. ☐ B $(-10; 0)$.
☐ C $(-10; 0] \setminus \{-3; -2\}$. ☐ D $\{-10; -3; -2; 0\}$.

Câu 13. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A $B \subset A$. ☐ B $A \subset B$. ☐ C $A = [2; 3]$. ☐ D $B = [5; +\infty)$.

Câu 14. Cho hai tập hợp $A = \{0; 2\}$ và $B = \{0; 1; 2; 3\}$. Có bao nhiêu tập hợp X thỏa mãn $A \subset X \subset B$.

- ☐ A 1. ☐ B 2. ☐ C 4. ☐ D 3.

2.2 Tự luận

Câu 1. Viết lại các tập hợp sau dưới dạng liệt kê các phần tử:

- a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - x - 2 = 0\}$; b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$;
c) $C = \{n \in \mathbb{N} \mid x \leq 6\}$; d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 \leq x < 2\}$.

Câu 2. Viết lại các tập hợp sau dưới dạng liệt kê các phần tử:

- a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n : 4, n \leq 20\}$; b) $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n : 3, n < 25\}$;
c) $C = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 25 : x\}$; d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 9 : x\}$;
e) $E = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ là ước chung của } 24 \text{ và } 30\}$; f) $F = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ là ước chung của } 15 \text{ và } 24\}$.

Câu 3. Viết lại các tập hợp sau dưới dạng liệt kê các phần tử:

- a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid (2x^2 - 5x + 3)(x^2 - 4x + 3) = 0\right\}$; b) $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid (2 - x)(2x^2 + 5x + 2) = 0\right\}$;
c) $C = \left\{x \in \mathbb{N} \mid (9 - x^2)(x^2 - 3x + 2) = 0\right\}$; d) $D = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid (5 - x^2)(x^2 - 5x + 6) = 0\right\}$.

Câu 4. Viết lại các tập hợp sau dưới dạng liệt kê các phần tử:

- a) $A = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 10 - x^2, x \in \mathbb{N}\}$; b) $B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{6}{6-x} \in \mathbb{N}\right\}$;
c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 2 \geq 0 \text{ và } 7 - x \geq 2\}$; d) $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 1 > 0 \text{ và } 4 - 2x \leq -2\}$;
e) $E = \{(x; y) \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x + 2y = 8\}$; f) $F = \{(x; y) \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, 2x - y = 3 \text{ và } x + y = 3\}$;

Câu 5. Liệt kê tất cả các tập con của tập hợp sau:

- a) $M = \{a; b\}$; b) $N = \{1; 2; 3\}$;
c) $P = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x(x - 3)(x - 4) = 0\}$; d) $Q = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 1\}$.

Câu 6. Liệt kê các tập con có đúng hai phần tử của tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4\}$.

Câu 7. Liệt kê các tập con có đúng ba phần tử của tập hợp $M = \{a; b; c; d\}$.

Câu 8. Liệt kê các tập con có ít nhất hai phần tử của tập hợp $A = \{x; y; z\}$.

Câu 9. Liệt kê các tập con có nhiều nhất một phần tử của tập hợp $A = \{x; y; z\}$.

Câu 10. Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; a\}$ và $B = \{1; a^2\}$. Tìm tất cả giá trị của a sao cho $B \subset A$.

§3. PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

1 Lý thuyết

1.1 Khái niệm các phép toán trên tập hợp

1. Hợp của hai tập hợp

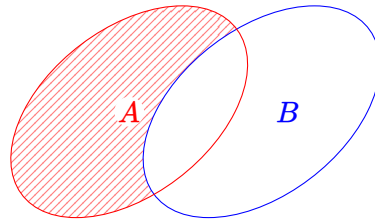
- Hợp của hai tập hợp A và B là tập các phần tử thuộc A hoặc thuộc B . Kí hiệu $A \cup B$.
- Nhận xét: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$

2. Giao của hai tập hợp

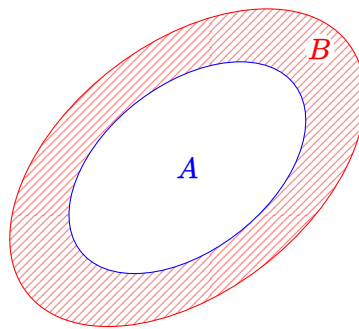
- Giao của hai tập hợp A và B là tập các phần tử thuộc A và thuộc B . Kí hiệu $A \cap B$.
- Nhận xét: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$

3. Hiệu của hai tập hợp - Phần bù của tập con trong tập mẹ

- Cho hai tập A và B , tập hợp các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B gọi là hiệu của A và B .
- Kí hiệu: $A \setminus B$.



- Nếu $A \subset B$ thì hiệu $B \setminus A$ gọi là phần bù của A trong B .
- Kí hiệu $C_B A$.



1.2 Công thức tính số phần tử của tập $A \cup B$

- $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ (với A, B là các tập hữu hạn phần tử).
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

1.3 Quy tắc xác định hợp - giao - hiệu các tập con của $\mathbb{R}$ bằng trục số

1. Giao của hai tập hợp $A \cup B$

- Gạch bỏ phần không thuộc A .
- Gạch bỏ phần không thuộc B .
- Phần còn lại không bị gạch là $A \cap B$.

2. Hợp của hai tập hợp $A \cup B$

- Tô đậm phần thuộc A .
- Tô đậm phần thuộc B .
- Gạch bỏ phần không tô đậm.
- Phần còn lại không bị gạch là $A \cup B$.

3. Hiệu của A và B

- Gạch bỏ phần không thuộc A .
- Gạch bỏ phần thuộc B .
- Phần còn lại không bị gạch là $A \setminus B$.

2 Bài tập thực hành

2.1 Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1. Cho M là tập hợp con của N . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ (A) $N \setminus M = M$. ☐ (B) $N \setminus M = N$. ☐ (C) $M \cap N = M$. ☐ (D) $M \cup N = \emptyset$.

Câu 2. Cho các tập hợp $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{-1; 0; 2; 3\}$. Xét tập $C = A \cap B$. Khi đó

- ☐ (A) $C = \{1\}$. ☐ (B) $C = \{-1; 0\}$. ☐ (C) $C = \{2; 3\}$. ☐ (D) $C = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$.

Câu 3. Cho các tập hợp $A = \{a; b; c; d\}$, $B = \{b; d; f; g\}$. Tập hợp $A \cup B$ bằng

- ☐ (A) $\{a; b; c; d; f; g\}$. ☐ (B) $\{b; d\}$. ☐ (C) $\{a; c\}$. ☐ (D) $\{f; g\}$.

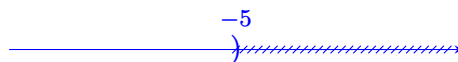
Câu 4. Cho các tập hợp $A = \{a; b; c; d\}$, $B = \{b; d; f; g\}$. Tập hợp $A \setminus B$ bằng

- ☐ (A) $\{b; d\}$. ☐ (B) $\{a; b; c; d; f; g\}$. ☐ (C) $\{f; g\}$. ☐ (D) $\{a; c\}$.

Câu 5. Cho các tập hợp $M = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ và $X = \{2; 5\}$. Tập hợp $C_M X$ bằng

- ☐ (A) $\{1; 3; 4\}$. ☐ (B) $\emptyset$. ☐ (C) $\{2; 5\}$. ☐ (D) $\{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Câu 6. Cho tập hợp X có biểu diễn trên trục số như hình sau:



Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ (A) X là nửa khoảng $[-5; +\infty)$. ☐ (B) X là khoảng $(-5; +\infty)$.
☐ (C) X là khoảng $(-\infty; -5)$. ☐ (D) X là nửa khoảng $(-\infty; -5]$.

Câu 7. Cho tập hợp A có biểu diễn trên trục số như hình sau:



Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ (A) A là nửa khoảng $[-1; 4)$. ☐ (B) A là khoảng $(-1; 4)$.
☐ (C) A là nửa khoảng $(-1; 4]$. ☐ (D) A là đoạn $[-1; 4]$.

2.2 Câu hỏi tự luận

Câu 1. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 15, x : 3\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x = 0\}$.

Xác định các tập hợp: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Câu 2. Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số:

- a) $[-3; 5] \cap (2; 7)$. b) $(1; +\infty) \cap [-5; 9]$. c) $(-\infty; 0) \cup (-1; 2)$. d) $[5; +\infty) \cup [-4; 6]$.

Câu 3. Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số:

- a) $\mathbb{R} \setminus (-\infty; 3)$. b) $(-3; 2) \setminus [1; 3)$. c) $(-\infty; +\infty) \setminus [5; +\infty)$. d) $C_{\mathbb{R}}(-1; +\infty)$.

Câu 4. Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số:

- a) $A = [3; 9] \setminus [-2; 7)$. b) $B = [-1; +\infty) \cap (-4; 9]$. c) $C = [1; 5] \cup [4; +\infty)$. d) $D = C_{\mathbb{R}} \setminus [-1; +\infty)$.

Câu 5. Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số:

- a) $A = [-2; 4] \cap [4; +\infty)$. b) $B = (-\infty; 1) \cup [1; +\infty)$. c) $C = (-\infty; -4] \setminus (0; 4)$. d) $D = [-9; 3) \setminus (-9; -1]$.

Câu 6.

Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - x - 6 = 0\}$. Xác định tập hợp $A \setminus B$.

Câu 7.

Xác định các tập hợp $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ và biểu diễn chúng trên trục số, biết:

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 12\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 15\}$.
b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 8\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x \leq 8\}$.

Câu 8. Trong một cuộc khảo sát người tiêu dùng, trong 100 người uống cà phê được khảo sát, có 55 người thêm đường, 65 người thêm sữa, 30 người thêm cả đường và sữa. Hỏi trong số 100 đó,

- a) có bao nhiêu người thêm ít nhất đường hoặc b) có bao nhiêu người không thêm đường lẫn sữa?
sữa?

Câu 9. Lớp 10A có 10 học sinh giỏi toán, 15 học sinh giỏi Ngoại ngữ, 8 học sinh giỏi cả Toán lẫn Ngoại ngữ. Tính số học sinh giỏi ít nhất một môn (Toán hoặc Ngoại ngữ) của lớp 10A.

Câu 10. Lớp 10B có 28 học sinh tham gia câu lạc bộ thể thao và 19 học sinh tham gia câu lạc bộ âm nhạc. Biết rằng có 10 học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ trên.

- a) Có bao nhiêu học sinh tham gia câu lạc bộ thể thao và không tham gia câu lạc bộ âm nhạc?
b) Có bao nhiêu học sinh tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ trên?
c) Biết lớp 10B có 40 học sinh. Có bao nhiêu học sinh không tham gia câu lạc bộ thể thao? Có bao nhiêu học sinh không tham gia cả hai câu lạc bộ?

Câu 11. Lớp 10C có 27 học sinh tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ bóng đá và nhiếp ảnh, trong đó có 19 học sinh tham gia câu lạc bộ bóng đá, 15 học sinh tham gia câu lạc bộ nhiếp ảnh.

- a) Có bao nhiêu học sinh tham gia câu lạc bộ bóng đá mà không tham gia câu lạc bộ nhiếp ảnh?
- b) Có bao nhiêu học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ?
- c) Biết trong lớp 10C có 8 học sinh không tham gia câu lạc bộ nào trong hai câu lạc bộ trên. Hỏi lớp 10C có bao nhiêu học sinh?

Câu 12. Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; 2a - 1\}$ và $B = \{0; b; 2b - 5\}$ với a, b là các số thực. Biết rằng $A \cap B = \{1; 3\}$, tìm giá trị của a và b .

Câu 13. Cho các tập hợp $A = [-5; 3)$ và $B = [1 - 2m; 5 - 2m]$. Tìm tất cả các số thực m để $A \cap B = \emptyset$.

Câu 14. Cho hai tập hợp $A = [m - 4; 1]$ và $B = (-3; m]$. Tìm tất cả giá trị của m để $A \cup B = B$.

CHƯƠNG II: BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

3 Lý thuyết

3.1 Khái niệm bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- Là bất phương trình có dạng: $ax + by + c < 0$; $ax + by + c \leq 0$; $ax + by + c > 0$; $ax + by + c \geq 0$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$, a và b không đồng thời bằng 0.
- Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ thoả mãn $ax_0 + by_0 + c < 0$ được gọi là một nghiệm của BPT đã cho.

2. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- Hệ BPT bậc I hai ẩn là hệ gồm nhiều BPT bậc I hai ẩn x, y .
- Mỗi nghiệm chung của các BPT đó được gọi là một nghiệm của hệ BPT đã cho.
- Trong mặt phẳng Oxy , tập hợp các điểm $(x_0; y_0)$ có toạ độ là nghiệm của hệ BPT bậc I hai ẩn được gọi là *miền nghiệm* của hệ đó.

3.2 Quy tắc biểu diễn miền nghiệm

1. Quy tắc biểu diễn miền nghiệm BPT $ax + by + c < 0$ trên mặt phẳng Oxy

- Bước 1.** Vẽ đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$.
- Bước 2.** Lấy điểm $M(x_0; y_0) \notin \Delta$. Tính $T = ax_0 + by_0 + c$.
- Bước 3.** Kết luận:
 - a) Nếu $T < 0$ thì miền nghiệm của BPT đã cho là nửa mặt phẳng chứa M (không kể bờ Δ).
 - b) Nếu $T > 0$ thì miền nghiệm của BPT đã cho là nửa mặt phẳng không chứa M (không kể bờ Δ).

2. Quy tắc biểu diễn miền nghiệm hệ BPT bậc nhất một ẩn

- Bước 1.** Biểu diễn miền nghiệm của các BPT trong hệ lên cùng mặt phẳng toạ độ.
- Bước 2.** Kết luận phần giao của các miền nghiệm ở bước 1 là miền nghiệm của hệ BPT.

4 Bài tập thực hành

4.1 Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1. Bất phương trình nào dưới đây không phải là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

- (A) $2x - 3y - 2022 \leq$ (B) $5x + y \geq 2x + 1$. (C) $x + 2025 > 0$. (D) $\frac{x}{y} + 1 > 0$.

Câu 2. Bất phương trình nào dưới đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

- (A) $2x^2 + 3y > 4$. (B) $xy + x < 5$. (C) $3^2x + 4^3y \geq 6$. (D) $x + y^3 \leq 3$.

Câu 3. Điểm nào dưới đây thuộc miền nghiệm của bất phương trình $2x + 5y \leq 10$?

- (A) $(5; 2)$. (B) $(-1; 4)$. (C) $(2; 1)$. (D) $(-5; 6)$.

Câu 4. Cặp số nào dưới đây không phải là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - 2y > 4 \\ 2x + y > 6 \end{cases}$?

(A) (7; 1).

(B) (2; -1).

(C) (6; -2).

(D) (5; -1).

Câu 5. Điểm nào dưới đây thuộc miền nghiệm của bất phương trình $x - 4y - 2 > 0$?

(A) (6; 1).

(B) (2; 0).

(C) (1; -1).

(D) (2; 2).

Câu 6. Điểm nào dưới đây thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} -x + y \leq 2 \\ x - 2y \geq 4 \\ x > 0 \end{cases}$?

(A) (-2; -4).

(B) (0; 1).

(C) (-1; 2).

(D) (2; -4).

Câu 7. Bạn An để dành được 900 nghìn đồng. Trong một đợt ủng hộ trẻ em mồ côi, An đã lấy ra x tờ tiền mệnh giá 50 nghìn đồng và y tờ tiền mệnh giá 100 nghìn đồng để trao tặng. Một bất phương trình mô tả điều kiện ràng buộc đối với x, y là

(A) $100x + 50y \geq 900$.

(B) $50x + 100y \leq 900$.

(C) $100x + 50y \leq 900$.

(D) $50x + 100y \geq 900$.

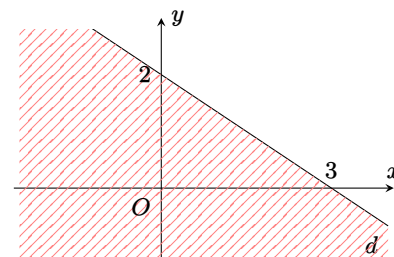
Câu 8. Miền gạch chéo (không kể bờ d) trong hình vẽ bên cạnh là miền nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình dưới đây?

(A) $3x + 2y < 6$.

(B) $2x + 3y > 6$.

(C) $3x + 2y > 6$.

(D) $2x + 3y < 6$.



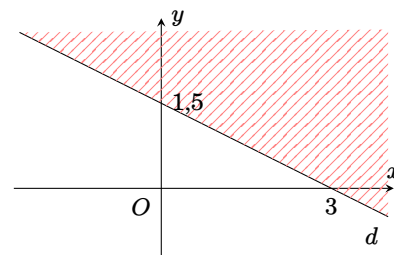
Câu 9. Miền gạch chéo (kể cả bờ d) trong hình vẽ bên cạnh là miền nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình dưới đây?

(A) $x + 2y < 3$.

(B) $x + 2y \leq 3$.

(C) $x + 2y > 3$.

(D) $x + 2y \geq 3$.



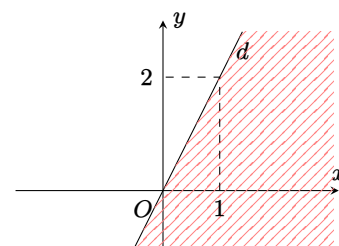
Câu 10. Miền gạch chéo (kể cả bờ d) trong hình vẽ bên cạnh là miền nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình dưới đây?

(A) $x - 2y \geq 0$.

(B) $2x - y \geq 0$.

(C) $x - 2y \leq 0$.

(D) $2x - y \leq 0$.



4.2 Câu hỏi tự luận

Câu 1. Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau trên mặt phẳng tọa độ:

a) $x + y \geq -4$;

b) $2x - y \leq 5$;

c) $x + 2y < 0$;

d) $-x + 2y > 0$.

Câu 2. Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau trên mặt phẳng tọa độ:

a) $x + 3y > 2x - y + 4$;

b) $3x - 2y \leq x + y + 6$;

c) $4x - 3y \geq 0$;

d) $4x + y - 4 < 0$.

Câu 3. Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau trên mặt phẳng tọa độ:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y - 4 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases};$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 2y \leq 4 \\ x + y \geq -3 \end{cases};$$

$$\text{c) } \begin{cases} 4x - y < 0 \\ 2x + y \geq 1 \\ x \geq 6 \end{cases};$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x + y \leq 4 \\ x - y + 1 \leq 0 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}.$$

Câu 4. Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau trên mặt phẳng tọa độ:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 5y > -1 \\ x + 2y < 6 \\ x - 5y > -1 \end{cases}$$

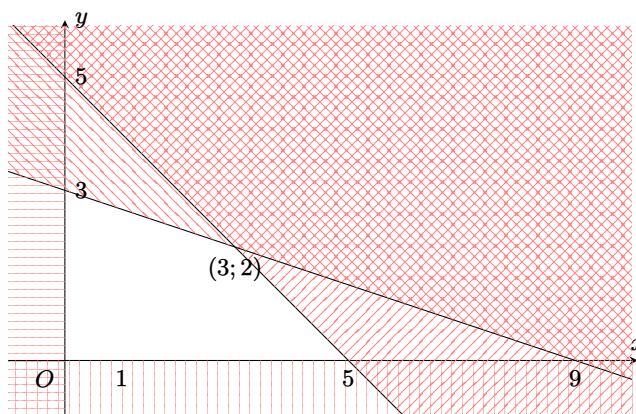
$$\text{b) } \begin{cases} x + y \leq 5 \\ x - y \leq 2 \\ x \geq -1 \end{cases};$$

$$\text{c) } \begin{cases} -3x + 2y < 6 \\ x - 2y \geq -2 \\ 2x + y < 4 \end{cases}.$$

Câu 5. Trên miền đa giác không gạch ở hình sau, hãy:

a) tìm giá trị lớn nhất của $F = 2x + 3y$.

b) tìm giá trị nhỏ nhất của $G = x - 4y$.



Câu 6. Một bác nông dân dự định quy hoạch x sào đất trồng cà tím và y sào đất trồng cà chua. Bác chỉ có không quá 9 triệu đồng để mua hạt giống. Cho biết tiền mua hạt giống cà tím là 200 nghìn đồng/sào và hạt giống cà chua là 100 nghìn đồng/sào. Viết hệ bất phương trình mô tả điều kiện ràng buộc đối với x và y .

Câu 7. Một phân xưởng lắp ráp máy tính dự định ráp x chiếc máy tính cá nhân và y chiếc máy tính bảng trong một ngày. Do hạn chế về số lượng nhân công nên mỗi ngày chỉ có thể xuất xưởng tổng hai loại không quá 150 chiếc. Viết hệ bất phương trình mô tả điều kiện ràng buộc đối với x và y .

Câu 8. Bạn An dự định mua x con cá vàng và y con cá Koi từ một trang trại cá giống. Cho biết mỗi con cá vàng có giá 30 nghìn đồng và mỗi con cá Koi có giá 150 nghìn đồng. An chỉ để dành được 1,7 triệu đồng và trại cá chỉ bán mỗi loại cá từ 10 con trở lên. Hãy viết hệ bất phương trình mô tả điều kiện ràng buộc đối với x, y .

Câu 9. Bạn Hương dự định gấp hạc và làm hoa để đem bán gây quỹ từ thiện giúp đỡ một học sinh trong trường mắc bệnh hiểm nghèo. Cần 3 phút để gấp 1 con hạc và 5 phút để làm được 1 bông hoa. Biết 1 con hạc bán giá 2.000 đồng, 1 bông hoa bán giá 3.000 đồng và bạn Hương có không quá 60 phút để làm. Tổng số sản phẩm không vượt quá 16. Hỏi bạn Hương cần làm bao nhiêu sản phẩm mỗi loại để thu được nhiều tiền nhất?

Câu 10. Một xưởng sản xuất bàn ghế gỗ. Một chiếc bàn cần 1,5 giờ lắp ráp và 1 giờ hoàn thiện; một chiếc ghế cần 1 giờ lắp ráp và 2 giờ hoàn thiện. Bộ phận lắp ráp có 3 công nhân, bộ phận hoàn thiện có 4 công nhân. Biết một công nhân làm việc không quá 8 tiếng mỗi ngày; thị trường luôn tiêu thụ hết sản phẩm của xưởng và lượng ghế tiêu thụ không vượt quá 3,5 lần số bàn.

a) Viết hệ bất phương trình mô tả số lượng bàn và ghế một ngày xưởng có thể sản xuất.

b) Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên.

c) Biết mỗi chiếc bàn lãi 600 nghìn đồng, một chiếc ghế lãi 450 nghìn đồng. Hỏi trong một ngày, xưởng cần sản xuất bao nhiêu chiếc bàn, bao nhiêu chiếc ghế để thu được tiền lãi cao nhất?

CHƯƠNG III: HÀM SỐ BẬC HAI VÀ ĐỒ THỊ

§1. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

5 Lý thuyết

5.1 Hàm số. Tập xác định và tập giá trị của hàm số

1. Khái niệm hàm số

- Cho tập hợp số $D \neq \emptyset$ và tập số thực $\mathbb{R}$.
- Mỗi quy tắc ghép tương ứng một phần tử $x \in D$ với một và chỉ một phần tử $y \in \mathbb{R}$ được gọi là một hàm số.
- x gọi là biến số (ẩn số) và y là hàm số của x .

2. Tập xác định và tập giá trị của hàm số

- Tập hợp D gọi là tập xác định của hàm số.
- Tập hợp gồm tất cả giá trị của y (tương ứng với $x \in D$) gọi là tập giá trị của hàm số.

Chú ý.

- Với những hàm số cho bởi công thức, ta có thể viết thành $y = f(x)$ trong đó $f(x)$ là biểu thức chứa biến x .
Ví dụ. $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$.
- Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các giá trị của biến x làm cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

5.2 Đồ thị hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D .

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm có tọa độ $(x_0; y_0)$ với $x_0 \in D$ và $y_0 = f(x_0)$.

5.3 Hàm số đồng biến - Hàm số nghịch biến

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$. Ta nói:

- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Chú ý.

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ thì đồ thị của nó đi lên theo chiều trái sang phải.
- Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ thì đồ thị của nó đi xuống theo chiều trái sang phải.

6 Bài tập thực hành

6.1 Dạng 1: Tập xác định của hàm số

Câu 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $f(x) = \frac{3-2x}{3x+2}$; b) $f(x) = \sqrt{6-2x}$; c) $f(x) = \frac{x-4}{x^2-4}$; d) $f(x) = \frac{4x-1}{\sqrt{2x-4}}$.

Câu 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{3-x} - \sqrt{2x+6}$; b) $y = \frac{2}{(3-2x)\sqrt{x-1}}$; c) $y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{4-x}}$; d) $y = \frac{\sqrt{x-4}}{x^2-9}$.

Câu 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \frac{2}{(x-1)^2}$; b) $y = \frac{x+1}{x^2+2x+1}$; c) $y = \frac{3x}{x^2-6x+9}$; d) $y = \frac{\sqrt{1-4x}}{(x+1)^2}$.

Câu 4. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \frac{\sqrt{8-2x}}{x^2-16}$; b) $y = \frac{1}{2x-1} - \sqrt{3-x}$; c) $y = \sqrt{2x} + \sqrt{1-2x}$; d) $y = \frac{x-3}{(x-2)\sqrt{x+1}}$.

Câu 5. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x}{(x-1)(2-x)}$; b) $y = \frac{x+2}{(x-4)(x^2-4x)}$; c) $y = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x^2-9}$; d) $y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x-2m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $f(x)$ có tập xác định là $[2; +\infty)$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{m-x} + \sqrt{2x-m+1}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $f(x)$ xác định trên khoảng $(0; 1)$.

6.2 Dạng 2: Xét tính đồng biến - nghịch biến của hàm số

Câu 1. Xét tính đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau:

a) $f(x) = 2x - 1$. b) $f(x) = 2 - 3x$. c) $g(x) = 4x - 5$. d) $h(x) = 6 - 5x$.

Câu 2. Xét tính đồng biến, nghịch biến của các hàm số

a) $y = \frac{1}{x-3}$ trên khoảng $(-\infty; 3)$. b) $y = \frac{2}{4-x}$ trên khoảng $(4; +\infty)$.
c) $y = x^2 - 4$ trên khoảng $(-\infty; 0)$. d) $y = 2x^2$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 3. Xét tính đồng biến, nghịch biến của các hàm số

a) $y = \frac{1}{-x-5}$ trên khoảng $(-\infty; -5)$. b) $y = |x-3|$ trên khoảng $(3; +\infty)$.
c) $y = |x-4|$ trên khoảng $(-\infty; 4)$. d) $y = \frac{-2}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

6.3 Dạng 3: Bài toán thực tế

Câu 1. Một nhân viên bán hàng sẽ nhận được mức lương cơ bản là 5 triệu đồng mỗi tháng và một khoản hoa hồng là 5% nếu tổng doanh số trên 10 triệu đồng trong tháng. Ngoài ra, nếu doanh số bán hàng trong tháng đạt 20 triệu đồng hoặc nhiều hơn thì nhân viên bán hàng sẽ nhận thêm tiền thưởng là 500 nghìn đồng.

- Hãy biểu diễn thu nhập hàng tháng của nhân viên đó bằng một hàm số dựa theo doanh số bán hàng.
- Nếu doanh số trong một tháng của nhân viên đó là 30 triệu đồng thì nhân viên đó sẽ nhận được bao nhiêu tiền lương?

Câu 2. Một hiệu chuyên cho thuê xe máy niêm yết giá như sau: Giá thuê xe là 110 nghìn đồng một ngày cho ba ngày đầu tiên và 80 nghìn đồng một ngày cho mỗi ngày tiếp theo.

- Tính tổng tiền phải trả T (nghìn đồng) theo số ngày x mà khách thuê xe.
- Với số tiền là 2 triệu đồng thì khách có thể thuê xe trong tối đa bao nhiêu ngày liên tiếp?

Câu 3.

Giá phòng của một khách sạn là 1 triệu đồng cho hai ngày đầu tiên và 800 nghìn đồng cho mỗi ngày tiếp theo.

- Hãy biểu diễn tổng số tiền phải trả của khách trọ bằng một hàm số dựa theo số ngày khách ở tại khách sạn.
- Hãy tính số tiền khách phải trả khi ở khách sạn trong 2 tuần.

Câu 4.

Bảng giá cước của hãng taxi Xanh SM áp dụng cho khách gọi xe Vinfast VF E34 như sau:

	Giá 1km đầu tiên	Từ km tiếp theo đến km thứ 25	Từ km thứ 26 trở đi
Giá cước	20.000 VNĐ/km	15.500 VNĐ/km	12.500 VNĐ/km

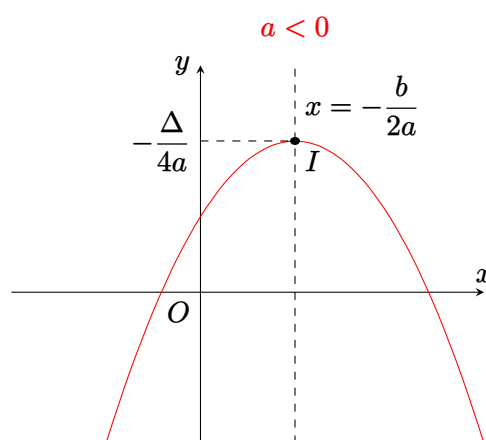
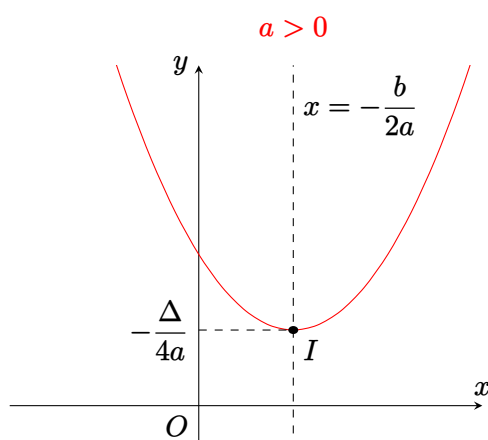
- Hãy biểu diễn số tiền phải trả của hành khách bằng một hàm số dựa theo quãng đường đi được.
- Tính số tiền phải trả của khách khi đi taxi của hãng trên với quãng đường 15km.
- Tính số tiền phải trả của khách khi đi taxi của hãng trên với quãng đường 40km.

§2. HÀM SỐ BẬC HAI

1 Lý thuyết

I. Đặc điểm cần nhớ

- Có dạng: $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)
- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Đồ thị: Parabol.
 - Trục đối xứng: $x = -\frac{b}{2a}$
 - Tọa độ đỉnh: $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ với $\Delta = b^2 - 4ac$
- Đồ thị:



- Sự biến thiên:
 - Với $a > 0$
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ và đồng biến trên $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$

- Với $a < 0$
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ và nghịch biến trên $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$

2 Bài tập thực hành

2.1 Dạng 1: Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số bậc hai

Câu 1. Vẽ đồ thị và lập bảng biến thiên của hàm số

a) $y = x^2 - 2x$

b) $y = -x^2 + 2x + 3$

c) $y = x^2 - 3x + 2$

d) $y = x^2 - 4x + 4$

e) $y = -x^2 - 4x + 5$

f) $y = -2x^2 + 6x - 1$

Câu 2. Tìm khoảng biến thiên và tập giá trị của các hàm số sau:

a) $y = x^2 - 6x + 4$

b) $y = 2x^2 + 16x - 25$

c) $y = -x^2 + 2x + 1$

d) $y = -4x^2 + 4$

2.2 Dạng 2: Xác định hệ số của hàm số bậc hai

Câu 1. Xác định parabol (P) biết

a) (P) : $y = ax^2 + bx + 2$ đi qua điểm $A(1; 0)$ và có trục đối xứng $x = \frac{3}{2}$.

b) (P) : $y = ax^2 + bx + 3$ đi qua $A(-1; 9)$ và có trục đối xứng $x = -2$.

c) (P) : $y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(2; -3)$ và có đỉnh $I(3; -4)$.

d) (P) : $y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(2; -3)$ và có đỉnh $I(1; -4)$.

e) (P) : $y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(1; 1)$, $B(-1; -3)$, $O(0; 0)$.

f) (P) : $y = x^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(1; 0)$ và đỉnh I có tung độ bằng -1 .

Câu 2. Xác định parabol (P) biết

a) (P) : $y = ax^2 + bx - 1$ đi qua $A(1; 2)$ và $N(-1; 3)$

b) (P) : $y = ax^2 + bx - 1$ đi qua $B(-1; 2)$ và đỉnh của tung độ bằng $-\frac{3}{2}$.

c) (P) : $y = ax^2 - 4x + c$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = 2$ và cắt Ox tại $M(3; 0)$.

d) (P) : $y = 2x^2 + bx + c$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$ và cắt trục tung tại $M(0; 4)$.

e) (P) : $y = ax^2 - 4x + c$ có đỉnh $I(-2; -1)$.

Câu 3. Xác định parabol (P) biết

a) (P) đi qua $A(1; 0)$, $B(-1; 6)$, $C(3; 2)$.

b) (P) đi qua $B(0; 8)$ và có đỉnh $I(3; -1)$

c) (P) đi qua $B(2; 3)$ và có đỉnh $I\left(1; \frac{7}{2}\right)$

d) (P) đi qua $C(2; -1)$, $D(-1; -7)$ và có trục đối xứng $x = 1$.

e) (P) có đỉnh $I(2, -16)$ và có giao điểm với trục hoành tại điểm M có hoành độ bằng -2 .

f) (P) đi qua $A(6, -4)$, có trục đối xứng $x = \frac{7}{2}$ và có giao điểm với trục tung tại điểm có tung độ bằng -10 .

Câu 4. Xác định parabol (P) : $y = ax^2 + bx + 3$ ($a \neq 0$) biết đồ thị hàm số có trục đối xứng $x = 3$, cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -16 và một trong hai giao điểm với trục hoành có hoành độ là -2 .

Câu 5. Xác định parabol (P) : $y = ax^2 + bx + 3$ ($a \neq 0$) biết hàm số y có giá trị nhỏ nhất là $\frac{3}{4}$ đạt được tại $x = \frac{1}{2}$ và có đồ thị đi qua điểm $A(1; 1)$.

Câu 6. Xác định parabol (P) : $y = ax^2 - 4x + c$ ($a \neq 0$). Xác định a và c trong mỗi trường hợp sau:

- Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi $x = 1$.
- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 5 và có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

2.3 Dạng 3: Tìm tham số để hàm số bậc hai đạt giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) bằng y_0

Câu 1. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = -2x^2 + 6x - 4m + 3$ đạt giá trị lớn nhất bằng 5.

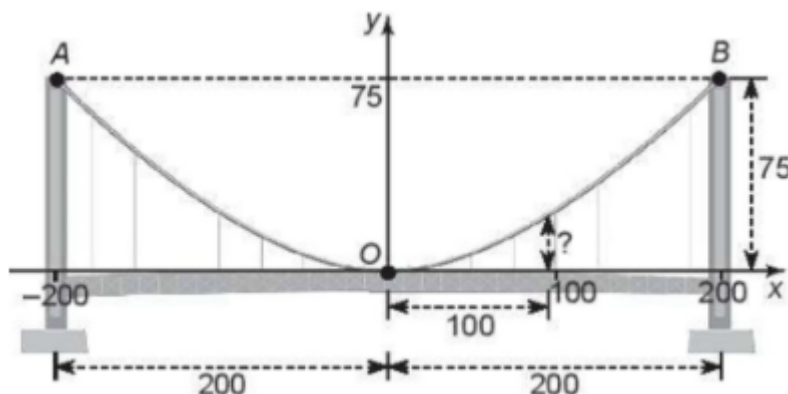
Câu 2. Cho hàm số $f(x) = 4x^2 - 4mx + m^2 - 2m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ bằng 3.

Câu 3. Xác định các hệ số của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ biết y đạt giá trị lớn nhất bằng 5 tại $x = -2$ và đồ thị hàm số của nó đi qua điểm $M(1; -1)$.

Câu 4. Xác định các hệ số của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ biết y đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4 tại $x = 2$ và đồ thị hàm số của nó cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 6.

2.4 Dạng 4: Bài toán thực tế

Câu 1. Một cây cầu treo có trọng lượng phân bố đều dọc theo chiều dài của nó. Cây cầu có trụ tháp đôi cao 75m so với mặt của cây cầu và cách nhau 400m. Các dây cáp có hình dạng parabol và được treo trên các đỉnh tháp. Các dây cáp chạm mặt cầu ở tâm của cây cầu. Tìm chiều cao của dây cáp tại điểm cách tâm của cây cầu 100m (giả sử mặt của cây cầu là bằng phẳng).



Câu 2. Hai bạn An và Bình đang bàn luận.

An nói: *Tớ đọc ở một tài liệu thấy nói rằng cổng Trường Đại Học Bách Khoa Hà Nội có dạng một parabol, khoảng cách giữa hai chân cổng là 8m và chiều cao của cổng tính từ một điểm trên mặt đất cách chân cổng 0,5m là 2,93m. Từ đó tớ tính ra được chiều cao của cổng parabol đó là 12m.*

Sau một hồi suy nghĩ, Bình nói: *Nếu dữ kiện như bạn nói, thì chiều cao của cổng parabol mà bạn tính ra ở trên là không chính xác.*



Dựa vào thông tin mà An đọc được, hãy tính chiều cao của cổng Trường để xem kết quả bạn An tính được có chính xác không?

CHƯƠNG IV: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

§1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° đến 180°

3 Lý thuyết

3.1 Giá trị lượng giác

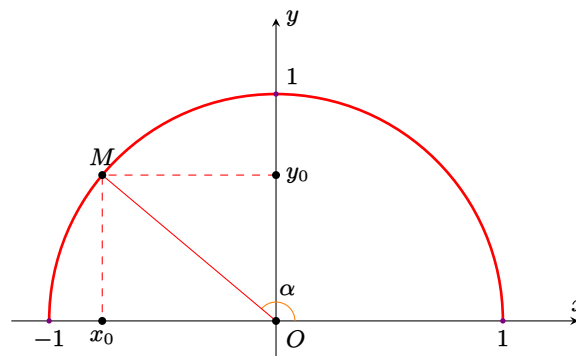
1. Nửa đường tròn đơn vị

- Trong mặt phẳng Oxy , nửa đường tròn đơn vị là nửa đường tròn có tâm O và bán kính bằng 1, nằm phía trên trục hoành.

2. Giá trị lượng giác của góc từ 0° đến 180°

Xét góc $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$

Trên nửa đường tròn đơn vị lấy điểm $M(x_0; y_0)$ sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$.



Các giá trị lượng giác của góc α :

- $\sin \alpha = y_0$.
- $\cos \alpha = x_0$.
- $\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0} \ (x_0 \neq 0)$.
- $\cot \alpha = \frac{x_0}{y_0} \ (y_0 \neq 0)$.

3. Chú ý.

- Nếu α nhọn thì $\sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0, \tan \alpha > 0, \cot \alpha > 0$.
- Nếu α tù thì $\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0, \tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0$.
- $\tan \alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \neq 90^\circ$.
- $\cot \alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \neq 0^\circ$ và $\alpha \neq 180^\circ$.

3.2 Quan hệ giữa các giá trị lượng giác của các góc phụ nhau, bù nhau

a) Hai góc bù nhau: α và $180^\circ - \alpha$

- $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$
- $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$
- $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$

b) Hai góc phụ nhau: α và $90^\circ - \alpha$.

- $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
- $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- $\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$
- $\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$

4 Bài tập thực hành

4.1 Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1. Giá trị của $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (C) 1. (D) $\sqrt{3}$.

Câu 2. Giá trị của $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

- (A) 2. (B) $\frac{2}{\sqrt{3}}$. (C) $\frac{1 + \sqrt{3}}{3}$. (D) $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Câu 3. Khẳng định nào sau đây sai?

- (A) $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$. (B) $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$.
(C) $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$. (D) $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = 1$.

Câu 4. Cho α là góc tù. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\cos \alpha > 0$. (B) $\sin \alpha < 0$. (C) $\cot \alpha > 0$. (D) $\tan \alpha < 0$.

Câu 5. Khẳng định nào sau đây sai?

- (A) $\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha)$. (B) $\cot \alpha = \tan (90^\circ - \alpha)$.
(C) $\tan \alpha = \cot (90^\circ - \alpha)$. (D) $\cos \alpha = \cot (90^\circ - \alpha)$.

Câu 6. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\tan \alpha = \tan (180^\circ - \alpha)$. (B) $\cos \alpha = -\sin (180^\circ - \alpha)$.
(C) $\sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha)$. (D) $\cot \alpha = -\tan (180^\circ - \alpha)$.

Câu 7. Tam giác ABC có $\hat{A} = 15^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$, giá trị của $\tan C$ bằng

- (A) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. (B) $-\sqrt{3}$. (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. (D) $\sqrt{3}$.

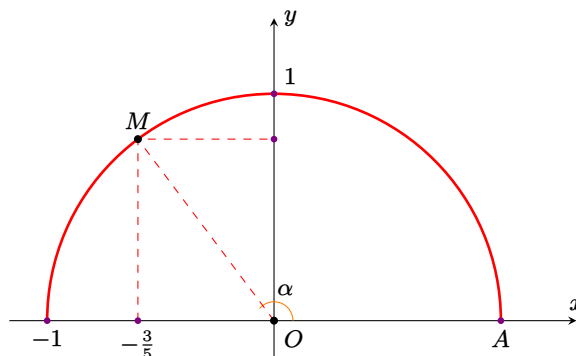
Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = 135^\circ$. Tích hoành độ và tung độ của điểm M bằng

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. (C) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$. (D) $-\frac{1}{2}$.

Câu 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = 150^\circ$. Gọi N là điểm đối xứng của M qua trục tung. Giá trị của $\tan \widehat{xON}$ bằng

- (A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. (B) $\sqrt{3}$. (C) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. (D) $-\sqrt{3}$.

Câu 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đơn vị sao cho $\cos \widehat{xOM} = -\frac{3}{5}$.



Diện tích tam giác AOM bằng

- (A) $\frac{3}{5}$. (B) $\frac{3}{10}$. (C) $\frac{2}{5}$. (D) $\frac{4}{5}$.

4.2 Câu hỏi tự luận

Câu 1. Không dùng máy tính, chứng minh rằng:

a) $\sin 138^\circ = \sin 42^\circ$.

b) $\cos 70^\circ = \sin 20^\circ$.

c) $\cot 140^\circ = -\tan 50^\circ$.

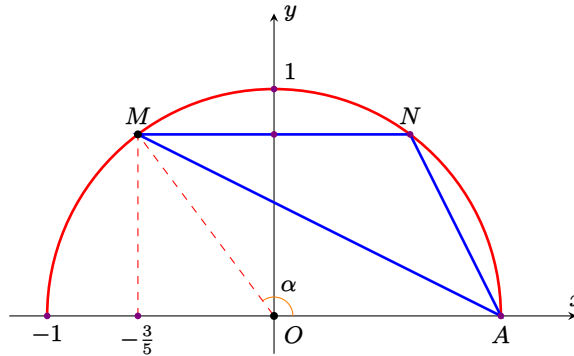
d) $\tan 125^\circ = -\cot 35^\circ$.

Câu 2. Chứng minh trong tam giác ABC ta có

a) $\tan B = -\tan(A + C)$;

b) $\sin C = \sin(A + B)$.

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = 150^\circ$. Lấy N đối xứng với M qua trục tung.



Tính diện tích tam giác MAN .

Câu 4. Tính giá trị biểu thức $A = \tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \tan 3^\circ \times \dots \times \tan 88^\circ \times \tan 89^\circ$.

Câu 5. Tính giá trị biểu thức $A = \cot 5^\circ \times \cot 10^\circ \times \cot 15^\circ \times \dots \times \cot 80^\circ \times \cot 85^\circ$.

§2. ĐỊNH LÝ COSIN VÀ ĐỊNH LÝ SIN

1 Lý thuyết

1.1 Định lý cosin trong tam giác

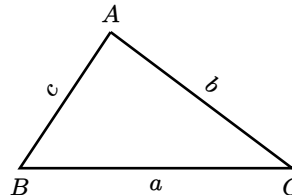
1. Định lý cosin

Cho tam giác ABC . Đặt $AB = c, BC = a, CA = b$. Ta có:

• $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

• $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$

• $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$



2. Hệ quả (công thức tính góc)

a) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

b) $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

c) $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

1.2 Định lý sin trong tam giác

1. Định lý sin

Trong tam giác ABC với $AB = c, BC = a, CA = b$ ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

2. Hệ quả

a) $a = 2R \sin A$

b) $b = 2R \sin B$

c) $c = 2R \sin C$

d) $\sin A = \frac{a}{2R}$

e) $\sin B = \frac{b}{2R}$

f) $\sin C = \frac{c}{2R}$

1.3 Các công thức tính diện tích tam giác

Cho tam giác ABC với $AB = c, BC = a, CA = b$.

Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp $\triangle ABC$.

Gọi p là nửa chu vi $\triangle ABC$. Tức là $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Các công thức diện tích tam giác:

- $S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$
- $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B$
- $S = \frac{abc}{4R}$
- $S = p.r$ với $p = \frac{a+b+c}{2}$
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

2 Bài tập thực hành

Câu 1. Cho tam giác DEF có $\widehat{D} = 120^\circ$, $DE = 6\text{cm}$ và $DF = 10\text{cm}$.

a) Tính độ dài cạnh EF .

b) Tính số đo các góc E và F .

Câu 2. Cho tam giác MNP có $\widehat{M} = 75^\circ$, $\widehat{N} = 60^\circ$, $NP = 16\text{cm}$. Tính độ dài các cạnh MP , NP và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP .

Câu 3. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $BC = 7$, $CA = 8$. Tính số đo góc A .

Câu 4. Tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 1$ và $\widehat{A} = 60^\circ$. Tính độ dài BC .

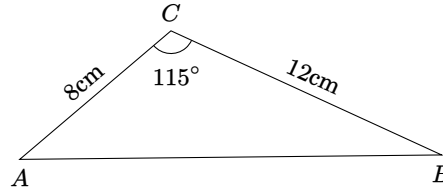
Câu 5. Tam giác ABC có đoạn thẳng nối trung điểm của AB và BC bằng 3. Cạnh $AB = 9$ và $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC .

Câu 6. Tam giác ABC có $AB = \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{3}$, $\widehat{C} = 45^\circ$. Tính độ dài cạnh BC .

Câu 7. Tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$ và $AB = 5$. Tính độ dài cạnh AC .

Câu 8. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng 1cm và có $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh AC .

Câu 9. Tính diện tích tam giác ABC trong hình sau:



Câu 10. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao $AH = 32\text{cm}$. Tỉ lệ $AB : AC = 3 : 4$. Cạnh nhỏ nhất của tam giác ABC bằng bao nhiêu?

Câu 11. Cho tam giác ABC có $AC = 7\text{cm}$, $AB = 5\text{cm}$ và $\cos A = \frac{3}{5}$.

- (a) Tính BC , $\sin A$ và diện tích $\triangle ABC$.
- (b) Tính độ dài đường cao AH và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Câu 12. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$, $b = 8\text{cm}$ và $c = 5\text{cm}$.

- a) Tính a và diện tích $\triangle ABC$.
- b) Tính độ dài đường cao AH và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Câu 13. Cho tam giác ABC có $a = 24$, $b = 26$, $c = 30$.

- a) Tính diện tích tam giác ABC .
- b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Câu 14. Cho tam giác ABC có $AC = 4$, $BC = 5$ và $\cos(A + B) = -\frac{1}{8}$. Tính độ dài cạnh AB .

Câu 15. Cho tam giác ABC có $\sin(A + B) = \frac{1}{2}$, $\sin(B + C) = \frac{2}{3}$, $BC = 4$. Tính độ dài cạnh AB và AC .

Câu 16. Cho tam giác MNP có $MN = 10$, $MP = 20$ và $\widehat{M} = 42^\circ$.

- a) Tính diện tích tam giác MNP .
- b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP . Tính diện tích tam giác ONP .

Câu 17. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 6$, $AD = 8$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tính độ dài các đường chéo AC và BD .

Câu 18. Cho tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh rằng

$$1 + \cos A = \frac{(a + b + c)(b + c - a)}{2bc}$$

Câu 19. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Chứng minh $S_{GAB} = S_{GAC} = S_{GBC}$.

Câu 20. Cho tam giác ABC có các góc thỏa mãn $\sin C = 2 \sin B \cos A$. Chứng minh tam giác ABC cân.

§3. GIẢI TAM GIÁC VÀ ỨNG DỤNG THỰC TẾ

1 Khái niệm giải tam giác

- Là tìm số đo các góc và các cạnh của tam giác dựa trên các yếu tố đã biết.

Ví dụ

Giải tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) $\hat{B} = 82^\circ, a = 5, c = 8$.

b) $a = 10 \text{ cm}, \hat{B} = 45^\circ, \hat{C} = 62^\circ$.

Giải

a) Theo định lý cosin:

- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 82^\circ \approx 77,87$
- Suy ra $b \approx 8,82$.
- $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \approx \frac{8,82^2 + 8^2 - 5^2}{2 \cdot 8,82 \cdot 8} \approx 0,83$
- Suy ra $\hat{A} \approx 33^\circ 54'$.
- Suy ra $\hat{C} \approx 180^\circ - \hat{B} - \hat{A} \approx 64^\circ 6'$

b) $\hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} = 180^\circ - 45^\circ - 62^\circ = 73^\circ$.

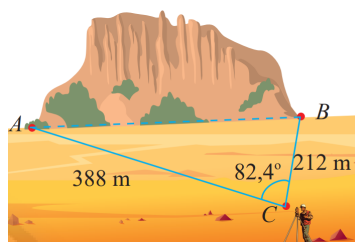
Theo định lý sin:

- $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{10 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 73^\circ} \approx 7,39 \text{ (m)}$
- $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{10 \sin 62^\circ}{\sin 73^\circ} \approx 9,23 \text{ (m)}$

2 Ứng dụng giải bài toán đo đạc trong thực tế

2.1 Bài toán đo khoảng cách.

Một đường hầm được dự kiến xây xuyên qua một ngọn núi. Để ước tính chiều dài đường hầm, kĩ sư thực hiện các phép đo và cho ra kết quả như hình sau.



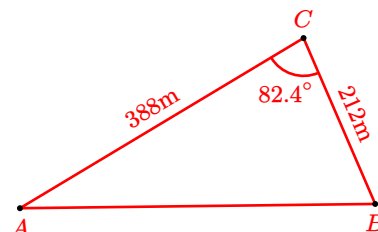
Tính chiều dài đường hầm dự trên kết quả đã đo.

Giải

Theo định lý cosin trong $\triangle ABC$:

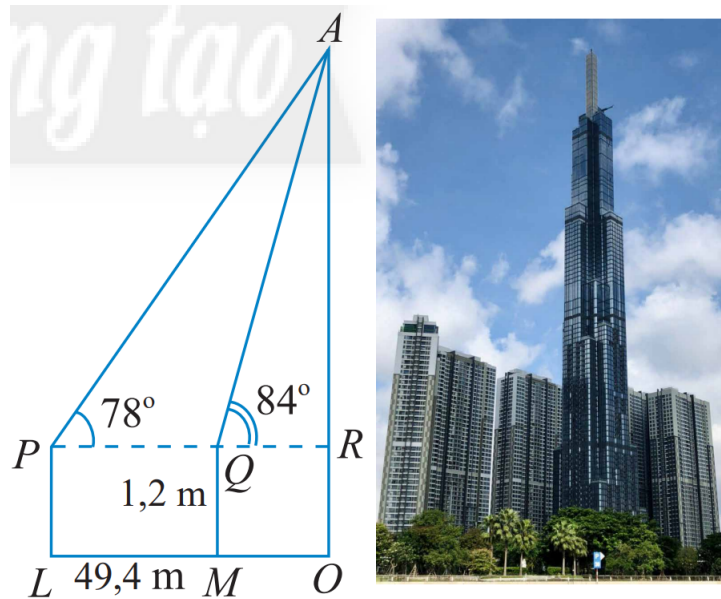
$$\begin{aligned} AB^2 &= CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CA \cdot CB \cdot \cos C \\ &= 388^2 + 212^2 - 2 \cdot 388 \cdot 212 \cdot \cos 82,4^\circ \\ &\approx 173730 \end{aligned}$$

Chiều dài đường hầm: $AB \approx \sqrt{173730} \approx 417 \text{ m}$.



2.2 Bài toán đo chiều cao vật thể

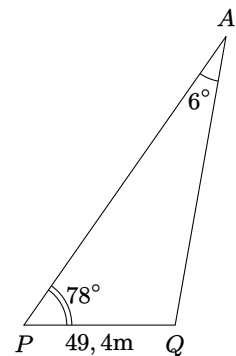
Để xác định chiều cao của một toà nhà, một người đứng tại điểm M , sử dụng giác kế nhìn thấy đỉnh toà nhà với góc nâng $\widehat{RQA} = 84^\circ$, người đó lùi ra xa một khoảng cách $LM = 49,4\text{m}$ thì thấy đỉnh toà nhà với góc nâng $\widehat{RPA} = 78^\circ$.



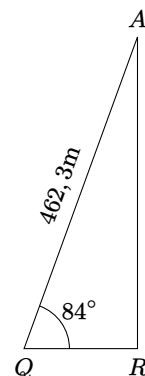
Biết khoảng cách từ mặt đất đến ống ngắm của giác kế là $PL = QM = 1,2\text{m}$. Tính chiều cao toà nhà.

Giải

- Trước tiên ta tính độ dài AQ .
- Xét $\triangle APQ$ có:
 $PQ = 49,4$ và $\widehat{APQ} = 78^\circ$,
 $\widehat{PAQ} = \widehat{AQR} - \widehat{APQ} = 84^\circ - 78^\circ = 6^\circ$.
- Theo định lý sin ta có: $\frac{AQ}{\sin P} = \frac{PQ}{\sin A} \Rightarrow AQ = \frac{49,4 \times \sin 78^\circ}{\sin 6^\circ} \approx 462,3\text{ (m)}$



- Xét $\triangle AQR$ vuông tại R :
- $\sin Q = \frac{AR}{AQ} \Rightarrow AR = AQ \cdot \sin Q \approx 462,3 \times \sin 84^\circ \approx 460\text{ (m)}$
- Vậy chiều cao toà nhà là: $AO = AR + RO \approx 460 + 1,2 = 461,2\text{ (m)}$



3 Bài tập thực hành

Câu 1. Giải tam giác ABC trong các trường hợp sau:

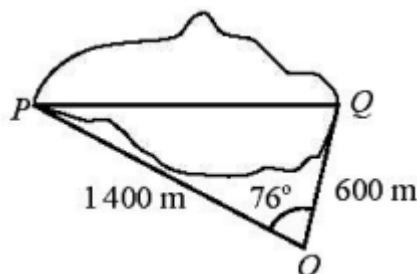
a) $\hat{A} = 45^\circ$, $AB = 4$, $AC = 6$.

b) $BC = 10$, $\hat{B} = 50^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$.

c) $AB = 15$, $AC = 25$, $BC = 30$.

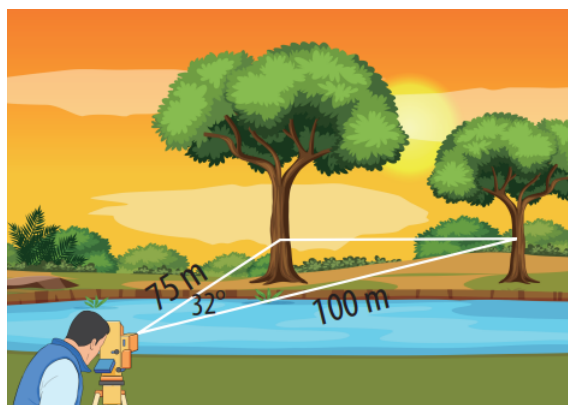
d) $BC = 10$, $AC = 20$, $\hat{C} = 80^\circ$.

Câu 2. Một người đứng ở điểm O cách điểm P và điểm Q của một hồ nước lần lượt là 1400m và 600 m, người quan sát này nhìn thấy một góc 76° .

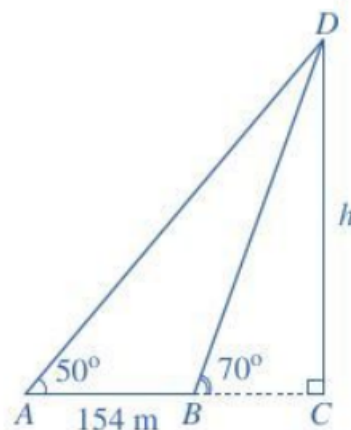
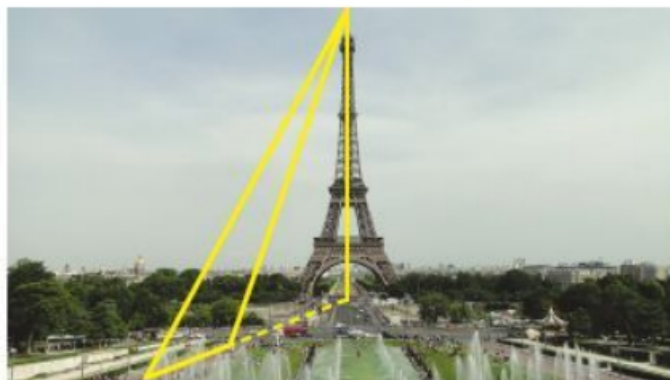


Tính khoảng cách giữa hai điểm P và Q của hồ nước trên.

Câu 3. “Với số liệu đo được từ một bên bờ sông như hình vẽ bên dưới, hãy giúp nhân viên đo đạc tính khoảng cách giữa hai cái cây bên bờ sông.”



Câu 4. Bạn An đi tham quan tháp Eiffel ở Pháp và muốn ước tính độ cao của tháp. Sau khi quan sát, bạn An đã minh họa lại kết quả đo đạc như hình bên. Em hãy giúp An tính độ cao h của tháp Eiffel.



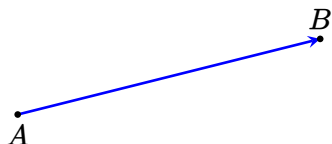
CHƯƠNG V: VECTƠ

§1. KHÁI NIỆM VECTƠ

4 Lý thuyết

a) Vectơ là một đoạn thẳng có hướng.

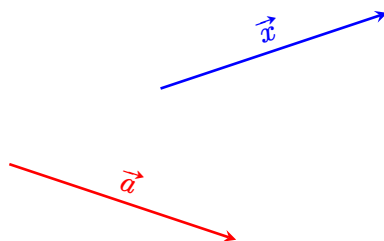
b) Vectơ có điểm đầu là A điểm cuối là B kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.



c) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là độ dài của đoạn thẳng AB . Kí hiệu: $|\overrightarrow{AB}|$.

Vậy $|\overrightarrow{AB}| = AB$.

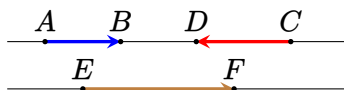
d) Ta kí hiệu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{u}, \vec{v}, \dots$ khi đề cập đến các vectơ không rõ điểm đầu và điểm cuối.



e) Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ được gọi là *giá của vectơ*.

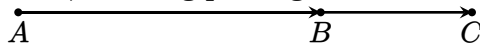


f) Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc bằng nhau.



g) Hai vectơ cùng phương thì cùng hướng hoặc ngược hướng.

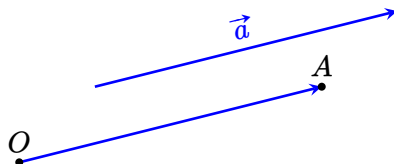
h) Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương.



i) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài. Kí hiệu: $\vec{a} = \vec{b}$.

j) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là đối nhau nếu chúng ngược hướng và cùng độ dài. Kí hiệu: $\vec{a} = -\vec{b}$.

k) Cho điểm O và vectơ $\vec{a}$. Tồn tại duy nhất điểm A sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.



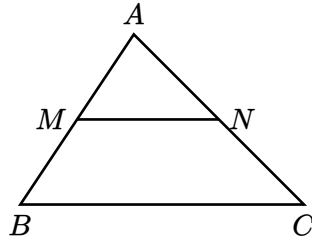
l) Vectơ-không $\vec{0}$ là vectơ có điểm đầu trùng điểm cuối. Do đó $|\vec{0}| = 0$.

Vectơ $\vec{0}$ cùng hướng với mọi vectơ.

5 Bài tập thực hành

5.1 Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1. Cho tam giác ABC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AB, AC .



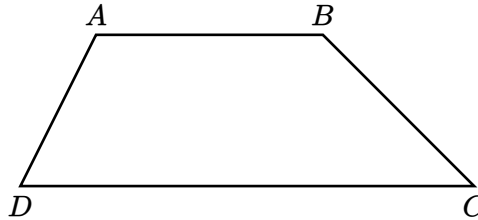
Hỏi cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

- (A) $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$. (B) $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{CA}$. (C) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MB}$. (D) $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CB}$.

Câu 2. Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD của hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

- (A) $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$. (B) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$. (C) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. (D) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$.

Câu 3. Cho hình thang $ABCD$ có AB và CD song song với nhau.



Phát biểu nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. (B) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng.
(C) $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{CB}$ ngược hướng. (D) $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

Câu 4. Cho $\vec{a} = \vec{b}$. Phát biểu nào sau đây sai?

- (A) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng độ dài. (B) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.
(C) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương. (D) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

Câu 5. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Phát biểu nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$. (B) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.
(C) $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ cùng hướng. (D) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$.

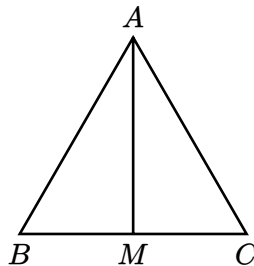
Câu 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4$ và $AC = 5$. Độ dài vectơ $\overrightarrow{BC}$ bằng

- (A) $\sqrt{41}$. (B) 9. (C) 3. (D) 1.

Câu 7. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4$ và $AD = 4$. Độ dài vectơ $\overrightarrow{CA}$ bằng

- (A) $\sqrt{7}$. (B) 5. (C) 7. (D) 25.

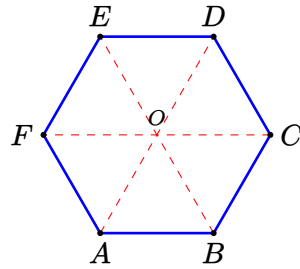
Câu 8. Cho tam giác đều cạnh $2a$, gọi M là trung điểm của BC .



Khi đó $|\overrightarrow{AM}|$ bằng

- (A) $2a\sqrt{3}$. (B) $2a$. (C) $4a$. (D) $a\sqrt{3}$.

Câu 9. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Số vectơ là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh lục giác đã cho là



- (A) 2. (B) 3. (C) 5. (D) 6.

Câu 10. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Số vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AF}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh lục giác đã cho là

- (A) 3. (B) 2. (C) 6. (D) 5.

Câu 11. Trong mặt phẳng cho hai điểm phân biệt A, B . Tập hợp tất cả điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AM}$ ngược hướng với $\overrightarrow{AB}$ là hình gì?

- (A) Tia AB trừ điểm A . (B) Đoạn thẳng AB trừ điểm A .
(C) Đường thẳng AB trừ điểm A . (D) Tia đối của tia AB trừ điểm A .

Câu 12. Trong mặt phẳng cho hai điểm phân biệt A, B . Tập hợp tất cả điểm M thoả mãn $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{AB}|$ là hình gì?

- (A) Đoạn thẳng AB . (B) Đường trung trực của đoạn thẳng AB .
(C) Đường tròn tâm A bán kính AB . (D) Đường tròn tâm B bán kính AB .

5.2 Câu hỏi tự luận

Câu 1. Cho hình thang $ABCD$ với hai đáy AB và CD , gọi O là giao điểm hai đường chéo.

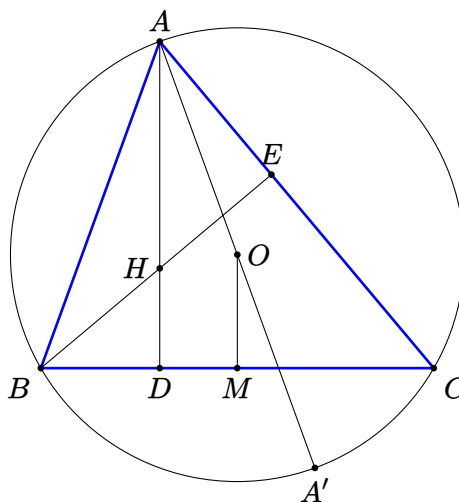
- a) Gọi tên hai vectơ cùng hướng với $\overrightarrow{AO}$; b) Gọi tên hai vectơ ngược hướng với $\overrightarrow{AB}$.

Câu 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có O là giao điểm hai đường chéo. Hãy chỉ ra một cặp vectơ:

- a) cùng hướng; b) ngược hướng; c) bằng nhau.

Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , có cạnh bằng 3cm. Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OB}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC không vuông, với trực tâm H , nội tiếp đường tròn (O) . Kẻ đường kính AA' của đường tròn (O) .



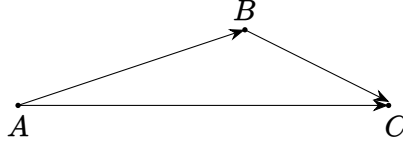
- a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{A'C}$;
b) Gọi M là trung điểm cạnh BC . Tìm mối quan hệ về phương, hướng và độ dài của hai vectơ $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{OM}$.

§2. TỔNG VÀ HIỆU HAI VECTƠ

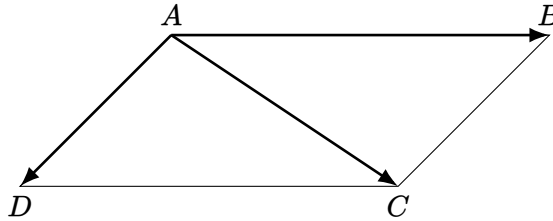
1 Lý thuyết

1.1 Quy tắc cộng hai vectơ

a) Quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



b) Quy tắc hình bình hành: Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$



1.2 Tính chất phép cộng hai vectơ

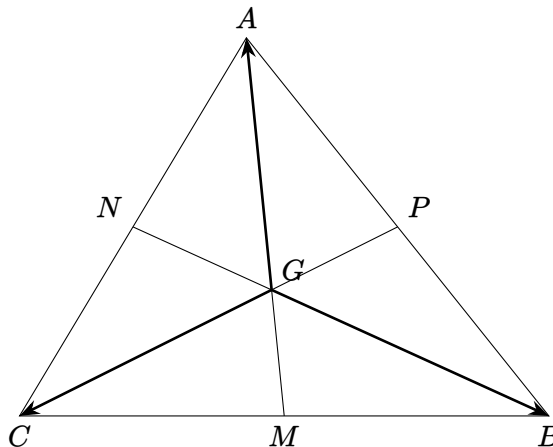
- Tính giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- Tính kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- Với mọi $\vec{a}$ ta có: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

1.3 Hiệu của hai vectơ

- a) Hiệu của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là tổng của $\vec{a}$ và vectơ đối của $\vec{b}$. Tức là $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.
- b) Quy tắc “hiệu chung gốc”: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

1.4 Tính chất vectơ của trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

- a) M là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
- b) G là trọng tâm của $\triangle ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.



2 Bài tập thực hành

2.1 Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1. Cho ba điểm A, B, M phân biệt. Điều kiện cần và đủ để M là trung điểm của đoạn thẳng AB là

☐ (A) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

☐ (C) $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.

☐ (B) $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$.

☐ (D) $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ ngược hướng.

Câu 2. Cho ba điểm M, N, P phân biệt. Phát biểu nào sau đây đúng?

☐ (A) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = -\overrightarrow{MP}$.

☐ (C) $-\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.

☐ (B) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.

☐ (D) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.

Câu 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

☐ (A) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$.

☐ (C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA}$.

☐ (B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

☐ (D) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AC}$.

Câu 4. Cho các điểm A, B, O . Khẳng định nào sau đây đúng?

☐ (A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

☐ (C) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$.

☐ (B) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$.

☐ (D) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Câu 5. Cho tam giác ABC . Điều kiện cần và đủ để G là trọng tâm của tam giác ABC là

☐ (A) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC}$.

☐ (C) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AG}$.

☐ (B) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

☐ (D) $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB}$.

Câu 6. Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Khẳng định nào sau đây đúng?

☐ (A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

☐ (C) $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$.

☐ (B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$.

☐ (D) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$.

2.2 Câu hỏi tự luận

Câu 1. Cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành. Gọi O là giao điểm hai đường chéo và E là trung điểm của AD . Gọi G là giao điểm của BE và AC . Tính:

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD}$.

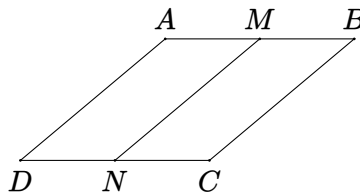
Câu 2. Cho tứ giác $ABCD$, tìm các vectơ sau:

a) $\vec{m} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{BC}$;

b) $\vec{n} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$;

c) $\vec{m} - \vec{n}$.

Câu 3. Cho hình thoi $ABCD$ và M là trung điểm cạnh AB , N là trung điểm cạnh CD .



Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MN}$.

Câu 4. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O cạnh a . Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$; $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}|$; $|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}|$.

Câu 5. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh

a) $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{BC}$

Câu 6. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh

$$a) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC}$$

$$b) \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$$

$$c) \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MB}$$

Câu 7. Chứng minh Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh

$$a) \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$$

$$b) \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$$

$$c) \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} \text{ với } O \text{ là điểm bất kì.}$$

Câu 8. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Lấy M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh

$$a) \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$b) \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

$$c) \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$$

Câu 9. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a . Tính độ dài các vectơ:

$$a) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC};$$

$$b) \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}.$$

Câu 10. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Chứng minh:

$$a) \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA};$$

$$b) \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB};$$

$$c) \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC};$$

$$d) \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}.$$

Câu 11. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O và có cạnh bằng $2a$.

Cho hai điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

Tìm độ dài các vectơ $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{NO}$.

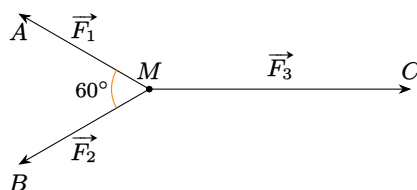
Câu 12. Cho tam giác ABC . Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm các cạnh BC, CA, AB .

$$a) \text{Xác định các vectơ } \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE};$$

$$b) \text{Xác định điểm } M \text{ thỏa mãn } \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{MA};$$

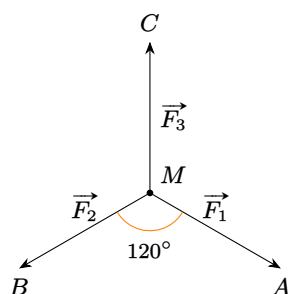
$$c) \text{Chứng minh } \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}.$$

Câu 13. Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}, \vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ và $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và làm cho vật đứng yên.



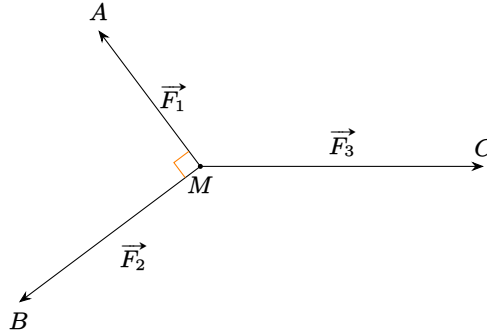
Cho biết độ lớn của $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều là $100N$ và $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Tìm độ lớn của lực $\vec{F}_3$.

Câu 14. Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}, \vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ và $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và làm cho vật đứng yên.



Cho biết độ lớn của $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều là $400N$ và $\widehat{AMB} = 120^\circ$. Tìm độ lớn của lực $\vec{F}_3$.

Câu 15. Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}, \vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ và $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và làm cho vật đứng yên.



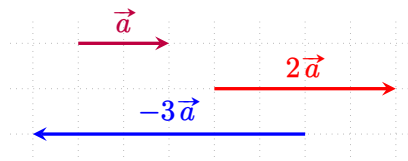
Cho biết $|\vec{F}_1| = 30N$ và $|\vec{F}_2| = 40N$ và $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tìm độ lớn của lực $\vec{F}_3$.

§3. TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

1 Lý thuyết

1.1 Tích của một số với một vectơ

- Cho vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ và một số $k \neq 0$.
- Tích của $\vec{a}$ với số k (kí hiệu là $k\vec{a}$) là một vectơ có tính chất:
 - $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$.
 - $k\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$.
 - $k\vec{a}$ có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$



Quy ước: $0\vec{a} = \vec{0}$ và $k\vec{0} = \vec{0}$.

1.2 Tính chất

Với hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bất kì và $h, k \in \mathbb{R}$ ta có:

- a) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$; b) $(h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$; c) $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$;
 d) $1.\vec{a} = \vec{a}$; e) $(-1).\vec{a} = -\vec{a}$.

1.3 Điều kiện để hai vectơ cùng phương và ba điểm thẳng hàng

- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ (với $\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương $\Leftrightarrow \exists k$ sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.
- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \exists k \neq 0$ sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

2 Bài tập thực hành

2.1 Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1. Cho đoạn thẳng AB và O là trung điểm của AB . Khẳng định nào sau đây đúng?
 (A) $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{OB}$. (B) $\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{AB}$. (C) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{OA}$. (D) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{OB}$.

Câu 2. Cho tam giác ABC và M là trung điểm của cạnh BC , G là trọng tâm của tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{GM}$. (B) $\overrightarrow{AM} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{GM}$. (C) $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{GM}$. (D) $\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{GM}$.

Câu 3. Cho $\vec{a} \neq \vec{0}$. Khẳng định nào sau đây sai?

(A) $\vec{a}$ và $4\vec{a}$ cùng phương. (B) $\vec{a}$ và $-2\vec{a}$ cùng phương.
 (C) $\vec{a}$ và $3\vec{a}$ không cùng phương. (D) $\vec{a}$ và $-5\vec{a}$ ngược hướng.

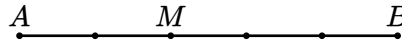
Câu 4. Cho đoạn thẳng AB và điểm C nằm giữa hai điểm A, B . Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AC} = -\frac{AC}{AB}\overrightarrow{AB}$. (B) $\overrightarrow{AC} = \frac{AC}{AB}\overrightarrow{AB}$.
 (C) $\overrightarrow{AC} = -\frac{AB}{AC}\overrightarrow{AB}$. (D) $\overrightarrow{AC} = \frac{AB}{AC}\overrightarrow{AB}$.

Câu 5. Cho đoạn thẳng BC và điểm A nằm giữa hai điểm B, C . Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AC} = \frac{AC}{AB}\overrightarrow{AB}$. (B) $\overrightarrow{AC} = -\frac{AB}{AC}\overrightarrow{AB}$.
 (C) $\overrightarrow{AC} = -\frac{AC}{AB}\overrightarrow{AB}$. (D) $\overrightarrow{AC} = \frac{AB}{AC}\overrightarrow{AB}$.

Câu 6. Cho đoạn thẳng AB và điểm M nằm giữa hai điểm AB như hình vẽ dưới đây:



Khẳng định nào sau đây sai?

(A) $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MB}$. (B) $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BA}$. (C) $\overrightarrow{MA} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$. (D) $\overrightarrow{AB} = \frac{5}{3}\overrightarrow{MB}$.

Câu 7. Cho đoạn thẳng MN và điểm I nằm giữa hai điểm MN như hình vẽ dưới đây:

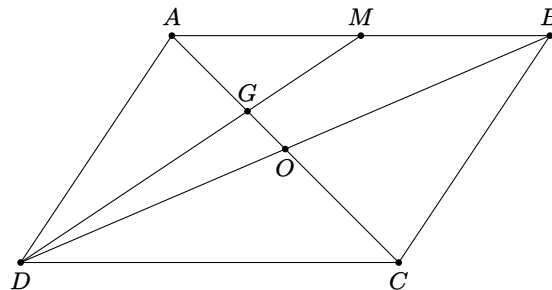


Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $7\overrightarrow{NI} + 3\overrightarrow{MN} = \vec{0}$. (B) $3\overrightarrow{IM} + 4\overrightarrow{IN} = \vec{0}$. (C) $7\overrightarrow{IM} - 4\overrightarrow{MN} = \vec{0}$. (D) $4\overrightarrow{IM} + 3\overrightarrow{NI} = \vec{0}$.

2.2 Câu hỏi tự luận

Câu 1. Cho hình bình hành $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác ABD .

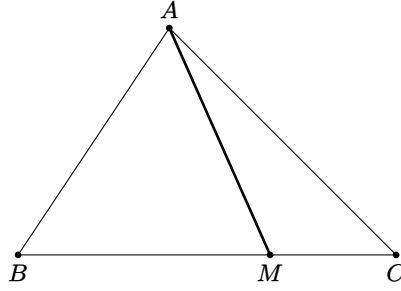


Chứng minh $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$.

Câu 2. Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến và D là trung điểm của đoạn thẳng AM .

- Chứng minh $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$;
- Chứng minh $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OD}$, với O là điểm tùy ý.

Câu 3. Cho tam giác ABC . Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = 2MC$.



- a) Chứng minh $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$; b) Chứng minh $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AM}$.

Câu 4. Cho hai điểm phân biệt A và B . Tìm điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$.

Câu 5. Cho hai điểm phân biệt A và B . Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{AB}$.

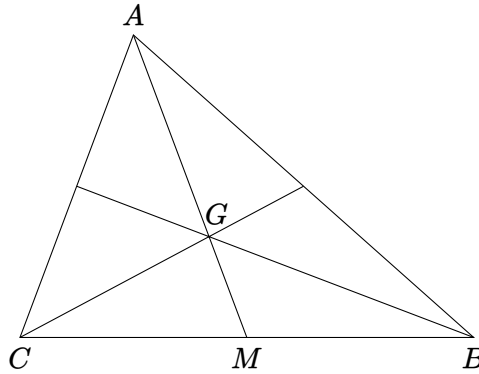
Câu 6. Cho hai điểm phân biệt A và B . Tìm điểm K sao cho $3\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$.

Câu 7. Cho hai điểm phân biệt A và B . Tìm điểm F sao cho $4\overrightarrow{AF} - 3\overrightarrow{BF} = \vec{0}$.

Câu 8. Cho tam giác ABC .

- a) Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$. b) Tìm điểm K sao cho $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{BC}$.

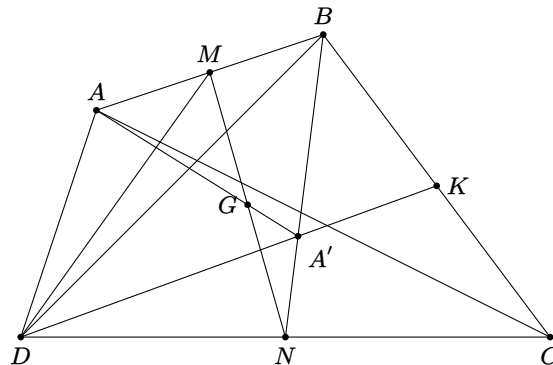
Câu 9. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC và G là trọng tâm.



Chứng minh:

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$. b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$ với O tùy ý.

Câu 10. Cho tứ giác $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD . Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN , A' là trọng tâm của tam giác BCD .



Chứng minh:

- a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$; b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$;
c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OG}$ với O tùy ý; d) $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$.

§4. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

3 Lý thuyết

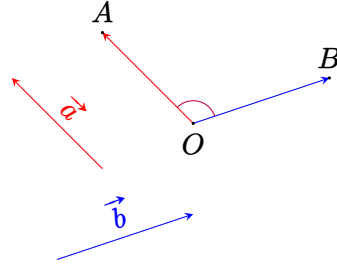
3.1 Góc giữa hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$.

Kí hiệu $(\vec{a}, \vec{b})$ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Từ điểm O bất kì vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Khi đó $(\vec{a}, \vec{b}) = \widehat{AOB}$



Chú ý.

- $0 \leq (\vec{a}, \vec{b}) \leq 180^\circ$.
- Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ ta nói $\vec{a} \perp \vec{b}$.
- $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.
- Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng thì $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$.
- Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng thì $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$.
- Trường hợp $\vec{a}$ hoặc $\vec{b}$ là $\vec{0}$ thì quy ước số đo góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là tùy ý từ 0° đến 180° .

3.2 Tích vô hướng của hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$.

Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, cho bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Chú ý.

- $\vec{a} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{a} = 0$.
- Bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.
- $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$.

3.3 Tính chất của tích vô hướng

Với $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì và số $k \in \mathbb{R}$ tùy ý ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$.

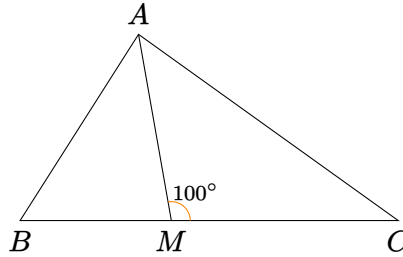
3.4 Ứng dụng của tích vô hướng

Trong vật lý, tích vô hướng giúp tính công A sinh ra bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển là $\vec{d}$. Ta có: $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$

4 Bài tập thực hành

4.1 Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1. Cho tam giác ABC có M là điểm trên cạnh BC như hình vẽ bên dưới.



Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM}) = 0^\circ$. (B) $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ$.
(C) $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{CM}) = 80^\circ$. (D) $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CM}) = 80^\circ$.

Câu 2. Cho tam giác ABC vuông tại A và $\widehat{B} = 50^\circ$. Khẳng định nào sau đây sai?

- (A) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$. (B) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$.
(C) $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$. (D) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^\circ$.

Câu 3. Cho tam giác MNP . Giá trị của biểu thức $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$ bằng

- (A) $MN \cdot MP \cdot \cos \widehat{NMP}$. (B) $-MN \cdot MP \cdot \cos \widehat{NMP}$.
(C) $MN \cdot MP \cdot \cos \widehat{MNP}$. (D) $MN \cdot NP \cdot \cos \widehat{NMP}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC . Giá trị của biểu thức $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$ bằng

- (A) $-AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$. (B) $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$.
(C) $-AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{ACB}$. (D) $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{ABC}$.

Câu 5. Cho tam giác ABC . Giá trị của biểu thức $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng

- (A) $AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$. (B) $AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{BAC}$.
(C) $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{ABC}$. (D) $-AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$.

Câu 6. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Giá trị của biểu thức $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng

- (A) -6 . (B) $6\sqrt{3}$. (C) 6 . (D) $-6\sqrt{3}$.

Câu 7. Cho tam giác DEF có $DE = 5$, $EF = 6$, $\widehat{DEF} = 45^\circ$. Giá trị $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{EF}$ bằng

- (A) -30 . (B) $-15\sqrt{2}$. (C) 30 . (D) $15\sqrt{2}$.

Câu 8. Cho tam giác đều ABC có độ dài cạnh bằng 4. Giá trị $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng

- (A) $8\sqrt{3}$. (B) 8 . (C) $-8\sqrt{3}$. (D) -8 .

Câu 9. Nếu hai điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -9$ thì

- (A) $MN = 9$. (B) $MN = 81$. (C) $MN = 3$. (D) $MN = 6$.

Câu 10. Cho đoạn thẳng AB . Tập hợp các điểm M nằm trong mặt phẳng thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ là

- (A) Đường trung trực của đoạn thẳng AB . (B) Đường tròn tâm A bán kính AB .
(C) Đường tròn đường kính AB . (D) Đường tròn tâm B bán kính AB .

4.2 Câu hỏi tự luận

Câu 1. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm I . Tính số đo các góc:

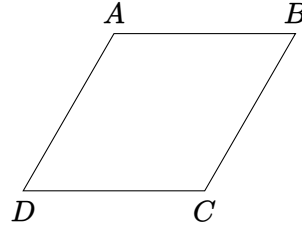
- a) $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB})$; b) $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB})$; c) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$; d) $(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{DC})$.

Câu 2. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$. Biết $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$, tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

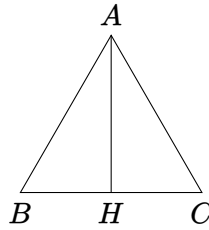
Câu 3. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có cạnh $AB = 4$. Tính tích vô hướng:

- a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$; b) $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$; c) $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$;

Câu 4. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a có $\hat{A} = 120^\circ$. Tính $\vec{AC} \cdot \vec{BC}$.



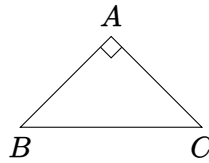
Câu 5. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $2a$ và đường cao AH .



Tính các tích vô hướng:

- a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$; b) $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$; c) $\vec{BC} \cdot \vec{AH}$; d) $\vec{HB} \cdot \vec{HC}$.

Câu 6. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , có cạnh $BC = a\sqrt{2}$.



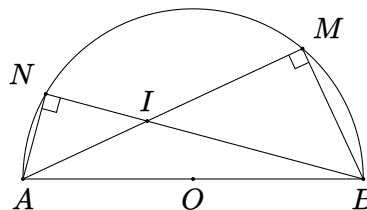
Tính các tích vô hướng:

- a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$; b) $\vec{AC} \cdot \vec{BC}$; c) $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$.

Câu 7. Tính công của lực $\vec{F}$ có độ lớn $20N$ kéo một vật dịch chuyển theo một vectơ $\vec{d}$ có độ dài $50m$, biết rằng $(\vec{F}, \vec{d}) = 60^\circ$.

Câu 8. Tính công của lực $\vec{F}$ có độ lớn $60N$ kéo một vật dịch chuyển theo một vectơ $\vec{d}$ có độ dài $200m$, biết rằng $(\vec{F}, \vec{d}) = 45^\circ$.

Câu 9. Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2R$. Gọi M và N là hai điểm thuộc nửa đường tròn sao cho AM và BN cắt nhau tại I như hình vẽ bên dưới.



- a) Chứng minh $\vec{AI} \cdot \vec{AM} = \vec{AI} \cdot \vec{AB}$.
 b) Chứng minh $\vec{BI} \cdot \vec{BN} = \vec{BI} \cdot \vec{BA}$.
 c) Tính $\vec{AI} \cdot \vec{AM} + \vec{BI} \cdot \vec{BN}$ theo R .

CHƯƠNG VI: THỐNG KÊ

§1. SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

5 Lý thuyết

5.1 Số gần đúng

Trong đời sống cũng như trong khoa học kỹ thuật, ta sử dụng **số gần đúng** để biểu thị cho các đại lượng mà ta không thể đo đạc được giá trị chính xác.

5.2 Sai số tuyệt đối và sai số tương đối

a) *Sai số tuyệt đối*

- Nếu a là số gần đúng của số đúng $\bar{a}$ thì $\Delta_a = |\bar{a} - a|$ được gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng a .
- Nếu biết $\Delta_a \leq d$ thì d được gọi là **độ chính xác** của số gần đúng a .
- Ta viết $\bar{a} = a \pm d$.

b) *Sai số tương đối*

- Sai số tương đối của số gần đúng a , kí hiệu là δ_a , được xác định bởi $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$
- Sai số tương đối thường được viết ở dạng phần trăm.

5.3 Số quy tròn

a) *Quy tắc làm tròn số*

- Nếu chữ số sau hàng quy tròn nhỏ hơn 5 thì ta thay nó và các chữ số bên phải nó bởi số 0.
- Nếu chữ số sau hàng quy tròn lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cộng thêm 1 vào hàng quy tròn, còn các chữ số bên phải vẫn thay bởi số 0.

b) *Xác định số quy tròn của số gần đúng a với độ chính xác d cho trước*

- Bước 1: Tìm hàng của chữ số khác 0 đầu tiên bên trái của d .
- Bước 2: Quy tròn số a ở hàng liền bên trái của hàng ở Bước 1.

c) *Xác định số gần đúng của số đúng $\bar{a}$ với độ chính xác d cho trước*

- Bước 1: Tìm hàng của chữ số khác 0 đầu tiên bên trái của d .
- Bước 2: Quy tròn $\bar{a}$ đến hàng tìm được ở Bước 1.

6 Bài tập thực hành

Câu 1. Cho số $b = 3219,564$. Hãy quy tròn số b

- | | |
|------------------------|---------------------|
| a) đến hàng phần chục; | b) đến hàng trăm; |
| c) đến hàng phần trăm; | d) đến hàng đơn vị. |

Câu 2. Viết số quy tròn của mỗi số sau với độ chính xác d :

- d) $d = 19\,984,32$ với $d = 200$.

d) $343,329451 \pm 0,004$.

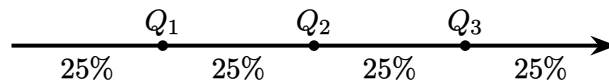
b) Hãy tìm số gần đúng của $\sqrt[3]{2}$ với độ chính xác 0,00007.

1.2 Trung vị

- Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm, ta được $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$.
- Trung vị của mẫu, kí hiệu là M_e , là giá trị chính giữa của dãy trên. Cụ thể:
 - Nếu số phần tử là lẻ, thì phần tử ở vị trí chính giữa là số trung vị.
 - Nếu số phần tử là chẵn, thì số trung vị là trung bình cộng hai phần tử ở vị trí chính giữa.
- Ý nghĩa của số trung vị:* Dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu. Số trung vị là giá trị nằm chính giữa mẫu số liệu nên luôn có ít nhất 50% số liệu trong mẫu lớn hơn hoặc bằng trung vị và luôn có ít nhất 50% số liệu trong mẫu nhỏ hơn hoặc bằng trung vị.

1.3 Tứ phân vị

- Tứ phân vị của một mẫu ngẫu nhiên gồm 3 giá trị Q_1, Q_2, Q_3 chia tập dữ liệu đã sắp xếp thành 4 phần đều nhau. Cụ thể:
 - Giá trị tứ phân vị thứ hai Q_2 là trung vị của toàn bộ mẫu số liệu.
 - Giá trị tứ phân vị thứ nhất Q_1 là trung vị của nửa số liệu đã sắp xếp bên trái Q_2 (không kể Q_2 nếu n lẻ).
 - Giá trị tứ phân vị thứ ba Q_3 là trung vị của nửa số liệu đã sắp xếp bên phải Q_2 (không kể Q_2 nếu n lẻ).
- Ý nghĩa của tứ phân vị:* Với mẫu số liệu đã sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn, các điểm tứ phân vị Q_1, Q_2, Q_3 chia mẫu thành bốn phần, mỗi phần chứa khoảng 25% tổng số liệu của mẫu. Q_1 gọi là tứ phân vị dưới và đại diện cho nửa mẫu số liệu phía dưới. Q_3 gọi là tứ phân vị trên và đại diện cho nửa mẫu số liệu phía trên.



1.4 Mốt

- Mốt là giá trị có tần số lớn nhất của mẫu số liệu.
- Kí hiệu: M_o .
- Ý nghĩa của mốt:* là đại lượng đặc trưng cho giá trị xuất hiện nhiều nhất trong mẫu số liệu.

2 Bài tập thực hành

Câu 1. Trong một đợt khảo sát về tốc độ viết của học sinh lớp 3, người ta cho hai nhóm học sinh chép một đoạn văn bản trong 15 phút. Bảng dưới đây thống kê số chữ mỗi em học sinh viết được.

Nhóm 1	72	79	77	75	74	77	71	
Nhóm 2	70	65	68	90	73	78	72	84

- Có bao nhiêu học sinh tham gia đợt khảo sát?
- Sử dụng số trung bình để so sánh tốc độ viết của học sinh hai nhóm.
- Sử dụng số trung vị để so sánh tốc độ viết của học sinh hai nhóm.

Câu 2. Khối lượng cơ thể lúc trưởng thành của 10 con chim được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: gam).

155	165	150	165	170	165	150	155	160
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Hãy tìm các tứ phân vị và một của mẫu số liệu trên.

Câu 3. Một cửa hàng bán giày thống kê số đôi giày bán được trong quý III năm 2023 như sau:

Cỡ giày	165	150	165	170	165	150	155	160
Số đôi giày bán được	41	49	50	71	53	46	27	5

- Tìm số trung bình của mẫu số liệu.
- Tìm các tứ phân vị của mẫu số liệu.
- Tìm một cửa của mẫu số liệu và cho biết cửa hàng nên nhập về nhiều hơn cỡ giày số bao nhiêu để bán tiếp?

Câu 4. Tính đến ngày 19/01/2021, trong bảng xếp hạng giải bóng đá Ngoại hạng Anh ở vòng 24, số điểm của 5 đội đầu bảng như sau:

Đội	Manchester City	Liverpool	Chelsea	West Ham	Arsenal
Điểm	56	46	43	37	35

- Tìm số trung bình của mẫu số liệu trên.
- Tìm trung vị của mẫu số liệu trên.
- Tìm các tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

Câu 5. Thời gian (đơn vị: phút) hoàn thành bài kiểm tra trực tuyến của 8 học sinh lần lượt là

40 35 45 42 44 38 43 39

Đối với mẫu số liệu trên, hãy tìm:

- Tìm số trung bình.
- Tìm trung vị.
- Tìm các tứ phân vị.

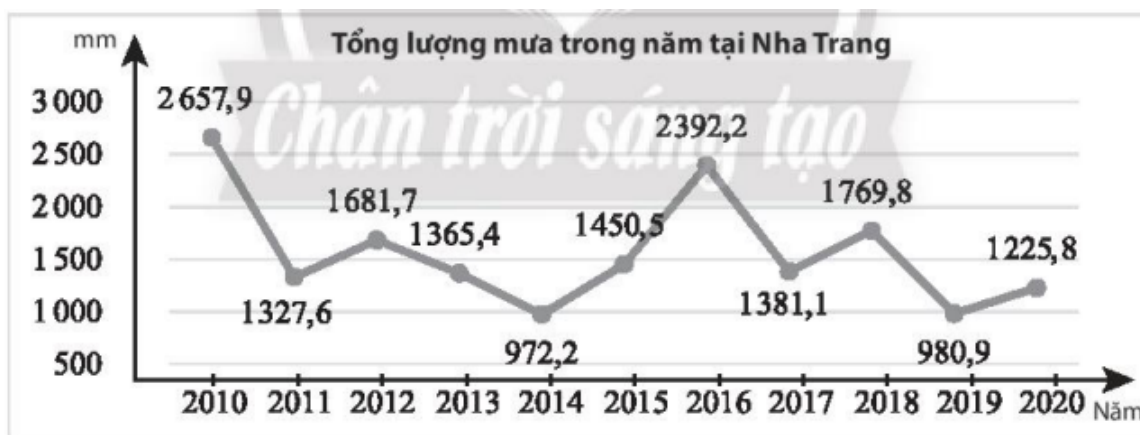
Câu 6. Kết quả kiểm tra môn toán của một lớp 40 học sinh được thống kê trong bảng sau:

Điểm	3	4	5	6	7	8	9	10
Số học sinh	1	2	1	7	9	9	8	3

Đối với mẫu số liệu trên, hãy tìm:

- Tìm số trung bình.
- Tìm trung vị.
- Tìm các tứ phân vị.

Câu 7. Tổng lượng mưa trong năm tại một trạm quan trắc đặt tại Nha Trang từ năm 2010 đến 2020 được thể hiện trong biểu đồ sau (đơn vị: mm)



- Hãy tính lượng mưa trung bình tại trạm quan trắc trên từ năm 2010 đến 2020.
- Hãy tìm các tứ phân vị của mẫu số liệu đó.

§4. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CỦA MẪU SỐ LIỆU

3 Lý thuyết

3.1 Khoảng biến thiên và tứ phân vị

Sắp xếp lại mẫu số liệu theo thứ tự không giảm, ta được $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$.

- **Khoảng biến thiên** R của một mẫu số liệu được tính bởi: $R = x_n - x_1$.
- **Khoảng tứ phân vị** Δ_Q của một mẫu số liệu được tính bởi: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$.

Ý nghĩa:

- Khoảng biến thiên đặc trưng cho độ phân tán của toàn bộ mẫu số liệu.
- Khoảng tứ phân vị đặc trưng cho độ phân tán của một nửa các số liệu, có giá trị từ Q_1 đến Q_3 trong mẫu.
- Khoảng tứ phân vị không bị ảnh hưởng bởi các giá trị rất lớn hoặc rất bé trong mẫu.

Giá trị ngoại lệ:

- Là các giá trị quá nhỏ hay quá lớn so với đa số giá trị của mẫu.
- Phần tử x là giá trị ngoại lệ nếu $x < Q_1 - 1,5\Delta_Q$ hoặc $x > Q_3 + 1,5\Delta_Q$

3.2 Phương sai và độ lệch chuẩn

Cho mẫu số liệu: $x_1, x_2, \dots, x_n$ với $\bar{x}$ là số trung bình.

- **Phương sai** S^2 của mẫu số liệu được tính bằng công thức

$$S^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2$$

- **Độ lệch chuẩn** của mẫu số liệu là căn bậc hai của phương sai.

Đối với mẫu số liệu cho bởi bảng tần số:

Giá trị	x_1	x_2	...	x_k
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

Phương sai có thể tính bởi công thức:

$$S^2 = \frac{n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + \dots + n_kx_k^2}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} - \bar{x}^2$$

Ý nghĩa của phương sai và độ lệch chuẩn

- Dùng để đo mức độ phân tán của các số liệu trong mẫu quanh số trung bình.
- Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn các giá trị của mẫu càng cách xa nhau (có độ phân tán lớn).

4 Bài tập thực hành

Câu 1. Kiểm tra khối lượng một số quả măng cụt ở hai lô hàng A và B được kết quả như sau (đơn vị: gam)

Lô A	85	82	84	83	80	82	85	80	81	82
Lô B	81	80	82	84	82	82	85	80	86	78

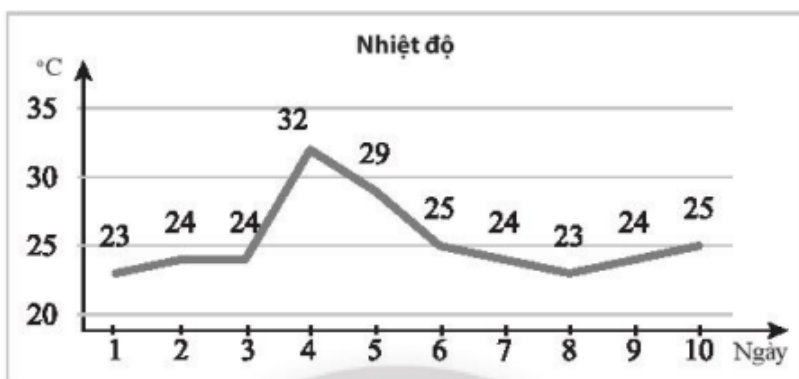
- Tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của khối lượng măng cụt ở mỗi lô.
- Tìm phương sai và độ lệch chuẩn của khối lượng măng cụt ở mỗi lô.
- Khối lượng của măng cụt ở lô hàng nào đều hơn?

Câu 2. Một bệnh viện thống kê số ca nhập viện do tai nạn giao thông mỗi ngày trong tháng 9/2020 ở bảng sau:

Số ca	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	12	15
Số ngày	2	3	4	6	3	2	2	3	2	1	1	1

- Tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu.
- Tìm phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu.
- Xác định các giá trị ngoại lệ (nếu có) của mẫu số liệu.

Câu 3. Biểu đồ ghi lại nhiệt độ lúc 12h trưa tại một trạm quan trắc trong 10 ngày liên tiếp (đơn vị: °C)



- Hãy viết mẫu số liệu thống kê nhiệt độ từ biểu đồ trên.
- Hãy tìm khoảng biến thiên và tứ phân vị của mẫu số liệu đó.
- Hãy tìm phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó.