

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THPT ĐÀO SƠN TÂY



TÀI LIỆU HỌC TẬP MÔN TOÁN 10
NĂM HỌC 2024 – 2025 (HỌC KÌ I)

Họ và tên:

Lớp:

Tài liệu lưu hành nội bộ

Mục lục

Chương 1. MỆNH ĐỀ VÀ TẬP HỢP	1
Bài 1. MỆNH ĐỀ	1
(A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT	1
(B) RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN	3
📁 Kỹ năng 1. Mệnh đề, phủ định của mệnh đề	3
📁 Kỹ năng 2. Mệnh đề kéo theo, mệnh đề đảo, mệnh đề tương đương	3
📁 Kỹ năng 3. Mệnh đề chứa kí hiệu với mọi, tồn tại	4
(C) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	5
(D) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	6
Bài 2. TẬP HỢP	10
(A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT	10
(B) RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN	11
📁 Kỹ năng 1. Xác định tập hợp	11
📁 Kỹ năng 2. Xác định tập hợp con. Hai tập hợp bằng nhau	12
📁 Kỹ năng 3. Các tập con của tập số thực	12
(C) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	13
(D) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	14
Bài 3. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP	17
(A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT	17
(B) RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN	17
📁 Kỹ năng 1. Các phép toán trên tập hợp	17
📁 Kỹ năng 2. Các phép toán trên tập hợp con của tập số thực	18
(C) VẬN DỤNG, THỰC TIỄN	19
📁 Kỹ năng 3. Các bài toán biện luận theo tham số	19
📁 Kỹ năng 4. Ứng dụng thực tế các phép toán tập hợp	19
(D) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	19
(E) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	21
ĐỀ TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG	24

Chương 2.	BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN	31
Bài 1.	BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN	31
(A)	TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	31
(B)	RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN.....	32
	Kĩ năng 1. Nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn.....	32
	Kĩ năng 2. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn.....	33
(C)	VẬN DỤNG, THỰC TIỄN.....	33
	Kĩ năng 3. Các bài toán thực tiễn.....	33
(D)	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	34
(E)	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	34
Bài 2.	HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN	38
(A)	TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	38
(B)	RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN.....	39
	Kĩ năng 1. Nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.....	39
	Kĩ năng 2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.....	39
(C)	VẬN DỤNG, THỰC TIỄN.....	39
	Kĩ năng 3. Ứng dụng của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.....	39
(D)	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	40
(E)	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	41
Chương 3.	HÀM SỐ BẬC HAI VÀ ĐỒ THỊ	44
Bài 1.	HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ	44
(A)	TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	44
(B)	RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN.....	45
	Kĩ năng 1. Tính giá trị của hàm số tại một điểm.....	45
	Kĩ năng 2. Tìm tập xác định, tập giá trị của hàm số.....	46
	Kĩ năng 3. Tìm khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số.....	47
	Kĩ năng 4. Vẽ đồ thị hàm số cho bởi nhiều biểu thức.....	48
	Kĩ năng 5. Viết công thức hàm số cho một số bài toán thực tế.....	48
(C)	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	49

D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	51
Bài 2.	HÀM SỐ BẬC HAI	55
A	TÓM TẮT LÝ THUYẾT	55
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	56
📁	Kĩ năng 1. Đồ thị hàm số bậc hai và các vấn đề liên quan	56
📁	Kĩ năng 2. Xác định hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$	56
📁	Kĩ năng 3. Ứng dụng của hàm số bậc hai trong thực tế	57
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	58
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	60
	ĐỀ TRẮC NGHIỆM CUỐI CHƯƠNG	64
Chương 4.	HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC	70
Bài 1.	GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°	70
A	TÓM TẮT LÝ THUYẾT	70
B	RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN	71
📁	Kĩ năng 1. Giá trị lượng giác của góc α cho trước ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$)	71
📁	Kĩ năng 2. Tính giá trị biểu thức	71
📁	Kĩ năng 3. Rút gọn, chứng minh biểu thức	72
C	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	72
Bài 2.	ĐỊNH LÝ CÔSIN VÀ ĐỊNH LÝ SIN	74
A	TOÁN TẮT LÝ THUYẾT	74
B	RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN	75
📁	Kĩ năng 1. Vận dụng định lý cô-sin	75
📁	Kĩ năng 2. Vận dụng định lý sin	75
📁	Kĩ năng 3. Diện tích tam giác và các bài toán liên quan	75
📁	Kĩ năng 4. Tổng hợp chứng minh, tính toán	76
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	77
Bài 3.	GIẢI TAM GIÁC VÀ ỨNG DỤNG THỰC TẾ	78
A	RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN	78
📁	Kĩ năng 1. Giải tam giác	78
📁	Kĩ năng 2. Áp dụng giải tam giác vào thực tế	79
B	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	80

(C)	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	82
	ĐỀ TRẮC NGHIỆM CUỐI CHƯƠNG	85
Chương 5.	VECTƠ	91
Bài 1.	CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU	91
(A)	TÓM TẮT LÝ THUYẾT	91
(B)	RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN	92
📁	Kĩ năng 1. Xác định vectơ, vectơ cùng phương, vectơ cùng hướng, vectơ ngược hướng	92
📁	Kĩ năng 2. Vectơ bằng nhau	93
📁	Kĩ năng 3. Độ dài véc tơ	93
(C)	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	94
Bài 2.	TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ	97
(A)	TÓM TẮT LÝ THUYẾT	97
(B)	RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN	98
📁	Kĩ năng 1. Thực hiện phép toán cộng, trừ hai vectơ	98
📁	Kĩ năng 2. Chứng minh một đẳng thức vectơ	99
📁	Kĩ năng 3. Tìm độ dài vectơ	100
(C)	VẬN DỤNG, THỰC TIỄN	101
📁	Kĩ năng 4. Tổng hợp tính toán nâng cao	101
📁	Kĩ năng 5. Ứng dụng của vectơ trong vật lý	102
(D)	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	103
(E)	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	104
Bài 3.	TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ THỰC	107
(A)	TÓM TẮT LÝ THUYẾT	107
(B)	RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN	108
📁	Kĩ năng 1. So sánh hai vectơ theo tỉ số k tương ứng	108
📁	Kĩ năng 2. Chứng minh đẳng thức vectơ	108
📁	Kĩ năng 3. Phân tích (biểu diễn) một vectơ theo hai vectơ không cùng phương cho trước	109
📁	Kĩ năng 4. Tìm điều kiện hoặc chứng minh tính chất song song, thẳng hàng	110
📁	Kĩ năng 5. Xác định điểm thỏa mãn một đẳng thức vectơ cho trước	110
(C)	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	111

D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	113
Bài 4.	TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉCTƠ	116
A	TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	116
B	RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN.....	117
📁	Kĩ năng 1. Tính tích vô hướng bằng định nghĩa.....	117
📁	Kĩ năng 2. Ứng dụng tích vô hướng để tính toán độ dài, tính góc.....	117
📁	Kĩ năng 3. Chứng minh một đẳng thức liên quan đến tích vô hướng.....	118
📁	Kĩ năng 4. Tìm tập hợp điểm.....	118
📁	Kĩ năng 5. Ứng dụng tích vô hướng trong thực tế.....	119
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	119
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	121
	ĐỀ TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG	124
Chương 6.	THỐNG KÊ	129
Bài 1.	SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ	129
A	TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	129
B	RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN.....	130
📁	Kĩ năng 1. Sai số tuyệt đối và sai số tương đối.....	130
📁	Kĩ năng 2. Quy tròn số gần đúng.....	131
📁	Kĩ năng 3. Vận dụng, thực tiễn.....	131
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	132
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	133
Bài 2.	MÔ TẢ VÀ BIỂU DIỄN DỮ LIỆU TRÊN CÁC BẢNG VÀ BIỂU ĐỒ	135
A	TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	135
B	RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN.....	136
📁	Kĩ năng 1. Phát hiện số liệu sai trên bảng số liệu hoặc trên biểu đồ.....	136
📁	Kĩ năng 2. Tính toán, phân tích các số liệu dựa vào bảng số liệu hoặc biểu đồ.....	137
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	138
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	139
Bài 3.	CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM	141

Ⓐ	TÓM TẮT LÝ THUYẾT	141
Ⓑ	RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN	142
📁	Kĩ năng 1. Tìm số trung bình của bảng số liệu	142
📁	Kĩ năng 2. Tìm trung vị và tứ phân vị của bảng số liệu	143
📁	Kĩ năng 3. Tìm môđ của bảng số liệu	144
Ⓒ	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	144
Ⓓ	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	146
Bài 4.	CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO ĐỘ PHÂN TÁN	150
Ⓐ	TÓM TẮT LÝ THUYẾT	150
Ⓑ	RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN	151
📁	Kĩ năng 1. Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu	151
📁	Kĩ năng 2. Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu	152
📁	Kĩ năng 3. Tìm phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu	152
📁	Kĩ năng 4. Tìm các số liệu bất thường của mẫu số liệu	153
Ⓒ	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	153
Ⓓ	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	156

MỆNH ĐỀ VÀ TẬP HỢP

Bài 1

MỆNH ĐỀ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Mệnh đề, mệnh đề chứa biến

⚙ **Mệnh đề:** Mệnh đề là một **câu khẳng định** đúng hoặc sai.

- Câu khẳng định đúng gọi là mệnh đề **đúng**.
- Câu khẳng định sai gọi là mệnh đề **sai**.
- Một mệnh đề không thể vừa đúng hoặc vừa **sai**.
- Những mệnh đề liên quan đến toán học được gọi là mệnh đề toán học.

⚙ **Mệnh đề chứa biến:** Mệnh đề chứa biến là một câu khẳng định chứa biến nhận giá trị trong một tập X nào đó và với mỗi giá trị của biến thuộc X ta được một mệnh đề.

2. Mệnh đề phủ định

⚙ Cho mệnh đề P . Mệnh đề “không phải P ” gọi là mệnh đề phủ định của P .

⚙ **Chú ý:**

- Mệnh đề phủ định của P , kí hiệu là $\bar{P}$.
- Nếu P đúng thì $\bar{P}$ sai, nếu P sai thì $\bar{P}$ đúng.

3. Mệnh đề kéo theo và mệnh đề đảo

Cho hai mệnh đề P và Q .

⚙ **Mệnh đề kéo theo:** Mệnh đề “Nếu P thì Q ” gọi là mệnh đề kéo theo, kí hiệu $P \Rightarrow Q$.

- Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ còn được phát biểu là “ P kéo theo Q ” hoặc “Từ P suy ra Q ”
- Mệnh đề này chỉ sai khi P đúng và Q sai.

Lưu ý

Xét định lý dạng $P \Rightarrow Q$. Khi đó, ta có thể phát biểu định lý này theo một trong 2 cách sau:

- ① P là điều kiện đủ để có Q .
- ② Q là điều kiện cần để có P .

⚙ **Mệnh đề đảo:** Cho mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Khi đó, $Q \Rightarrow P$ gọi là mệnh đề đảo của $P \Rightarrow Q$.

4. Mệnh đề tương đương

⚙ Cho hai mệnh đề P và Q . Mệnh đề “ P nếu và chỉ nếu Q ” gọi là hai mệnh đề tương đương.

⚙ Chú ý:

- Mệnh đề “ P nếu và chỉ nếu Q ” được kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$.
- Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi cả $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ cùng đúng.

Lưu ý

Xét định lý dạng $P \Leftrightarrow Q$. Khi đó, ta có thể phát biểu định lý này theo một trong 2 cách sau:

- ① P là điều cần và đủ để có Q .
- ② P khi và chỉ khi Q .

5. Mệnh đề có chứa kí hiệu $\forall, \exists$

⚙ Mệnh đề chứa kí hiệu với mọi: $\forall x \in X, P(x)$.

- Mệnh đề này đúng khi tất cả các giá trị của $x \in X$ đều làm cho phát biểu $P(x)$ đúng.
- Nếu ta tìm được ít nhất một giá trị $x \in X$ làm cho $P(x)$ sai thì mệnh đề này **sai**.

Ví dụ 1

Mệnh đề “Bình phương mọi số thực đều không âm” được viết là $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.

⚙ Mệnh đề chứa kí hiệu tồn tại: $\exists x \in X, P(x)$.

- Mệnh đề này đúng khi ta tìm được ít nhất một giá trị của $x \in X$ làm cho phát biểu $P(x)$ đúng.
- Nếu tất cả giá trị của $x \in X$ đều làm cho $P(x)$ sai thì mệnh đề này **sai**.

Ví dụ 2

Mệnh đề “Có một số tự nhiên mà bình phương của nó bằng 3” được viết là $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 = 3$.

⚙ Phủ định của Mệnh đề chứa kí hiệu $\forall, \exists$.

- Phủ định của mệnh đề “ $\forall x \in X, P(x)$ ” là mệnh đề “ $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ”.
- Phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in X, P(x)$ ” là mệnh đề “ $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ ”.

 Mệnh đề:

- ① Khẳng định đúng là mệnh đề đúng, khẳng định sai là mệnh đề sai.
- ② Câu không phải là câu khẳng định hoặc câu khẳng định mà không có tính đúng-sai đều không phải là mệnh đề.

 Mệnh đề phủ định: Cho mệnh đề P .

- ① Mệnh đề phủ định của P , kí hiệu là $\bar{P}$.
- ② Nếu P đúng thì $\bar{P}$ sai; P sai thì $\bar{P}$ đúng.

 **Ví dụ 1.** Các câu sau đây, câu nào là mệnh đề, câu nào không phải là mệnh đề? Nếu là mệnh đề hay cho biết mệnh đề đó đúng hay sai?

- a) Không được đi lỗi này!
- b) Bây giờ là mấy giờ?
- c) 7 không là số nguyên tố.
- d) $\sqrt{5}$ là số vô tỉ.

 **Ví dụ 2.** Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau và lập mệnh đề phủ định của chúng.

- a) 5 là số nguyên tố.
- b) Phương trình $2x^2 - 3x + 1 = 0$ có nghiệm nguyên.
- c) Tổng ba góc trong một tam giác bằng 180° .
- d) Ấn Độ hiện nay có dân số lớn nhất thế giới.

 **Ví dụ 3.** Cho tam giác ABC . Xét hai mệnh đề P : “Tam giác ABC vuông” và Q : “Tam giác ABC có $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ”. Phát biểu các mệnh đề sau và cho biết mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $P \Rightarrow Q$.
- b) $Q \Rightarrow P$.

 **Ví dụ 4.** Xét hai câu sau:

P : “Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt”.

Q : “Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ”.

- a) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$.
- b) Phát biểu mệnh đề $Q \Rightarrow P$.

 **Ví dụ 5.** Cho tam giác ABC với trung tuyến AM . Xét hai mệnh đề P : “Tam giác ABC vuông tại A ” và Q : “Trung tuyến AM bằng một nửa cạnh BC ”.

- a) Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề này đúng hay sai?

- b) Hãy phát biểu mệnh đề $Q \Rightarrow P$. Mệnh đề này đúng hay sai?
- c) Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ và cho biết mệnh đề đó đúng hay sai?

≡ Ví dụ 6. Trong mỗi cặp mệnh đề P và Q sau đây, hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xét tính đúng sai của nó. P có phải là điều kiện đủ để có Q không?

- a) P : “ a và b là hai số chẵn”, Q : “ $a + b$ là số chẵn” (a, b là hai số tự nhiên).
- b) P : “Tứ giác $ABCD$ có bốn cạnh bằng nhau”, Q : “Tứ giác $ABCD$ là một hình vuông”.

≡ Ví dụ 7. Cho hai mệnh đề P : “Tứ giác $ABCD$ là hình thoi” và Q : “Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau”. Phát biểu định lý $P \Leftrightarrow Q$ bằng hai cách.

≡ Ví dụ 8.

- a) Phát biểu điều kiện cần và đủ để số tự nhiên n chia hết cho 2.
- b) Phát biểu điều kiện cần và đủ để số tự nhiên n chia hết cho 5.
- c) Phát biểu điều kiện cần và đủ để số tự nhiên n chia hết cho 3.

KN

3

Mệnh đề chứa kí hiệu với mọi, tồn tại

Tính đúng sai:

- ① Mệnh đề chứa kí hiệu với mọi: $\forall x \in X, P(x)$.
- Mệnh đề này đúng khi tất cả các giá trị của $x \in X$ đều làm cho phát biểu $P(x)$ đúng.
 - Nếu ta tìm được ít nhất một giá trị $x \in X$ làm cho $P(x)$ sai thì mệnh đề này **sai**.
- ② Mệnh đề chứa kí hiệu tồn tại: $\exists x \in X, P(x)$.
- Mệnh đề này đúng khi ta tìm được ít nhất một giá trị của $x \in X$ làm cho phát biểu $P(x)$ đúng.
 - Nếu tất cả giá trị của $x \in X$ đều làm cho $P(x)$ sai thì mệnh đề này **sai**.

Phủ định của mệnh đề có dấu $\forall, \exists$:

- ① $\forall x \in X, P(x)$ thành $\exists x \in X, \overline{P(x)}$.
- ② $\exists x \in X, P(x)$ thành $\forall x \in X, \overline{P(x)}$.

Chú ý: Khi lấy phủ định, ta chú ý các vấn đề đối lập sau:

- ① Quan hệ = thành quan hệ $\neq$, và ngược lại.
- ② Quan hệ $>$ thành quan hệ $\leq$, và ngược lại.
- ③ Quan hệ $\geq$ thành quan hệ $<$, và ngược lại.
- ④ Liên kết “và” thành liên kết “hoặc”, và ngược lại.

≡ Ví dụ 9. Sử dụng kí hiệu “ $\forall$ ” để viết mỗi mệnh đề sau và xét xem mệnh đề đó là đúng hay sai? Giải thích vì sao?

- a) P : “Với mọi số thực $x, x^2 + 1 > 0$ ”.

b) Q : “Với mọi số tự nhiên $n, n^2 + n$ chia hết cho 6”.

≡ Ví dụ 10. Sử dụng kí hiệu “ $\exists$ ” để viết mỗi mệnh đề sau và xét xem mệnh đề đó là đúng hay sai? Giải thích vì sao?

a) M : “Có ít nhất một số thực x sao cho $x^3 = -8$ ”.

b) N : “Tồn tại số nguyên x sao cho $2x + 1 = 0$ ”.

≡ Ví dụ 11. Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và cho biết tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó.

a) A : “ $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 3$ chia hết cho 4”.

b) B : “ $\exists x \in \mathbb{N}, x$ chia hết cho $x + 1$ ”.

≡ Ví dụ 12. Xét tính đúng sai của mệnh đề sau và nêu mệnh đề phủ định của nó.

a) $\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 = 3$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*: 2^n + 3$ là một số nguyên tố.

c) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 4x + 5 > 0$.

d) $\forall x \in \mathbb{R}, x^4 - x^2 + 2x + 2 \geq 0$.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Trong các mệnh đề toán học sau đây, mệnh đề nào là một khẳng định đúng? Mệnh đề nào là một khẳng định sai?

a) P : “Tổng hai góc đối của một tứ giác nội tiếp bằng 180° ”.

b) Q : “7 là số chính phương”.

c) R : “1 là số nguyên tố”.

2 Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau

a) $\pi < \frac{10}{3}$.

b) Phương trình $3x + 7 = 0$ có nghiệm.

c) Tồn tại một số cộng với chính nó bằng 0.

d) 2022 là hợp số.

3 Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau

a) 1993 chia hết cho 3.

b) $\sqrt{12}$ là một số hữu tỉ.

c) 9 là một số chính phương.

d) $|-1997| \leq 0$.

4 Dùng thuật ngữ “điều kiện cần” để phát biểu các định lí sau.

a) Nếu $MA \perp MB$ thì M thuộc đường tròn đường kính AB .

b) $a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$ là điều kiện đủ để $a^2 + b^2 > 0$.

5 Sử dụng thuật ngữ “điều kiện đủ” để phát biểu các định lí sau.

a) Nếu a và b là hai số hữu tỉ thì tổng $a + b$ là số hữu tỉ.

b) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau.

c) Nếu một số tự nhiên có chữ số tận cùng là chữ số 5 thì nó chia hết cho 5.

- 6 Sử dụng các thuật ngữ “điều kiện cần”, “điều kiện đủ”, “điều kiện cần và đủ” và cặp mệnh đề P, Q sau đây để thành lập một mệnh đề đúng.
- $P: “a = b”, Q: “a^2 = b^2 (a, b \text{ là hai số thực nào đó})”.$
 - $P: “Tứ giác ABCD có hai đường chéo bằng nhau”, Q: “Tứ giác ABCD là hình thang cân”.$
 - $P: “Tam giác ABC có hai góc bằng 45^\circ”, Q: “Tam giác ABC vuông cân”.$
- 7 Dùng kí hiệu $\forall$ hoặc $\exists$ để viết các mệnh đề sau và xét tính đúng sai của chúng.
- Mọi số thực khác 0 nhân với nghịch đảo của nó bằng 1.
 - Có số tự nhiên mà bình phương của nó bằng 20.
 - Bình phương của mọi số thực đều dương.
 - Có ba số tự nhiên khác 0 sao cho tổng bình phương của hai số bằng bình phương của số còn lại.
- 8 Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và cho biết tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó.
- $A: “\forall x \in \mathbb{R}, x^3 - x^2 + 1 > 0”.$
 - $B: “\text{Tồn tại số thực } a \text{ sao cho } a + 1 + \frac{1}{a+1} \leq 2”.$
- 9 Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau
- $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x.$
 - $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0.$
- 10 Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề phủ định đó
- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 2x - 2.$
 - $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2x - 1.$
 - $\exists x \in \mathbb{R}, x + \frac{1}{x} \geq 2.$
 - $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0.$

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề ?

- Các bạn hãy làm bài đi!.
- Các bạn có chăm học không ?.
- An học lớp mấy ?.
- Việt Nam là một nước thuộc Châu Á.

Câu 2. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề ?

- 15 là số nguyên tố.
- $a + b = c.$
- $x^2 + x = 0.$
- $2n + 1$ chia hết cho 3.

Câu 3. Trong các câu sau, câu nào **không** phải là mệnh đề?

- $5 + 2 = 8.$
- $2 > 0.$
- $4 - \sqrt{17} > 0.$
- $5 + x = 2.$

Câu 4. Câu nào sau đây là một mệnh đề?

- Số 150 có phải là số chẵn không?.
- Số 30 là số chẵn.
- $2x - 1$ là số lẻ.
- $x^3 + 1 = 0.$

Câu 5. Định lý có dạng $A \Rightarrow B$ được hiểu như thế nào?

- A khi và chỉ khi B.
- B suy ra A.
- A là điều kiện cần để có B.
- A là điều kiện đủ để có B.

Câu 6. Phủ định của mệnh đề “ $5 + 4 = 10$ ” là mệnh đề nào sau đây ?

- A. $5 + 4 < 10$. B. $5 + 4 > 10$. C. $5 + 4 \leq 10$. D. $5 + 4 \neq 10$.

Câu 7. Phủ định của mệnh đề " $5 + \pi > 10$ " là mệnh đề nào sau đây ?

- A. $5 + \pi < 10$. B. $5 + \pi > 10$. C. $5 + \pi \leq 10$. D. $5 + \pi \neq 10$.

Câu 8. Phủ định của mệnh đề "14 là số nguyên tố" là mệnh đề nào sau đây?

- A. 14 không phải là số nguyên tố. B. 14 chia hết cho 2.
C. 14 không phải là hợp số. D. 14 chia hết cho 7.

Câu 9. Phủ định của mệnh đề "Dơi là một loài chim" là mệnh đề nào sau đây?

- A. Dơi là một loài có cánh. B. Chim cùng loài với dơi.
C. Dơi là một loài ăn trái cây. D. Dơi không phải là loài chim.

Câu 10. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **sai**?

- A. 20 chia hết cho 5. B. 5 chia hết cho 20. C. 20 là bội số của 5. D. 5 là ước số của 20.

Câu 11. Cho mệnh đề chứa biến $P(x) : x^2 - 3x + 2 = 0$, với $x \in \mathbb{R}$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây

- A. $P(0)$. B. $P(1)$. C. $P(-1)$. D. $P(-2)$.

Câu 12. Với giá trị nào của $n \in \mathbb{N}$, mệnh đề chứa biến $P(n)$: " n chia hết cho 12" là đúng?

- A. $n = 48$. B. $n = 4$. C. $n = 3$. D. $n = 88$.

Câu 13. Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$: " $\sqrt{x} > x$ ", với $x \in \mathbb{R}$. Tìm mệnh đề đúng.

- A. $P(0)$. B. $P(1)$. C. $P\left(\frac{1}{2}\right)$. D. $P(2)$.

Câu 14. Xét mệnh đề chứa biến $P(x)$ " $x^2 - 3x = 0$ ", với $x \in \mathbb{R}$. Với giá trị nào của x thì $P(x)$ là mệnh đề đúng?

- A. $x = 0$. B. $x = 2$. C. $x = -1$. D. $x = -3$.

Câu 15. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

- A. Nếu "33 là hợp số" thì "15 chia hết cho 25".
B. Nếu "7 là số nguyên tố" thì "8 là bội số của 3".
C. Nếu "20 là hợp số" thì "24 chia hết cho 6".
D. Nếu " $3 + 9 = 12$ " thì " $4 > 7$ ".

Câu 16. Trong các phát biểu sau phát biểu nào là mệnh đề đúng?

- A. π là số hữu tỉ.
B. Tổng hai cạnh của một tam giác lớn hơn cạnh còn lại.
C. Bạn có chăm học không ?
D. Số 12 không chia hết cho 3.

Câu 17. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có mệnh đề đảo **sai**?

- A. "Tứ giác là hình bình hành thì có hai cặp cạnh đối song song và bằng nhau".
B. "Tam giác đều thì có ba góc có số đo bằng 60° ".
C. "Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau".
D. "Một tứ giác có 4 góc vuông thì tứ giác đó là hình chữ nhật".

Câu 18. Mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 3$ " khẳng định rằng

- A. Bình phương của mỗi số thực bằng 3.
B. Có ít nhất một số thực mà bình phương của nó bằng 3.
C. Chỉ có một số thực bình phương bằng 3.
D. Nếu x là số thực thì $x^2 = 3$.

Câu 19. Kí hiệu X là tập hợp các cầu thủ x trong đội bóng rổ, $P(x)$ là mệnh đề chứa biến x cao trên 180 cm. Mệnh đề " $\forall x \in X, P(x)$ " khẳng định rằng

- A. Mọi cầu thủ trong đội tuyển bóng rổ đều cao trên 180cm.
- B. Trong số các cầu thủ của đội tuyển bóng rổ có một cầu thủ cao trên 180cm.
- C. Bất cứ ai cao trên 180cm đều là cầu thủ của đội tuyển bóng rổ.
- D. Có một số người cao trên 180cm là cầu thủ của đội tuyển bóng rổ.

Câu 20. Mệnh đề “Mọi động vật đều di chuyển” có mệnh đề phủ định là

- A. Mọi động vật đều không di chuyển.
- B. Mọi động vật đều đứng yên.
- C. Có ít nhất một động vật di chuyển.
- D. Có ít nhất một động vật không di chuyển.

Câu 21. Phủ định của mệnh đề “Có ít nhất một số vô tỷ là số thập phân vô hạn tuần hoàn” là mệnh đề nào sau đây?

- A. Mọi số vô tỷ đều là số thập phân vô hạn tuần hoàn.
- B. Có ít nhất một số vô tỷ là số thập phân vô hạn không tuần hoàn.
- C. Mọi số vô tỷ đều không phải là số thập phân vô hạn tuần hoàn.
- D. Mọi số vô tỷ đều là số thập phân tuần hoàn.

Câu 22. Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề $P: “\forall x \in \mathbb{N}, x^2 + x - 1 > 0”$.

- A. $\bar{P}: “\exists x \in \mathbb{N}, x^2 + x - 1 > 0”$.
- B. $\bar{P}: “\forall x \in \mathbb{N}, x^2 + x - 1 > 0”$.
- C. $\bar{P}: “\exists x \in \mathbb{N}, x^2 + x - 1 \leq 0”$.
- D. $\bar{P}: “\forall x \in \mathbb{N}, x^2 + x - 1 \leq 0”$.

Câu 23. Xét mệnh đề $P: “\exists x \in \mathbb{R} : 2x - 3 < 0”$. Mệnh đề phủ định của mệnh đề P là

- A. “ $\forall x \in \mathbb{R} : 2x - 3 \leq 0$ ”.
- B. “ $\exists x \in \mathbb{R} : 2x - 3 > 0$ ”.
- C. “ $\forall x \in \mathbb{R} : 2x - 3 \geq 0$ ”.
- D. “ $\forall x \in \mathbb{R} : 2x - 3 \leq 0$ ”.

Câu 24. Cho mệnh đề $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x > 0$. Phủ định của mệnh đề này là

- A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x \leq 0$.
- B. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x = 0$.
- C. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x < 0$.
- D. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x \leq 0$.

Câu 25. Tìm mệnh đề sai.

- A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 > 0$.
- B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$.
- C. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 5x + 6 = 0$.
- D. $\exists x \in \mathbb{R}, x < \frac{1}{x}$.

Câu 26. Tìm mệnh đề đúng.

- A. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3 = 0$.
- B. $\exists x \in \mathbb{R}, x^4 + 3x^2 + 2 = 0$.
- C. $\forall x \in \mathbb{N}, (2x + 1)^2 - 1$ chia hết cho 4.
- D. $\forall x \in \mathbb{Z}, x^5 > x^2$.

Câu 27. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq 2n$.
- B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$.
- C. $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 = n$.
- D. $\exists x \in \mathbb{R}, x > x^2$.

Câu 28. Cho các mệnh đề

- ① $X: “\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 3 > 0”$
- ② $Y: “\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 4 = 0”$
- ③ $P: “\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2 = 0”$
- ④ $Q: “\forall x \in \mathbb{R}, x > 0”$

Các mệnh đề đúng là

- A. X, P.
- B. Y, Q.
- C. X, Y.
- D. P, Q.

Câu 29. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng ?

- A. $\exists n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ không chia hết cho 3.
- B. $\forall x \in \mathbb{R}, x < 3 \Rightarrow x^2 < 9$.
- C. $\exists m \in \mathbb{Z}, m^2 + m + 1$ là một số chẵn.
- D. $\forall x \in \mathbb{Z}, \frac{2x^3 - 6x^2 + x - 3}{2x^2 + 1} \in \mathbb{Z}$.

Câu 30. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\forall n \in \mathbb{N} : n(n+1)$ là số chính phương.

B. $\forall n \in \mathbb{N} : n(n+1)$ là số lẻ.

C. $\forall n \in \mathbb{N} : n(n+1)(n+2)$ là số lẻ.

D. $\forall n \in \mathbb{N} : n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 6.

—HẾT—

Bài 2

TẬP HỢP

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Nhắc lại về tập hợp

Tập hợp

Khi muốn mô tả các đối tượng (phần tử) có chung một tính chất gì đó thì ta xây dựng khái niệm tập hợp.

- Người ta thường dùng chữ cái in hoa $A, B, \dots$ để kí hiệu tập hợp.
- Để chỉ a thuộc tập hợp A , ta viết $a \in A$; để chỉ a không thuộc tập hợp A , ta viết $a \notin A$.

Cách xác định tập hợp:

- Liệt kê các phần tử: viết các phần tử của tập hợp trong hai dấu móc $\{\dots\}$.
- Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

Tập rỗng: là tập hợp không chứa phần tử nào, kí hiệu $\emptyset$.

Các tập hợp số

- | | | |
|----------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|
| ① Tập số tự nhiên $\mathbb{N}$. | ② Tập số nguyên $\mathbb{Z}$. | ③ Tập số hữu tỉ $\mathbb{Q}$. |
| ④ Tập số vô tỉ $\mathbb{I}$. | ⑤ Tập số thực $\mathbb{R}$. | ⑥ Tập $\mathbb{N}^*$ ta bỏ số 0. |

2. Tập con và hai tập hợp bằng nhau

Cho hai tập hợp A và B

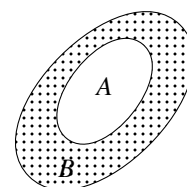
Tập hợp con: Nếu mọi phần tử của A đều nằm trong B thì ta nói tập A là con của tập B , nghĩa là

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x: x \in A \Rightarrow x \in B)$$

• Các tính chất:

- ① $A \subset A, \forall A$.
- ② $\emptyset \subset A, \forall A$.
- ③ $A \subset B$, và $B \subset C$ suy ra $A \subset C$.

- Nếu A không phải tập con của B thì ta kí hiệu $A \not\subset B$.
- Nếu $A \subset B$ hoặc $B \subset A$ thì ta nói A và B có quan hệ bao hàm.



Biểu đồ Ven minh họa $A \subset B$

Mối quan hệ giữa các tập hợp số:

- ① $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- ② $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$.

Tập hợp bằng nhau: $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ và $B \subset A \Leftrightarrow (\forall x: x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

3. Một số tập con của tập hợp số thực

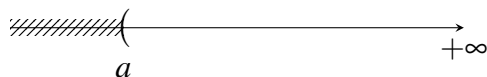
① Khoảng $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.



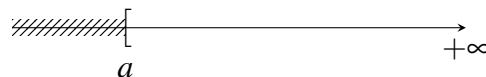
② Đoạn $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.



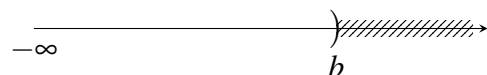
③ Khoảng $(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$.



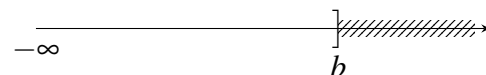
④ Nửa khoảng $[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$.



⑤ Khoảng $(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$.



⑥ Nửa khoảng $(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$.



⑦ Nửa khoảng $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.



⑧ Nửa khoảng $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.



B RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN

KN

1

Xác định tập hợp

Ví dụ 1. Cho $D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là số nguyên tố}, 5 < n < 20\}$.

- Viết tập hợp D bằng cách liệt kê các phần tử. Tập hợp D có bao nhiêu phần tử?
- Dùng kí hiệu $\in, \notin$ để viết câu trả lời cho câu hỏi sau: Trong các số 5; 12; 17; 18, số nào thuộc tập D , số nào không thuộc tập D ?

Ví dụ 2. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử.

- $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x - x^2)(3x - 2) = 0\}$.
- $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^3 - 3x^2 - 5x = 0\}$.
- $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2 - 75x - 77 = 0\}$.
- $D = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - x - 2)(x^2 - 9) = 0\}$.

Ví dụ 3. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử.

- $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 3 < n^2 < 30\}$.
- $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid |n| < 3\}$.
- $C = \{x \mid x = 3k \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 12\}$.
- $A = \{n^2 + 3 \mid n \in \mathbb{N} \text{ và } n < 5\}$.

Ví dụ 4. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng.

- $A = \{2; 3; 5; 7\}$.
- $B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

c) $C = \{-5; 0; 5; 10\}$.

d) $D = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}$.

Ví dụ 5. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào rỗng?

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x + 1 = 0\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 4x + 2 = 0\}$.

c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid 6x^2 - 7x + 1 = 0\}$.

d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1\}$.

KN

2

Xác định tập hợp con. Hai tập hợp bằng nhau

Cho tập hợp A gồm n phần tử.

- ① Khi liệt kê tất cả các tập con của A , ta liệt kê đầy đủ theo thứ tự:
 $\emptyset$; tập 1 phần tử; tập 2 phần tử; tập 3 phần tử;...; A .
- ② Số tập con của A là 2^n .
- ③ Số tập con gồm k phần tử của A là C_n^k (dùng để kiểm tra kết quả bằng máy tính).

Ví dụ 6. Cho tập hợp $A = \{2; 3; 4\}$ và $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$.

- a) Xác định tất cả tập con có hai phần tử của A .
- b) Xác định tất cả tập con có ít hơn hai phần tử của A .
- c) Tập A có tất cả bao nhiêu tập con.
- d) Xác định tất cả các tập X thỏa $A \subset X \subset B$.

Ví dụ 7. Hãy chỉ ra các quan hệ bao hàm giữa các tập hợp sau và vẽ biểu đồ Ven để biểu diễn các quan hệ đó:

$A = \{x \mid x \text{ là tứ giác}\}$.

$B = \{x \mid x \text{ là hình vuông}\}$;

$C = \{x \mid x \text{ là hình chữ nhật}\}$

$D = \{x \mid x \text{ là hình bình hành}\}$.

Ví dụ 8. Cho hai tập hợp $A = \{a; b; c; d; e\}$ và $B = \{a; c; e; f\}$. Tìm tất cả các tập hợp X sao cho $X \subset A$ và $X \subset B$.

Ví dụ 9. Cho hai tập hợp $A = \{1; a; 5\}$, $B = \{a+2; 3; b\}$ với a, b là các số thực. Biết rằng $A = B$, hãy xác định a và b .

KN

3

Các tập con của tập số thực

Ví dụ 10. Hãy dùng kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng để viết lại các tập hợp sau đây:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 5\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 5\}$.

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$.

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5\}$.

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$.

f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$.

g) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 4\}$.

h) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| < 9\}$.

Ví dụ 11. Cho hai tập hợp $A = [m; m + 2]; B = [-1; 2]$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A \subset B$.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- 1 Liệt kê các phần tử của các tập hợp sau:
 - a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 5\}$.
 - b) B là tập hợp các số tự nhiên lớn hơn 0 và nhỏ hơn 5.
 - c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - 1)(x + 2) = 0\}$.
- 2 Viết các tập hợp sau bằng phương pháp liệt kê các phần tử:
 - a) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 5) = 0\}$.
 - b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x^2 < 40\}$.
 - c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 9\}$.
 - d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 1| = 5\}$.
- 3 Viết các tập hợp sau đây dưới dạng liệt kê các phần tử:
 - a) $A = \{x \mid x = 2k - 3, k \in \mathbb{N}, k \leq 3\}$.
 - b) $B = \left\{ \frac{m}{m+5} \mid m \in \mathbb{Z}, |m| \leq 3 \right\}$.
 - c) $C = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 7 - x, x \in \mathbb{N}\}$.
 - d) $D = \{(x; y) \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x + y \leq 3\}$.
- 4 Viết các tập hợp sau bằng phương pháp nêu ra tính đặc trưng.
 - a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
 - b) $D = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512\}$.
 - c) Tập hợp các số chẵn.
 - d) Tập hợp các số lẻ.
- 5 Viết mỗi tập hợp sau đây theo cách nêu tính chất đặc trưng.
 - a) Tập hợp các điểm M trên mặt phẳng (P) , thuộc đường tròn tâm O và đường kính $2R$.
 - b) Tập hợp các điểm M trên mặt phẳng (P) , thuộc hình tròn tâm O .
- 6 Cho các tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ và $B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$. Hãy tìm tập hợp M có nhiều phần tử nhất thỏa mãn $M \subset A$ và $M \subset B$.
- 7 Hãy xét quan hệ bao hàm các tập hợp sau:

A là tập hợp các tam giác.

B là tập hợp các tam giác đều.

C là tập hợp các tam giác cân.
- 8 Cho tập $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.
 - a) Hãy tìm tất cả các tập con của X có chứa các phần tử 1, 3, 5, 7.
 - b) Có bao nhiêu tập con của X chứa đúng 2 phần tử?
- 9 Cho hai tập hợp $A = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ và $B = \{6l + 3 \mid l \in \mathbb{Z}\}$. Chứng minh rằng $B \subset A$.
- 10 Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; a\}$ và $B = \{1; a^2\}$. Tìm tất cả các giá trị của a sao cho $B \subset A$.

- 11) Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để tập hợp $(1; m)$ chứa đúng 2 số nguyên dương.
- 12) Cho hai tập hợp $A = [0; 3]$ và $B = [a; a + 2]$. Tìm a để $B \subset A$.
- 13) Cho ba tập hợp $A = \{2; 5\}$, $B = \{5; x\}$ và $C = \{x; y; 5\}$. Tìm các giá trị của x, y sao cho $A = B = C$.
- 14) Xác định số phần tử của các tập hợp được cho dưới đây:
- Cho A là tập hợp các số chẵn có hai chữ số. Hỏi A có bao nhiêu phần tử?
 - Cho B là tập hợp các số lẻ có 3 chữ số. Hỏi B có bao nhiêu phần tử?
 - Cho C là tập hợp các số nguyên dương bé hơn 500 và là bội của 3. Hỏi C có bao nhiêu phần tử?

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Kí hiệu nào sau đây dùng để viết đúng mệnh đề "7 là số tự nhiên"?

- A. $7 \subset \mathbb{N}$. B. $7 \in \mathbb{N}$. C. $7 < \mathbb{N}$. D. $7 \leq \mathbb{N}$.

Câu 2. Kí hiệu nào sau đây dùng để viết đúng mệnh đề " $\sqrt{2}$ không phải là số hữu tỉ"?

- A. $\sqrt{2} \neq \mathbb{Q}$. B. $\sqrt{2} \not\subset \mathbb{Q}$. C. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. D. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Câu 3. Cho A là một tập hợp, hãy tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

- A. $A \in A$. B. $\emptyset \subset A$. C. $A \subset A$. D. $A \in \{A\}$.

Câu 4. Cho tập hợp $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 \leq n \leq 10\}$. Dạng liệt kê của tập hợp A là

- A. $A = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. B. $A = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.
C. $A = \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. D. $A = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Câu 5. Cho tập hợp $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid -2 < n \leq 5\}$. Tập hợp A bằng tập hợp nào sau đây?

- A. $M = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$. B. $N = \{-1; 1; 2; 3; 4; 5\}$.
C. $P = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. D. $Q = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Câu 6. Tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x - 7 = 0\}$ có bao nhiêu phần tử?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 7. Cho tập hợp $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x - 4 = 0\}$. Dùng phương pháp liệt kê phần tử, xác định tập hợp B .

- A. $B = \{-1\}$. B. $B = \{4\}$. C. $B = (-1; 4)$. D. $B = \{-1; 4\}$.

Câu 8. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 + 8x + 15 = 0\}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $A = \{-3; -5\}$. B. $A = \emptyset$. C. $A = \{\emptyset\}$. D. $A = \{0\}$.

Câu 9. Tập hợp $Y = \{a\}$ có bao nhiêu tập hợp con?

- A. 2. B. 4. C. 1. D. 0.

Câu 10. Tập hợp $A = \{1; 2; 3\}$ có bao nhiêu tập con gồm hai phần tử?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 11. Tập hợp $\{a; b; c\}$ có bao nhiêu tập con?

- A. 3. B. 6. C. 7. D. 8.

Câu 12. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào bằng tập $\emptyset$?

- A. $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 - 1 < 0\}$. B. $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 1 = 0\}$.
C. $C = \{n \in \mathbb{Z} \mid -2 < n < 5\}$. D. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 2 = 0\}$.

Câu 13. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào khác tập $\emptyset$?

A. $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n + 1 = 0\}$.

B. $B = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ và } x^2 + y^2 = 0\}$.

C. $C = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 2\}$.

D. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 + x - 1 = 0\}$.

Câu 14. Cho tập hợp $B = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{N} \text{ và } x + y = 2\}$. Tập hợp B có bao nhiêu phần tử?

A. 4.

B. 8.

C. 3.

D. 9.

Câu 15. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - 4)(2x + 3)(3x^2 + x - 4) = 0\}$. Dạng liệt kê của tập hợp A là

A. $A = \{-2; 2\}$.

B. $A = \left\{-2; -\frac{3}{2}; -\frac{4}{3}; 1; 2\right\}$.

C. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -2 \leq x \leq 2\}$.

D. $A = \{-2; 1; 2\}$.

Câu 16. Có bao nhiêu tập hợp X thỏa mãn điều kiện $\{a; b\} \subset X \subset \{a; b; c; d; e\}$?

A. 2.

B. 4.

C. 8.

D. 10.

Câu 17. Ta gọi H là tập hợp các hình bình hành, V là tập hợp tất cả các hình vuông, N là tập hợp tất cả các hình chữ nhật và T là tập hợp tất cả các hình tứ giác. Hãy tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. $H \subset T$.

B. $V \subset N$.

C. $V \subset H$.

D. $N \subset V$.

Câu 18. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 4\}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $A = (-1; 4]$.

B. $A = \{-1; 4\}$.

C. $A = (-1; 4)$.

D. $A = [-1; 4]$.

Câu 19. Cho tập hợp $X = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $X = (-2; 5)$.

B. $X = \{-2; 5\}$.

C. $X = [-2; 5)$.

D. $X = [-2; 5]$.

Câu 20. Tập hợp $X = [-1; 4]$ có bao nhiêu phần tử?

A. 2.

B. 1.

C. 5.

D. Vô số.

Câu 21. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| \leq 1\}$. Tập A bằng tập nào trong các tập hợp sau?

A. $(0; 1)$.

B. $[0; 1]$.

C. $[0; 2]$.

D. $[-1; 2]$.

Câu 22. Cho tập hợp $A = [-2; 1)$. Tập hợp A là tập con của tập hợp nào sau đây?

A. $B = [-1; 2)$.

B. $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 1\}$.

C. $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x < 1\}$.

D. $E = \{x \in \mathbb{N} \mid -2 \leq x < 1\}$.

Câu 23. Cho tập hợp $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$. Tập hợp nào trong các tập hợp sau đây **không** chứa tập hợp X ?

A. $A = [-3; 7)$.

B. $\mathbb{R}$.

C. $B = [-3; +\infty)$.

D. $C = [-1; +\infty)$.

Câu 24. Cho tập hợp $X = [-3; 5]$. Biểu diễn tập hợp X trên trục số ta được hình biểu diễn nào trong các hình sau (phần không bị gạch chéo)?



Câu 25. Cho tập hợp A được biểu diễn trên trục số như sau (phần không bị gạch chéo).



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $A = (3; 5)$.

B. $A = [3; 5)$.

C. $A = [3; 5]$.

D. $A = (3; 5]$.

Câu 26. Cho các tập hợp $A = (-1; 3)$, $B = (-\infty; 4)$ và $C = [-1; 3]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $B \subset A$. B. $B \subset C$. C. $C \subset B$. D. $C \subset A$.

Câu 27. Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $a < b < c < d$. Hãy chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

- A. $(a; c) \subset (c; d)$. B. $(b; c) \subset (b; d)$. C. $(b; c) \subset (a; d)$. D. $(a; c) \subset (a; d)$.

Câu 28. Xác định tất cả các giá trị của m sao cho $(m - 7; m) \subset (-4; 3)$?

- A. $m > 3$. B. $m < 3$. C. $m = 3$. D. Không tồn tại m .

Câu 29. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để tập hợp $(1; m)$ chứa đúng 1 số nguyên dương.

- A. $m = 2$. B. $m > 2$. C. $m = 3$. D. $m = 4$.

Câu 30. Cho hai tập hợp $A = [1; 3]$ và $B = [m; m + 1]$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $B \subset A$.

- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $1 < m < 2$. D. $1 \leq m \leq 2$.

—HẾT—

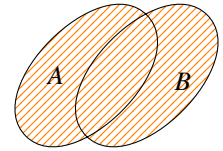
Bài 3

CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hợp của hai tập hợp

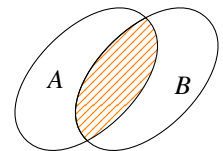
- $A \cup B = \{x | x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$.
- Ghi nhớ: Gom hết phần tử của cả hai tập, các phần tử trùng nhau thì ta ghi 1 lần.



Biểu đồ Ven minh họa $A \cup B$

2. Giao của hai tập hợp

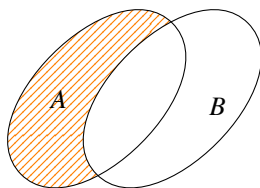
- $A \cap B = \{x | x \in A \text{ và } x \in B\}$.
- Ghi nhớ: Lấy phần chung của 2 tập hợp.



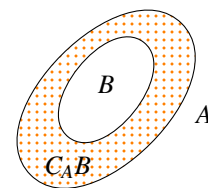
Biểu đồ Ven minh họa $A \cap B$

3. Hiệu của hai tập hợp, phần bù của tập con

- $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ và } x \notin B\}$.
- Ghi nhớ: Lấy phần riêng (thuộc A mà không thuộc B)
- Đặc biệt: Nếu $B \subset A$ thì $A \setminus B$ được kí hiệu là $C_A B$ (gọi là phần bù của B trong A).



Biểu đồ Ven minh họa $A \setminus B$



Biểu đồ Ven minh họa phần bù của B trong A

B RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

KN

1

Các phép toán trên tập hợp

Ví dụ 1. Cho A là tập hợp các học sinh lớp 10 đang học ở trường em, B là tập hợp học sinh đang học tiếng Anh ở trường em. Hãy diễn đạt bằng lời các tập hợp sau.

a) $A \cap B$.

b) $A \setminus B$.

c) $A \cup B$.

d) $B \setminus A$

Ví dụ 2. Cho hai tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ và $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$. Tìm các tập hợp $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$.

Ví dụ 3. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}, B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3k - 1, k \in \mathbb{N}, k \leq 3\}$. Xác định tập $A, B, A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$.

Ví dụ 4. Cho tập hợp $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ và các tập hợp con $A = \{1; 2; 3; 4\}, B = \{2; 4; 6; 8\}$. Xác định $C_E A, C_E B, C_E (A \cup B), C_E A \cap C_E B$.

Ví dụ 5. Xác định hai tập A, B biết rằng $A \setminus B = \{1; 5; 7; 8\}, B \setminus A = \{2; 10\}, A \cap B = \{3; 6; 9\}$.

Ví dụ 6. Cho hai tập hợp $A = \{1; 2\}$ và $B = \{1; 2; 3; 4\}$. Tìm tất cả các tập hợp X sao cho $A \cup X = B$.

KN

2

Các phép toán trên tập hợp con của tập số thực

Ví dụ 7. Xác định các tập hợp sau đây và biểu diễn chúng trên trục số.

- a) $(0; 3) \cap (2; 4)$. b) $[-1; 4] \cap (2; 5)$. c) $\mathbb{R} \cap (-1; 1)$.

Ví dụ 8. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$. Tìm $A \cap B$.

Ví dụ 9. Cho $A = [-2; 4], B = (2; +\infty), C = (-\infty; 3)$. Xác định các tập hợp sau đây và biểu diễn chúng trên trục số.

- a) $A \cap B$; b) $B \cap C$; c) $A \cap C$;
d) $\mathbb{R} \cap A$; e) $\mathbb{R} \cap B$; f) $A \cap B \cap C$.

Ví dụ 10. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 2| < 2\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 4| \geq 3\}, C = [-5; 3]$. Tìm các tập hợp

- a) $A \cup B$. b) $A \cap B \cup C$. c) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

Ví dụ 11. Xác định các tập hợp sau đây và biểu diễn chúng trên trục số.

- a) $(0; 3) \setminus (2; 4)$. b) $(-4; 2] \setminus [2; 4)$. c) $\mathbb{R} \setminus (-1; 1)$.

Ví dụ 12. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$. Tìm $A \setminus B, B \setminus A$.

Ví dụ 13. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 4\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x\}$. Tìm $C_B A$.

Ví dụ 14. Cho hai nửa khoảng $A = (-1; 0], B = [0; 1)$. Tìm $A \setminus B$ và $C_{\mathbb{R}} A$.

C

VẬN DỤNG, THỰC TIỄN

KN

3

Các bài toán biện luận theo tham số

Ví dụ 15. Cho hai tập hợp $A = (-3; 5]$, $B = [a; +\infty)$. Tìm a để

a) $A \cap B = [-2; 5]$.

b) $A \cap B$ có đúng một phần tử.

Ví dụ 16. Cho $A = (-\infty; m+1]$; $B = (-1; +\infty)$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để $A \cup B = \mathbb{R}$.

Ví dụ 17. Cho số thực $a < 0$ và hai tập hợp $A = (-\infty; 9a)$, $B = \left(\frac{4}{a}; +\infty\right)$. Tìm a để $A \cap B \neq \emptyset$.

Ví dụ 18. Cho hai tập hợp $A = [-2; m]$, $B = (1; 5]$. Tùy theo m , xác định tập $B \setminus A$.

KN

4

Ứng dụng thực tế các phép toán tập hợp

Ví dụ 19. Trong kì thi học sinh giỏi cấp trường, lớp 10C1 có 45 học sinh trong đó có 17 bạn đạt học sinh giỏi Văn, 25 bạn đạt học sinh giỏi Toán và 13 bạn học sinh không đạt học sinh giỏi. Tìm số học sinh giỏi cả Văn và Toán của lớp 10C1.

Ví dụ 20. Một lớp học có 50 học sinh trong đó có 30 em biết chơi bóng chuyền, 25 em biết chơi bóng đá, 10 em biết chơi cả bóng đá và bóng chuyền. Hỏi có bao nhiêu em không biết chơi môn nào trong hai môn ở trên?

Ví dụ 21. Lớp 10A có 15 bạn thích môn Văn, 20 bạn thích môn Toán. Trong số các bạn thích văn hoặc toán có 8 bạn thích cả 2 môn. Trong lớp vẫn còn 10 bạn không thích môn nào trong 2 môn Văn và Toán. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu học sinh?

Ví dụ 22. Kết quả thi học kì một của một trường THPT có 48 thí sinh giỏi môn Toán, 37 thí sinh giỏi môn Vật Lí, 42 thí sinh giỏi môn Văn. Biết rằng có 75 thí sinh giỏi môn Toán hoặc môn Vật lí, 76 thí sinh giỏi môn Toán hoặc môn Văn, 66 thí sinh giỏi môn Vật lí hoặc môn Văn và có 4 thí sinh giỏi cả ba môn. Hỏi

a) có bao nhiêu học sinh chỉ giỏi 1 môn.

b) có bao nhiêu học sinh chỉ giỏi 2 môn.

c) có bao nhiêu học sinh giỏi ít nhất 1 môn.

D

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1

Cho các tập hợp sau

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x < 6\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid (1 - 3x)(x^4 - 3x^2 + 2) = 0\};$$

$$C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

- Viết các tập hợp A, B dưới dạng liệt kê các phần tử.
- Tìm $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, C_{B \cup A} A \cap B$.
- Chứng minh rằng $A \cap (B \cup C) = A$.

2 Cho hai tập A, B khác $\emptyset$, $A \cup B$ có 6 phần tử, số phần tử của $A \cap B$ bằng nửa số phần tử của B . Hỏi A, B có thể có bao nhiêu phần tử?

3 Cho các tập hợp

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + 7x + 6)(x^2 - 4) = 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x \leq 8\}$$

$$C = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -2 \leq x \leq 4\}.$$

- Hãy viết lại các tập hợp A, B, C dưới dạng liệt kê các phần tử.
- Tìm $A \cup B, A \cap B, B \setminus C, C_{A \cup B} (B \setminus C)$.
- Tìm $(A \cup C) \setminus B$.

4 Cho đoạn $A = [-5; 1]$ và khoảng $B = (-3; 2)$. Xác định $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, C_{\mathbb{R}} B$.

5 Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 4\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$. Viết các tập hợp sau đây $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, C_{\mathbb{R}} B$ dưới dạng các khoảng, nửa khoảng, đoạn.

6 Cho các tập hợp $A = (-\infty; m)$ và $B = [3m - 1; 3m + 3]$. Tìm tất cả những giá trị thực của tham số m để $A \cap B = \emptyset$

7 Cho các nửa khoảng $A = (a; a + 1], B = [b; b + 2)$.

- Gọi $C = A \cup B$. Với điều kiện nào của a, b thì C là một đoạn. Tính độ dài của C khi đó.
- Gọi $C = A \cap B$. Với điều kiện nào của a, b thì C là một đoạn. Tính độ dài của C khi đó.

8 Cho hai tập hợp $A = [a; a + 2], B = [b; b + 1]$. Tìm điều kiện của a, b để $A \cap B \neq \emptyset$.

9 Cho hai tập hợp $A = [2; m + 1]$ và $B = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Tìm m để $A \cap B$ chỉ có đúng 1 phần tử.

10 Một nhóm học sinh giỏi các bộ môn: Anh, Toán, Văn. Có 18 em giỏi Văn, 10 em giỏi Anh, 12 em giỏi Toán, 3 em giỏi Văn và Toán, 4 em giỏi Toán và Anh, 5 em giỏi Văn và Anh, 2 em giỏi cả ba môn. Hỏi nhóm đó có bao nhiêu em?

11 Một lớp có 40 học sinh, mỗi học sinh đều đăng ký chơi ít nhất 1 trong 2 môn thể thao là bóng đá hoặc cầu lông. Có 30 học sinh có đăng ký môn bóng đá, 25 học sinh có đăng ký môn cầu lông. Hỏi có bao nhiêu em đăng ký cả 2 môn.

12 Mỗi học sinh của lớp 10A đều chơi bóng đá hoặc bóng chuyền. Biết rằng có 25 bạn chơi bóng đá, 20 bạn chơi bóng chuyền và 10 bạn chơi cả 2 môn thể thao. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu học sinh.

13 Lớp 10A có 45 học sinh, có 15 học sinh giỏi và 20 học sinh xếp hạnh kiểm tốt, trong đó có 10 bạn vừa học giỏi vừa xếp hạnh kiểm tốt. Các học sinh được học sinh giỏi hoặc hạnh kiểm tốt đều được khen thưởng. Số học sinh được khen thưởng của lớp 10A là bao nhiêu?

- 14** Trong số 42 học sinh của lớp 10A có 13 bạn được xếp loại học lực giỏi, 22 bạn được xếp loại hạnh kiểm tốt, trong đó 7 bạn vừa học lực giỏi, vừa có hạnh kiểm tốt. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu bạn được khen thưởng? Biết rằng muốn được khen thưởng thì bạn đó phải có học lực giỏi hoặc có hạnh kiểm tốt.
- 15** Một nhóm học sinh giỏi các bộ môn: Anh, Toán, Văn. Có 18 em giỏi Văn, 10 em giỏi Anh, 12 em giỏi Toán, 3 em giỏi Văn và Toán, 4 em giỏi Toán và Anh, 5 em giỏi Văn và Anh, 2 em giỏi cả ba môn. Hỏi nhóm đó có bao nhiêu em?
- 16** Có 45 học sinh giỏi, mỗi em giỏi ít nhất một môn. Có 22 em giỏi Văn, 25 em giỏi Toán, 20 em giỏi Anh. Có 8 em giỏi đúng hai môn Văn, Toán; Có 7 em giỏi đúng hai môn Toán, Anh; Có 6 em giỏi đúng hai môn Anh, Văn. Hỏi có bao nhiêu em giỏi cả ba môn Văn, Toán, Anh?
- 17** Để thành lập đội tuyển học sinh giỏi khối 10, nhà trường tổ chức thi chọn các môn Toán, Văn, Anh trên tổng số 111 học sinh. Kết quả có: 70 học sinh giỏi Toán, 65 học sinh giỏi Văn, 62 học sinh giỏi Anh. Trong đó có 49 học sinh giỏi cả hai môn Văn và Toán, 32 học sinh giỏi cả hai môn Toán và Anh, 34 học sinh giỏi cả hai môn Văn và Anh. Xác định số học sinh giỏi cả ba môn Văn, Toán, Anh. Biết rằng có 6 học sinh không đạt yêu cầu cả ba môn.

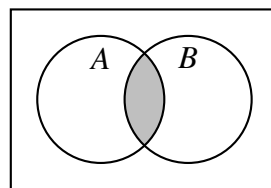
E BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tập hợp $A \neq \emptyset$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

- A. $A \cup \emptyset = A$. B. $A \cup \emptyset = \emptyset$. C. $A \cup A = \emptyset$. D. $\emptyset \cup A = \emptyset$.

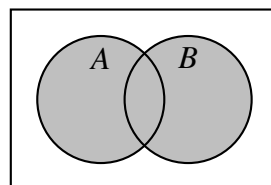
Câu 2. Cho các tập hợp A, B được minh họa bằng biểu đồ Ven như hình bên. Phần tô màu xám trong hình là biểu diễn của tập hợp nào sau đây?

- A. $A \cup B$. B. $A \cap B$.
C. $A \setminus B$. D. $B \setminus A$.



Câu 3. Cho các tập hợp A, B được minh họa bằng biểu đồ Ven như hình bên. Phần tô màu xám trong hình là biểu diễn của tập hợp nào sau đây?

- A. $A \cup B$. B. $A \cap B$.
C. $A \setminus B$. D. $B \setminus A$.



Câu 4. Cho hai tập hợp $X = \{7, 2, 8, 4, 9, 12\}$ và $Y = \{1, 3, 7, 4\}$. Tìm tập hợp $X \cap Y$.

- A. $\{1, 2, 3, 4, 8, 9, 7, 12\}$. B. $\{2, 8, 9, 12\}$.
C. $\{4, 7\}$. D. $\{1, 3\}$.

Câu 5. Cho hai tập hợp $X = \{2, 4, 6, 9\}$ và $Y = \{1, 2, 3, 4\}$. Tìm tập hợp $X \cup Y$.

- A. $\{1, 3\}$. B. $\{6, 9\}$. C. $\{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$. D. $\{2, 4\}$.

Câu 6. Cho hai tập hợp $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ và $Y = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Tìm tập hợp $X \setminus Y$.

- A. $\{0\}$. B. $\{0, 1\}$. C. $\{1, 2\}$. D. $\{1, 5\}$.

Câu 7. Cho hai tập hợp $X = \{1, 5\}$ và $Y = \{1, 3, 5\}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A. $C_Y X = \{3\}$. B. $C_Y X = \{1\}$. C. $C_Y X = \{1, 3, 5\}$. D. $C_Y X = \{1, 3, 5\}$.

Câu 8. Cho hai tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4\}$ và $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Tìm tập hợp $A \setminus B$.

- A. $\{1, 2, 3\}$. B. $\{1, 3\}$. C. $\{6, 8\}$. D. $\{2, 4, 6\}$.

Câu 9. Cho hai tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ và $B = \{2, 4, 6\}$. Tìm tập hợp $C_A B$.

- A. $\{2, 4, 6\}$. B. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. C. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. D. $\{1, 3, 5, 7\}$.

Câu 10. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 1)(x^2 - 3x - 4) = 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\}$. Tìm tập hợp $A \cup B$.

- A. $\{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$. B. $\{-2, -1, 0, 1, 2, -4\}$.
C. $\{-1, 1\}$. D. $\{-2, 0, 2\}$.

Câu 11. Cho tập hợp $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 4\}$ và tập hợp A gồm những số tự nhiên lẻ không lớn hơn 8. Tìm tập hợp $A \cap B$.

- A. $\{1, 3\}$. B. $\{1, 2, 3, 4\}$. C. $\{0, 1, 3, 5\}$. D. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$.

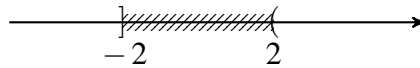
Câu 12. Cho hai tập $A = \{1, 2, 3\}$ và $B = \{0, 1, 3, 5\}$. Tất cả các tập X thỏa mãn $X \subset (A \cap B)$ là

- A. $\emptyset; \{1\}; \{1, 3\}; \{3\}; \{1, 3, 5\}$. B. $\{1\}; \{3\}; \{1, 3\}$.
C. $\emptyset; \{1\}; \{3\}$. D. $\emptyset; \{1\}; \{3\}; \{1, 3\}$.

Câu 13. Cho các số thực a, b, c, d và $a < b < c < d$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $(a; c) \cap (b; d) = (b; c)$. B. $(a; c) \cap [b; d] = [b; c]$.
C. $(a; c) \cap [b; d] = [b; c]$. D. $(a; c) \cup (b; d) = (b; c)$.

Câu 14. Trên trục số, phần không bị gạch biểu diễn tập hợp nào trong các tập hợp sau?



- A. $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. B. $(-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$.
C. $(-\infty; -2) \cup [2; +\infty)$. D. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Câu 15. Cho hai tập hợp $X = [-2; 3]$ và $Y = (1; 5]$. Tìm tập hợp $X \setminus Y$.

- A. $[-2; 1]$. B. $(3; 5]$. C. $[-2; 1)$. D. $(-2; 1]$.

Câu 16. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 2 \geq 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 - x \geq 0\}$. Tìm tập hợp $A \cap B$.

- A. $[-2; 5]$. B. $[-2; 6]$. C. $[-5; 2]$. D. $(-2; +\infty)$.

Câu 17. Cho hai tập hợp $A = [-5; 3]$; $B = [0; 2)$. Tìm tập hợp $\mathbb{R} \setminus (B \cap A)$.

- A. $(-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$. B. $[0; 2)$. C. $[2; +\infty)$. D. $(-\infty; 0)$.

Câu 18. Cho tập hợp $A = (2; +\infty)$. Tìm tập hợp $C_{\mathbb{R}}A$.

- A. $[2; +\infty)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(-\infty; 2]$. D. $(-\infty; -2]$.

Câu 19. Cho các tập hợp sau $A = (-1; 5]$, $B = (2; 7)$. Tìm tập hợp $A \setminus B$.

- A. $(-1; 2]$. B. $(2; 5]$. C. $(-1; 7)$. D. $(-1; 2)$.

Câu 20. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 2 \geq 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 - x \geq 0\}$. Tìm tập hợp $A \setminus B$.

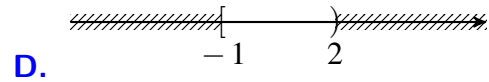
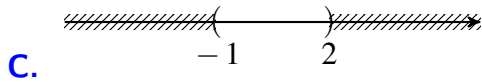
- A. $[-2; 5]$. B. $[-2; 6]$. C. $(5; +\infty)$. D. $(2; +\infty)$.

Câu 21. Biểu diễn trên trục số của tập hợp $[-3; 1) \cap (-2; 4]$ là hình nào?

- A. B.
C. D.

Câu 22. Biểu diễn trên trục số của tập hợp $(0; 2) \cup [-1; 1)$ là hình nào?

- A. B.



Câu 23. Cho A là tập các số nguyên dương và chia hết cho 6, B là tập hợp các số nguyên dương chia hết cho 2, C là tập hợp các số nguyên dương chia hết cho 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $A \cap B = \emptyset$. B. $A \cup B = C$. C. $A \cap C = B$. D. $B \cap C = A$.

Câu 24. Trong kì thi học sinh giỏi cấp trường, lớp 10A có 45 học sinh trong đó có 17 bạn được công nhận học sinh giỏi Văn, 25 bạn học sinh giỏi Toán và 13 bạn học sinh không đạt học sinh giỏi. Tìm số học sinh giỏi cả Văn và Toán của lớp 10A.

- A. 42. B. 32. C. 17. D. 10.

Câu 25. Lớp 10A có 10 học sinh giỏi Toán, 15 học sinh giỏi Văn, 5 học sinh giỏi cả 2 môn Toán Văn và 2 học sinh không giỏi môn nào. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu học sinh?

- A. 20. B. 22. C. 25. D. 28.

Câu 26. Lớp 10B₁ có 7 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Lý, 6 học sinh giỏi Hóa, 3 học sinh giỏi cả Toán và Lý, 4 học sinh giỏi cả Toán và Hóa, 2 học sinh giỏi cả Lý và Hóa, 1 học sinh giỏi cả 3 môn Toán, Lý, Hóa. Số học sinh giỏi ít nhất một môn (Toán, Lý, Hóa) của lớp 10B₁ là

- A. 9. B. 10. C. 18. D. 28.

Câu 27. Cho hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$. Xét các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | g(x) = 0\}$, $C = \left\{x \in \mathbb{R} \left| \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \right.\right\}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $C = A \cup B$. B. $C = A \cap B$. C. $C = A \setminus B$. D. $C = B \setminus A$.

Câu 28. Cho hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$. Xét các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | g(x) = 0\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} | f^2(x) + g^2(x) = 0\}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $C = A \cup B$. B. $C = A \cap B$. C. $C = A \setminus B$. D. $C = B \setminus A$.

Câu 29. Cho hai tập hợp $A = (-\infty; m - 1]$, $B = [1; +\infty)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A \cap B = \emptyset$.

- A. $m > -1$. B. $m \geq -1$. C. $m \leq 2$. D. $m < 2$.

Câu 30. Cho các tập $B = \{x \in \mathbb{R} | -5 \leq x \leq 5\}$; $C = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$, và $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geq b\}$. Xác định a, b biết $C \cap B$ và $D \cap B$ là các đoạn có độ dài lần lượt bằng 5 và 9.

- A. $a = 0; b = -4$. B. $a = 5; b = 9$. C. $a = -4; b = 0$. D. $a = -5; b = 5$.

—HẾT—

ĐỀ TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG

1. Đề số 1

Câu 1. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | 4 \leq x \leq 9\}$. Sử dụng các kí hiệu “khoảng”, “nửa khoảng” và “đoạn” để viết lại tập A .

- A. $A = (4; 9]$. B. $A = [4; 9]$. C. $A = [4; 9)$. D. $(4; 9)$.

Câu 2. Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề sau “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ ”.

- A. “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$ ”. B. “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ ”. C. “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$ ”. D. “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ ”.

Câu 3. Cho tập hợp $M = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Số các tập con của M luôn chứa cả ba phần tử 1, 3, 5 là

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 8.

Câu 4. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = n$. B. $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 > 0$.
C. $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + 1$ là số lẻ. D. $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 - 2 = 0$.

Câu 5. Trong các câu khẳng định sau, câu nào là mệnh đề sai?

- A. Tổng 3 góc trong của một tam giác bằng 180° .
B. Nếu tam giác ABC thỏa mãn $AB^2 + AC^2 = BC^2$ thì tam giác ABC vuông tại B .
C. 2 là số nguyên tố.
D. Nếu một phương trình bậc hai có biệt thức Δ không âm thì nó có nghiệm.

Câu 6. Cho hai tập hợp $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ và $B = \{-2, 1, 4, 6\}$. Tìm tập hợp $A \setminus B$.

- A. $\{0, 2, 3, 5\}$. B. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.
C. $\{1, 4\}$. D. $\{-2, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Câu 7. Hỏi tập hợp $A = \{k^2 + 1 | k \in \mathbb{Z}, |k| \leq 2\}$ có bao nhiêu phần tử?

- A. 3. B. 5. C. 2. D. 1.

Câu 8. Cho mệnh đề chứa biến $P(x) : “x + 15 \leq x^2, x \in \mathbb{R}”$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $P(3)$. B. $P(4)$. C. $P(0)$. D. $P(5)$.

Câu 9. Tập hợp nào sau đây chỉ gồm các số vô tỷ?

- A. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. B. $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}^*$. C. $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. D. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 10. Tập hợp $(-\infty; 2] \cap (-6; +\infty)$ bằng tập nào dưới đây?

- A. $(-6; 2]$. B. $(-\infty; +\infty)$. C. $[-6; 2]$. D. $(-6; 2)$.

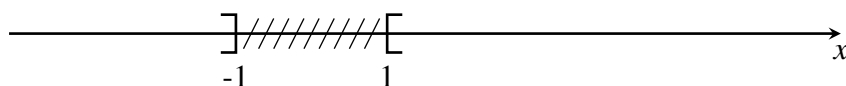
Câu 11. Cho hai tập hợp $A = \{x | x \in \mathbb{R}\}$ và $B = (0; +\infty)$. Tìm tập hợp $A \setminus B$.

- A. $(0; +\infty)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $[0; +\infty)$. D. $(-\infty; 0]$.

Câu 12. Tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 2\}$ bằng tập hợp nào dưới đây?

- A. $[0; 2]$. B. $\{0; 2\}$. C. $(0; 2]$. D. $(0; 2)$.

Câu 13. Hình vẽ dưới đây (phần không bị gạch chéo) biểu diễn cho tập hợp nào?



- A. $(-\infty; 1)$. B. $A = [-1; 1]$.
C. $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. D. $(1; +\infty)$.

Câu 14. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Nếu hai tam giác bằng nhau thì hai tam giác đó đồng dạng.
- B. Nếu hai tam giác bằng nhau thì bán kính đường tròn ngoại tiếp của hai tam giác đó bằng nhau.
- C. Nếu hai tam giác bằng nhau thì hai tam giác đó diện tích bằng nhau.
- D. Nếu hai tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng nhau thì hai tam giác đó bằng nhau.

Câu 15. Cho tập hợp $X = (-\infty; 2] \cap (-6; +\infty)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $X = (-6; 2]$.
- B. $X = (-\infty; +\infty)$.
- C. $X = (-6; +\infty)$.
- D. $X = (-\infty; 2]$.

Câu 16. Cho các tập hợp $A = (-2; 15)$ và $B = (3; +\infty)$. Khi đó $A \cup B$ là tập hợp nào sau đây?

- A. $[15; +\infty)$.
- B. $(-2; 3]$.
- C. $(-2; +\infty)$.
- D. $(3; 15)$.

Câu 17. Hãy viết tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 3x + 1 = 0\}$ dưới dạng liệt kê các phần tử.

- A. $A = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
- B. $A = \left\{1; \frac{1}{2}\right\}$.
- C. $A = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.
- D. $A = \left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$.

Câu 18. Cho 3 tập hợp $A = (-\infty; 1]$, $B = [-2; 2]$ và $C = (0; 5)$. Tìm tập hợp $P = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

- A. $P = [1; 2]$.
- B. $P = (-2; 5)$.
- C. $P = [-2; 1]$.
- D. $P = (0; 1]$.

Câu 19. Cho các tập hợp $A = (-3; 3)$, $B = (-2; +\infty)$ và $C = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. Khi đó tập hợp $A \cap B \cap C$ là

- A. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq \frac{1}{2}\right\}$.
- B. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < \frac{1}{2}\right\}$.
- C. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < \frac{1}{2}\right\}$.
- D. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq \frac{1}{2}\right\}$.

Câu 20. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow -2\sqrt{23} > -2 \cdot 5$.
- B. $-\pi < -2 \Leftrightarrow \pi^2 < 4$.
- C. $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow 2\sqrt{23} < 2 \cdot 5$.
- D. $\pi < 4 \Leftrightarrow \pi^2 < 16$.

Câu 21. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 1)(x^2 - 3x - 4) = 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\}$. Tìm tập hợp $A \cup B$.

- A. $\{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$.
- B. $\{-1, 1\}$.
- C. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
- D. $\{-2, 0, 2\}$.

Câu 22. Để phục vụ cho công việc tiêm vắc-xin phòng chống Covid-19, Sở y tế đã huy động 30 cán bộ đo huyết áp, 25 cán bộ tiêm vắc-xin. Trong đó có 12 cán bộ làm được cả 2 công việc đo huyết áp và tiêm vắc-xin. Hỏi Sở y tế đã huy động tất cả bao nhiêu cán bộ cho công việc tiêm vắc-xin phòng chống Covid-19?

- A. 42.
- B. 31.
- C. 55.
- D. 43.

Câu 23. Trong một khoảng thời gian nhất định, tại một địa phương, Đài khí tượng thủy văn đã thống kê được: Số ngày mưa: 10 ngày; Số ngày có gió: 8 ngày; Số ngày lạnh: 6 ngày; Số ngày mưa và gió: 5 ngày; Số ngày mưa và lạnh: 4 ngày; Số ngày lạnh và có gió: 3 ngày; Số ngày mưa, lạnh và có gió: 1 ngày. Vậy có bao nhiêu ngày thời tiết xấu (có gió, mưa hay lạnh)?

- A. 16.
- B. 14.
- C. 15.
- D. 13.

Câu 24. Cho $A = (-\infty; 2m - 7)$ và $B = (13m + 1; +\infty)$. Số nguyên m nhỏ nhất thỏa mãn $A \cap B = \emptyset$ là

- A. 2.
- B. -1.
- C. 0.
- D. 1.

Câu 25. Cho hai tập khác rỗng $A = (m - 1; 4]$, $B = (-2; 2m + 2)$ với $m \in \mathbb{R}$. Xác định m để $A \cap B \neq \emptyset$.

- A. $-2 < m < 5$.
- B. $m < 5$.
- C. $m > -3$.
- D. $-3 < m < 5$.

2. Đề số 2

Câu 1. Cho các phát biểu sau:

1. Hãy đi nhanh lên!
2. $4 + 5 + 6 = 15$.
3. Năm 2000 là năm nhuận.
4. $x + 5 > 10$.
5. Trái đất hình lập phương.
6. Cần Thơ là thành phố trực thuộc trung ương.

Hỏi có bao nhiêu câu là mệnh đề?

- A. 3. B. 5. C. 4. D. 2.

Câu 2. Cho mệnh đề “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$ ”. Mệnh đề phủ định của mệnh đề đã cho là

- A. “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \leq 0$ ”. B. “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$ ”.
C. “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \leq 0$ ”. D. “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 < 0$ ”.

Câu 3. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 5\}$. Tập A là tập nào trong các tập hợp số sau?

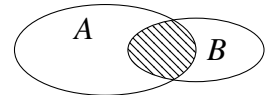
- A. $(-\infty; 5]$. B. $(-\infty; 5)$. C. $(5; +\infty)$. D. $[5; +\infty)$.

Câu 4. Cho tập hợp $A = \{a; b; c; d\}$. Số tập hợp con của A có hai phần tử là

- A. 8. B. 7. C. 6. D. 5.

Câu 5. Cho A, B là hai tập hợp bất kì. Phần gạch chéo trong hình vẽ bên là tập hợp nào sau đây?

- A. $A \setminus B$. B. $B \setminus A$. C. $A \cap B$. D. $A \cup B$.



Câu 6. Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề có mệnh đề đảo là mệnh đề đúng?

- (1) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có chu vi bằng nhau.
- (2) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau.
- (3) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng đồng dạng với nhau.

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 7. Liệt kê các phần tử của tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} | (6x^2 - 7x + 1)(x^2 - 4) = 0\}$ ta được

- A. $A = \left\{\frac{1}{6}; \frac{1}{2}; 2\right\}$. B. $A = \{1; 2\}$. C. $A = \left\{-2; \frac{1}{6}; 1; 2\right\}$. D. $A = \{-2; 1; 2\}$.

Câu 8. Cho 2 tập hợp $A = (-7; 3), B = (-4; 5)$. Chọn khẳng định đúng.

- A. $A \setminus B = (-7; -4]$. B. $A \cap B = [-4; 3)$. C. $A \cup B = (-7; -4)$. D. $A \setminus B = (-7; -4)$.

Câu 9. Cho tập $A = \left[-\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right)$ và $B = \left[-\frac{3}{2}; \sqrt{5}\right)$. Tập $A \cup B$ là

- A. $\left[\frac{3}{2}; \sqrt{5}\right)$. B. $[-\sqrt{3}; \sqrt{5})$. C. $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$. D. $[-\sqrt{3}; -\frac{3}{2}]$.

Câu 10. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq x$. B. $\forall x \in \mathbb{N} : x^2 > 0$. C. $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 = -2x$. D. $\forall x \in \mathbb{N}^* : x^2 > 0$.

Câu 11. Tìm mệnh đề đúng.

- A. $\exists k \in \mathbb{Q} : k^2 = 2$. B. $\exists m \in \mathbb{Z} : 2m = m$. C. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$. D. $\forall n \in \mathbb{N} : n > 0$.

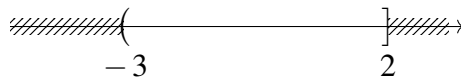
Câu 12. Cho hai tập hợp M, N thỏa mãn $M \subset N$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $M \setminus N = M$. B. $M \cap N = N$. C. $M \cap N = M$. D. $M \setminus N = N$.

Câu 13. Cho $M = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ và $N = \{0; 2; 4; 6; 8\}$. Khi đó tập hợp $M \cap N$ là

- A. $\{6; 8\}$. B. $\{0; 2; 4\}$. C. $\{0; 1; 2; 3; 4; 6; 8\}$. D. $\{1; 3\}$.

Câu 14. Hình biểu diễn sau minh họa cho tập nào sau đây?



- A. $(-3; 1] \cap (0; 2]$. B. $(-3; 0) \cup (0; 2]$. C. $(-3; 0] \cup (-1; 2]$. D. $(-3; 1] \cup [2; 4)$.

Câu 15. Tập hợp $(-3; 5) \cup [2; 7)$ là tập hợp nào sau đây?

- A. $(3; 5)$. B. $(-3; 2]$. C. $[2; 5)$. D. $(-3; 7)$.

Câu 16. Cho A là tập hợp các hình thoi, B là tập hợp các hình chữ nhật và C là tập hợp các hình vuông. Khi đó

- A. $A \cap B = C$. B. $A \setminus B = C$. C. $B \setminus A = C$. D. $A \cup B = C$.

Câu 17. Mệnh đề phủ định của mệnh đề $P: " \exists x \in \mathbb{R} : x - 3 > 0 "$ là

- A. $\bar{P}: " \forall x \in \mathbb{R} : x - 3 > 0 "$. B. $\bar{P}: " \exists x \notin \mathbb{R} : x - 3 > 0 "$.
C. $\bar{P}: " \exists x \in \mathbb{R} : x - 3 \leq 0 "$. D. $\bar{P}: " \forall x \in \mathbb{R} : x - 3 \leq 0 "$.

Câu 18. Cho hai tập hợp $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ và $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Tìm tập hợp $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

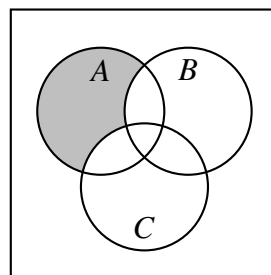
- A. $\{5, 6\}$. B. $\{2, 3, 4\}$. C. $\{0, 1, 5, 6\}$. D. $\{1, 2\}$.

Câu 19. Cho các tập hợp $A = [-4; 0]$ và $B = (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$. Khi đó tập hợp $A \cap B$ là

- A. $[-\infty; 2) \cup (4; +\infty]$. B. $[-\infty; -2) \cup (4; +\infty]$.
C. $[-4; -2)$. D. $[-4; -2) \cup (4; +\infty)$.

Câu 20. Cho các tập hợp A, B, C được minh họa bằng biểu đồ Ven như hình bên. Phần tô màu xám trong hình là biểu diễn của tập hợp nào sau đây?

- A. $(A \setminus C) \cup (A \setminus B)$. B. $(A \cup B) \setminus C$.
C. $(A \cap B) \setminus C$. D. $A \setminus (B \cup C)$.



Câu 21. Cho số thực $a < 0$. Điều kiện cần và đủ để hai khoảng $(-\infty; 9a)$ và $\left(\frac{4}{a}; +\infty\right)$ có giao khác tập rỗng là

- A. $-\frac{3}{4} < a < 0$. B. $-\frac{3}{4} \leq a < 0$. C. $-\frac{2}{3} \leq a < 0$. D. $-\frac{2}{3} < a < 0$.

Câu 22. Cho hai tập hợp $A = (-\infty; 2m - 7)$ và $B = (13m + 1; +\infty)$. Số nguyên m nhỏ nhất thỏa mãn $A \cap B = \emptyset$ là

- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = 0$. D. $m = -1$.

Câu 23. Trong kì thi học sinh giỏi cấp trường, lớp 10A có 45 học sinh trong đó có 17 bạn được công nhận học sinh giỏi Văn, 25 bạn học sinh giỏi Toán và 13 bạn học sinh không đạt học sinh giỏi. Tìm số học sinh giỏi cả Văn và Toán của lớp 10A.

- A. 10. B. 17. C. 42. D. 32.

Câu 24. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} / x < 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} / (x - m)(x - m + 4) = 0\}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $B \cap A$ có đúng 1 phần tử.

- A. 2. B. 4. C. 1. D. 3.

Câu 25. Trong kì thi đánh giá năng lực lần I năm học 2018-2019 của trường THPT Triệu Quang Phục, kết quả có 86 thí sinh đạt điểm giỏi môn Toán, 61 thí sinh đạt điểm giỏi môn Vật lí và 76 thí sinh đạt điểm giỏi môn Hóa học, 45 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Toán và Vật lí, 21 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Vật lí và Hóa học, 32 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Toán và Hóa học, 18 thí sinh đạt điểm giỏi cả ba môn Toán, Vật lí và Hóa học. Có 782 thí sinh mà cả ba môn đều không đạt điểm giỏi. Trường THPT Triệu Quang Phục có bao nhiêu thí sinh tham dự kì thi đánh giá năng lực lần I năm học 2018-2019?

- A. 925. B. 920. C. 889. D. 912.

—HẾT—

3. Đề số 3

Câu 1. Câu nào sau đây **không** phải là mệnh đề.

- A. $3 + 4 \geq 8$. B. $2 + x = 3$. C. $3 - 2 = 1$. D. $2 < \sqrt{3}$.

Câu 2. Mệnh đề phủ định của mệnh đề “2018 là số tự nhiên chẵn” là

- A. 2018 là số chẵn. B. 2018 không là số tự nhiên chẵn.
C. 2018 là số nguyên tố. D. 2018 là số chính phương.

Câu 3. Cho hai tập hợp $E = (-\infty; 6]$ và $F = [-2; 7]$. Khi đó $E \cap F$ là

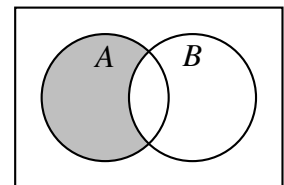
- A. $E \cap F = [-2; 6]$. B. $E \cap F = (-\infty; 7]$. C. $E \cap F = (-\infty; -2)$. D. $E \cap F = [6; 7]$.

Câu 4. Tập hợp $X = (-\infty; 2] \cap (-6; +\infty)$ là

- A. $(-4; 9]$. B. $\mathbb{R}$. C. $(-6; 2]$. D. $[-6; 2]$.

Câu 5. Cho các tập hợp A, B được minh họa bằng biểu đồ Ven như hình bên. Phần tô màu xám trong hình là biểu diễn của tập hợp nào sau đây?

- A. $A \cup B$. B. $A \cap B$.
C. $A \setminus B$. D. $B \setminus A$.



Câu 6. Cho ba tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 9\}$, $B = \{0; 2; 4; 6; 8; 9\}$, $C = \{3; 4; 5; 6; 7\}$. Tính tích các phần tử của tập hợp $A \cap (B \setminus C)$.

- A. 18. B. 7. C. 11. D. 2.

Câu 7. Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề?

- (1) Hãy mở cửa ra! (2) Số 20 chia hết cho 8.
(3) Số 17 là một số nguyên tố. (4) Bạn có thích chơi bóng đá không?

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

Câu 8. Tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - 7x + 1 = 0\}$ có bao nhiêu phần tử?

- A. 2. B. 1. C. vô số. D. 0.

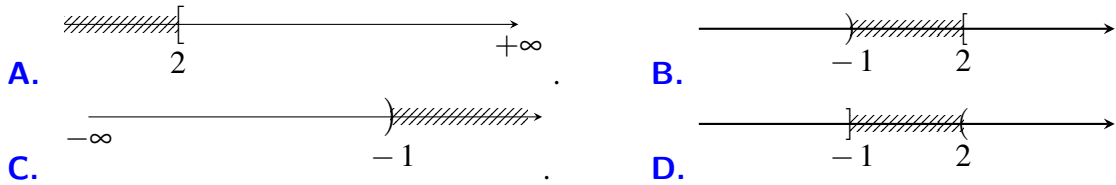
Câu 9. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **sai**?

- A. $\pi < 4 \Leftrightarrow \pi^2 < 16$. B. $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow -2\sqrt{23} > -2 \cdot 5$.
C. $-\pi < -2 \Leftrightarrow \pi^2 < 4$. D. $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow 2\sqrt{23} < 2 \cdot 5$.

Câu 10. Cho hai tập hợp $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ và $Y = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Tìm tập hợp $X \setminus Y$.

- A. $\{1, 2\}$. B. $\{1, 5\}$. C. $\{0, 1\}$. D. $\{0\}$.

Câu 11. Kết quả của phép toán $\mathbb{R} \setminus [-1; 2)$ được minh họa lên trục số là hình nào sau đây?



Câu 12. Tập $S = \{q \in \mathbb{Q} \mid 25q^4 - 9q^2 = 0\}$ có bao nhiêu phần tử?

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 13. Cho E là tập hợp các hình tứ giác; F là tập hợp các hình thang; G là tập hợp các hình thoi. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. $G \subset E$. B. $F \subset E$. C. $G \subset F$. D. $E \subset G$.

Câu 14. Cho $A = \{1; 5\}$, $B = \{1; 3; 5\}$. Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau.

- A. $A \cup B = \{3; 5\}$. B. $A \cup B = \{1; 3\}$. C. $A \cap B = \{1\}$. D. $A \cap B = \{1; 5\}$.

Câu 15. Phủ định của mệnh đề $\exists x \in \mathbb{Z} : 1 - x^2 \geq 0$ là

- A. $\forall x \in \mathbb{Z} : 1 - x^2 \geq 0$. B. $\exists x \in \mathbb{Z} : 1 - x^2 < 0$.
C. $\forall x \in \mathbb{Z} : 1 - x^2 \neq 0$. D. $\forall x \in \mathbb{Z} : 1 - x^2 < 0$.

Câu 16. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 2 \geq 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 - x \geq 0\}$. Tìm tập hợp $A \setminus B$.

- A. $(5; +\infty)$. B. $(2; +\infty)$. C. $[-2; 6]$. D. $[-2; 5]$.

Câu 17. Cho tập hợp $A = (0; 1)$. Hãy xác định tập hợp $C_{\mathbb{R}}A$.

- A. $C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$. B. $C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; 0] \cup (1; +\infty)$.
C. $C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$. D. $C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Câu 18. Tập hợp $\{1; 2; 3\}$ có bao nhiêu tập con?

- A. 6. B. 7. C. 3. D. 8.

Câu 19. Mệnh đề nào là mệnh đề **sai**?

- A. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm $O \Leftrightarrow OA = OB = OC = OD$.
B. $\triangle ABC$ đều $\Leftrightarrow \triangle ABC$ cân và có 1 góc bằng 60° .
C. Tam giác ABC vuông tại $C \Leftrightarrow AB^2 = AC^2 + CB^2$.
D. Một $\triangle ABC$ đều thì $\triangle ABC$ cân và ngược lại.

Câu 20. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 3 < 4 + 2x\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 5x - 3 < 4x - 1\}$. Tất cả các số tự nhiên thuộc cả hai tập hợp A và B là

- A. -2 và 2 . B. -3 và -2 . C. 0 và 1 . D. -1 và 1 .

Câu 21. Xét các tập hợp X, Y có cùng số phần tử. Biết rằng số phần tử của tập hợp $X \cup Y$ và $C_X Y$ lần lượt là 35 và 15. Tìm số phần tử của tập hợp X .

- A. 35. B. 20. C. 50. D. 15.

Câu 22. Cho các tập hợp $A = [m; m + 2]$, $B = [-1; 2]$. Điều kiện của m để $A \subset B$ là

- A. $\begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$. C. $-1 \leq m \leq 0$. D. $1 \leq m \leq 2$.

Câu 23. Cho các tập hợp $A = (1 - 2m; m + 1]$, $B = (-3; 5)$. Tất cả các giá trị của m sao cho B là tập con của A là

- A. $m \leq 4$. B. $m \geq 4$. C. $m \leq 2$. D. $m \geq 2$.

Câu 24. Cho hai tập hợp khác rỗng $A = (m - 1; 4]$ và $B = (-2; 2m + 2)$, với $m \in \mathbb{R}$. Tìm m để $A \cap B \neq \emptyset$.

- A. $m < 5$. B. $-3 < m < 5$. C. $-2 < m < 5$. D. $-3 < m$.

Câu 25. Lớp 10B1 có 7 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Lý, 6 học sinh giỏi Hóa, 3 học sinh giỏi cả Toán và Lý, 4 học sinh giỏi cả Toán và Hóa, 2 học sinh giỏi cả Lý và Hóa, 1 học sinh giỏi cả 3 môn Toán, Lý, Hóa. Số học sinh giỏi ít nhất một môn (Toán, Lý, Hóa) của lớp 10B1 là

- A. 10. B. 28. C. 18. D. 9.

—HẾT—

BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN



BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

⚙ Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là

$$ax + by \leq c \quad (1)$$

trong đó a, b, c là những số thực đã cho, a và b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn số.

⚙ Nghiệm của bất phương trình là những cặp số $(x_0; y_0)$ thỏa mãn (1).

⚙ Các dạng khác $ax + by < c; ax + by \geq c; ax + by > c, \dots$

2. Biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

⚙ Các bất phương trình bậc nhất hai ẩn thường có vô số nghiệm. Để mô tả tập nghiệm của chúng, ta sử dụng phương pháp biểu diễn hình học.

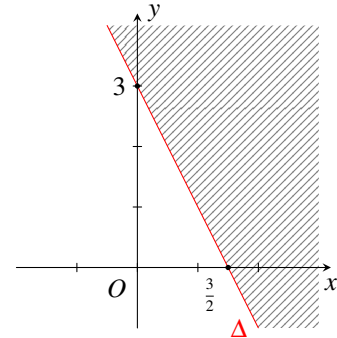
⚙ Giả sử muốn biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c \quad (2)$, ta thực hiện các bước như sau:

- ① Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đường thẳng $\Delta: ax + by = c$.
- ② Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0)$ không thuộc Δ .
- ③ Thay $(x_0; y_0)$ vào (2), sẽ có một trong hai trường hợp xảy ra:
 - + Nếu mệnh đề đúng thì miền nghiệm phải chứa M_0 . Suy ra nửa mặt phẳng bờ Δ chứa M_0 là miền nghiệm của (2).
 - + Nếu mệnh đề sai thì miền nghiệm không chứa M_0 . Suy ra nửa mặt phẳng bờ Δ không chứa M_0 là miền nghiệm của (2).

Ví dụ 1

Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình $2x + y \leq 3$ (*), ta làm như sau:

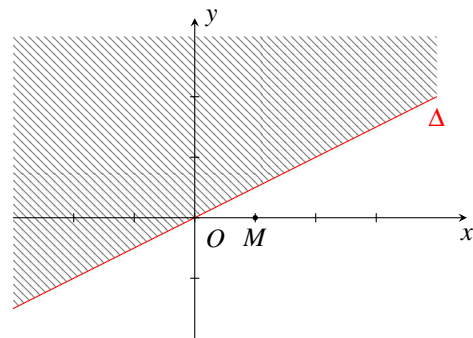
- Vẽ đường thẳng $\Delta: 2x + y = 3$.
- Lấy gốc tọa độ $O(0;0)$, ta thấy $O \notin \Delta$.
- Thay tọa độ O vào (*): $2 \cdot 0 + 0 < 3$ (thỏa). Suy ra nửa mặt phẳng bờ Δ chứa gốc tọa độ O là miền nghiệm của bất phương trình đã cho (miền không bị tô đậm trong hình vẽ)



Ví dụ 2

Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình $x - 2y > 0$ (*), ta làm như sau:

- Vẽ đường thẳng $\Delta: x - 2y = 0$.
- Lấy điểm $M(1;0)$, ta thấy $M \notin \Delta$.
- Thay tọa độ M vào (*): $1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 > 0$ (thỏa). Suy ra miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không bị gạch trong hình vẽ bên và không kể đường thẳng Δ .



CHÚ Ý

Miền nghiệm của bất phương trình $ax_0 + by_0 \leq c$ bỏ đi đường thẳng $ax + by = c$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax_0 + by_0 < c$.

B RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN

KN 1 Nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Ví dụ 1. Cho bất phương trình $2x - y < 0$.

- Trong các cặp số $(-1;2)$, $(2;0)$, $(0;1)$, $(3;-2)$, $(-1;-2)$, cặp nào là nghiệm của bất phương trình, cặp nào không phải là nghiệm của bất phương trình?
- Tìm tất cả giá trị nguyên dương của m để cặp số $(m;8)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Ví dụ 2. Cho bất phương trình $x + y \leq 10$.

- Trong các cặp số $(-1;0)$, $(10;3)$, $(7;3)$, $(3;-2)$, $(4;7)$, cặp nào là nghiệm của bất phương trình đã cho?

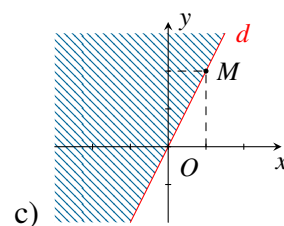
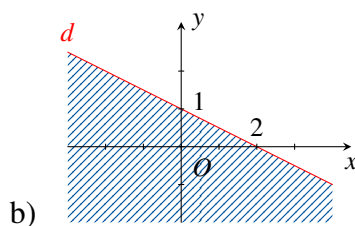
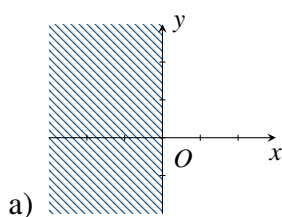
- b) Tìm tất cả giá trị nguyên dương của m để cặp số $(m; 4)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

KN**2****Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn**

Ví dụ 3. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $3x + y \geq 3$.

Ví dụ 4. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $2x - 4y < 8$.

Ví dụ 5. Phần nửa mặt phẳng không bị gạch (không kể đường thẳng d) ở mỗi hình sau là miền nghiệm của bất phương trình nào?

**C****VẬN DỤNG, THỰC TIỄN****KN****3****Các bài toán thực tiễn**

Ví dụ 6. Một gian hàng trưng bày bàn và ghế rộng $60m^2$. Diện tích để kê một chiếc ghế là $0,5m^2$, một chiếc bàn là $1,2m^2$. Gọi x là số chiếc ghế, y là số chiếc bàn được kê.

- Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y cho phần mặt sàn để kê bàn và ghế, biết diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là $12m^2$.
- Chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình trên.

Ví dụ 7. Công ty viễn thông Mobifone tính phí 1 nghìn đồng mỗi phút gọi nội mạng, 2 nghìn đồng mỗi phút gọi ngoại mạng. Mỗi tháng Minh gọi điện thoại hết từ 200 đến 300 nghìn đồng. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn mô tả cho số tiền điện thoại trả cho (x) phút gọi nội mạng và (y) phút gọi ngoại mạng trong một tháng.

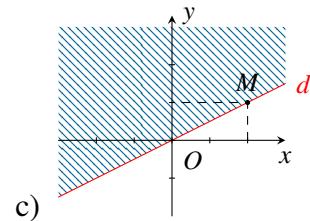
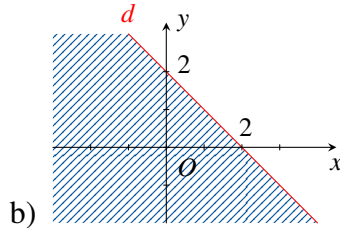
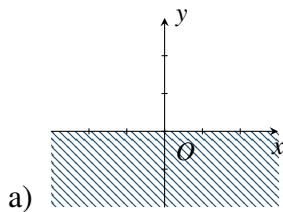
Ví dụ 8. Nhân ngày Quốc tế Thiếu Nhi 1-6, một rạp chiếu phim phục vụ các khán giả một bộ phim hoạt hình. Vé được bán ra có hai loại:

- Loại 1 (dành cho trẻ từ 6-13 tuổi): 50 000 đồng/vé.
- Loại 2 (dành cho người trên 13 tuổi): 100 000 đồng/vé.

Người ta tính toán rằng, để không phải bù lỗ thì số tiền vé thu được ở rạp chiếu phim này phải đạt tối thiểu 20 triệu đồng. Hỏi số lượng vé bán được trong những trường hợp nào thì rạp chiếu phim phải bù lỗ?

D BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau:
a) $x - 2y - 1 > 0$; b) $x + y - 1 \leq 0$.
2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $3x - y \leq 0$.
3. Phần nửa mặt phẳng không bị gạch (không kể đường thẳng d) ở mỗi hình sau là miền nghiệm của bất phương trình nào?



4. Hà mang 95000 đồng ra chợ mua hoa cúc và hoa hồng. Một bông hoa cúc có giá 4000 đồng, một bông hoa hồng có giá 7000 đồng. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn cho số tiền mà Hà phải chi để mua x bông hoa cúc và y bông hoa hồng.
5. Mỗi ngày Nga đều dành không quá 30 phút để đọc cả 2 cuốn sách A, B. Nga đọc được 3 trang sách A trong 2 phút, đọc được 2 trang sách B trong 1 phút. Gọi x, y lần lượt là số phút đọc sách A và số phút đọc sách B. Tìm điều kiện của x và y để Nga đọc được ít nhất 35 trang sách trong một ngày.
6. Một cửa hàng bán hai loại trà sữa, trong đó 4 cốc loại 1 có giá 100000 đồng, 1 cốc loại 2 có giá 30000 đồng. Muốn có lãi theo dự tính thì mỗi ngày cửa hàng phải bán được ít nhất 5 triệu đồng tiền hàng. Hỏi số cốc trà sữa bán được trong một ngày trong những trường hợp nào thì cửa hàng có lãi như dự tính?
7. Một rạp chiếu phim 2D phục vụ khán giả một bộ phim mới với 2 loại vé khác nhau. Vé loại 1 (từ thứ 2 đến thứ 5) giá 80000 đồng/vé, vé loại 2 (từ thứ 6 đến chủ nhật và ngày lễ) giá 100000 đồng/vé. Để không phải bù lỗ thì số tiền vé thu được ở rạp chiếu phim này phải đạt tối thiểu 150 triệu đồng. Hỏi số lượng vé bán được trong những trường hợp nào thì rạp chiếu phim phải bù lỗ?
8. Một bác nông dân cần trồng lúa và khoai trên diện tích đất 6 ha, với lượng phân bón dự trữ là 100 kg và sử dụng tối đa 120 ngày công. Để trồng 1 ha lúa cần sử dụng 20 kg phân bón, 10 ngày công với lợi nhuận là 30 triệu đồng; để trồng 1 ha khoai cần sử dụng 10 kg phân bón, 30 ngày công với lợi nhuận là 60 triệu đồng. Biết bác nông dân đã trồng x (ha) lúa và y (ha) khoai. Tìm giá trị của x để bác nông dân đạt được lợi nhuận cao nhất.

E BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

- A. $2x + y^3 - z < 3$. B. $2x^2 - 2x + 1 \leq 0$. C. $(x + y)(x - y) \geq 0$. D. $3x - 2y > 1$.

Câu 2. Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào **không phải** là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

- A. $2x + 3y > 0$. B. $x + y^2 \leq 7$. C. $x + 2 \geq 0$. D. $x - y > 0$.

Câu 3. Bất phương trình $x + 2y \leq 3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 2.

C. Vô nghiệm.

D. Vô số nghiệm.

Câu 4. Miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$ bỏ đi phần đường thẳng $ax + by = c$ được miền nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

A. $ax + by \geq c$.B. $ax + by > c$.C. $ax + by < c$.D. $ax + by > 0$.

Câu 5. Bất phương trình $5x - 2(y - x + 1) > 0$ tương đương với bất phương trình nào sau đây?

A. $7x - 2y - 2 > 0$.B. $5x - 2y > 1$.C. $5x - y - 2 > 0$.D. $3x - 2y - 2 > 0$.

Câu 6. Cặp số $(x; y)$ nào sau đây là một nghiệm của bất phương trình $2x + 5y > 10$?

A. $(0; 0)$.B. $(2; -7)$.C. $(-1; 1)$.D. $(2; 5)$.

Câu 7. Cặp số $(x_0; y_0)$ nào là nghiệm của bất phương trình $2x - 3y \geq 4$?

A. $(x_0; y_0) = (2; 1)$.B. $(x_0; y_0) = (-2; 2)$.C. $(x_0; y_0) = (5; 1)$.D. $(x_0; y_0) = (-4; 0)$.

Câu 8. Cặp số nào sau đây **không phải** là nghiệm của bất phương trình $3x + y \geq 4$?

A. $(1; 0)$.B. $(1; 1)$.C. $(1; 2)$.D. $(4; 1)$.

Câu 9. Điểm $A(-1; 3)$ thuộc miền của bất phương trình

A. $x + 3y < 0$.B. $3x - y > 0$.C. $-3x + 2y - 4 > 0$.D. $2x - y + 4 > 0$.

Câu 10. Cặp số $(-1; 4)$ là nghiệm của bất phương trình

A. $x - y + 2 > 0$.B. $-2x + y + 1 < 0$.C. $x + y + 2 > 0$.D. $x + y + 4 \leq 0$.

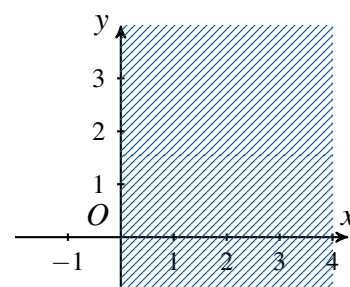
Câu 11. Tìm tất cả các số thực a sao cho miền nghiệm của bất phương trình $x \leq a$ chứa điểm $M(-1; 0)$.

A. $a > -1$.B. $a \geq -1$.C. $a > 0$.D. $a \geq 0$.

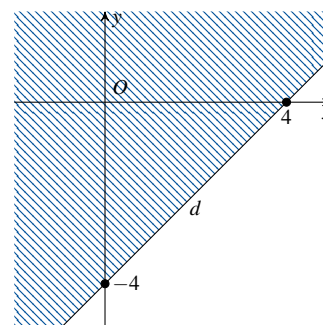
Câu 12. Với giá trị nào của m thì điểm $A(1 - m; m)$ **không thuộc** miền nghiệm của bất phương trình $2x - 3(y - x) > 4$.

A. $m \geq \frac{1}{8}$.B. $0 \leq m \leq 1$.C. $m < \frac{1}{8}$.D. $\frac{1}{8} \leq m \leq 1$.

Câu 13. Hình vẽ sau có phần không tô và cả trục Oy là miền nghiệm của một trong bốn bất phương trình dưới đây. Hãy tìm bất phương trình đó.

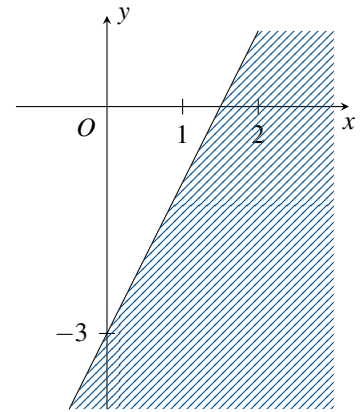
A. $x \geq 0$.B. $x \leq 0$.C. $y \geq 0$.D. $y \leq 0$.

Câu 14. Hãy chọn bất phương trình mà miền nghiệm của nó là nửa mặt phẳng không bị gạch có bờ là đường thẳng d như hình bên.

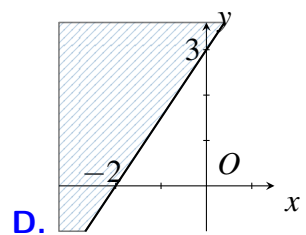
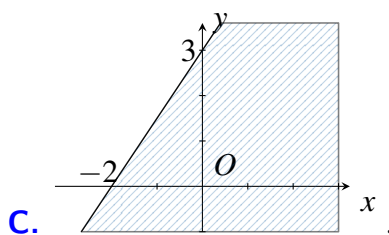
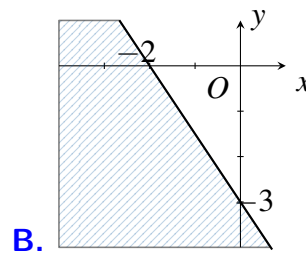
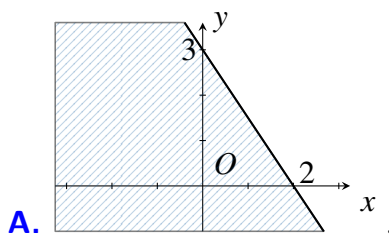
A. $x - y > 4$.B. $x - y < 4$.C. $x - y \leq 4$.D. $x - y \geq 4$.

Câu 15. Phần tô chấm trong hình vẽ sau, biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình sau?

- A. $x - 2y < 3$. B. $2x - y > 3$.
C. $x - 2y > 3$. D. $2x - y < 3$.



Câu 16. Miền nghiệm của bất phương trình $3x - 2y < -6$ (phần không bị gạch) được biểu diễn bởi hình nào sau đây?



Câu 17. Trong 1 lạng (100 g) thịt bò chứa khoảng 26 g protein và 1 lạng cá rô phi chứa khoảng 20 g protein. Trung bình trong một ngày, một người đàn ông cần tối thiểu 52 g protein. Gọi x, y lần lượt là số lạng thịt bò và số lạng cá rô phi mà một người đàn ông nên ăn trong một ngày. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng protein cần thiết cho một người đàn ông trong một ngày.

- A. $26x + 20y \leq 52$. B. $26x + 20y < 52$. C. $13x + 10y \geq 26$. D. $13x + 10y > 26$.

Câu 18. Công ty viễn thông Viettel có gói cước Hi School tính phí là 1190 đồng mỗi phút gọi nội mạng và 1390 đồng mỗi phút gọi ngoại mạng. Một bạn học sinh đăng kí gói cước trên và sử dụng x phút gọi nội mạng, y phút gọi ngoại mạng trong một tháng. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để mô tả số tiền bạn đó phải trả trong một tháng ít hơn 100 nghìn đồng.

- A. $119x + 139y \geq 10000$. B. $139x + 119y < 10000$.
C. $119x + 139y \leq 10000$. D. $119x + 139y < 10000$.

Câu 19. Ngoài giờ học, bạn Nam làm thêm việc phụ bán cơm được 15 nghìn đồng/một giờ và phụ bán tạp hóa được 10 nghìn đồng/một giờ. Gọi x, y lần lượt là số giờ phụ bán cơm và phụ bán tạp hóa trong mỗi tuần. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x và y sao cho Nam kiếm thêm tiền mỗi tuần được ít nhất là 900 nghìn đồng.

- A. $3x + 2y \leq 180$. B. $3x + 2y > 180$. C. $3x + 2y \geq 180$. D. $3x + 2y < 180$.

Câu 20. Anh A muốn thuê một chiếc ô tô (có người lái) trong một tuần. Giá thuê xe như sau: từ thứ hai đến thứ sáu phí cố định là 900 nghìn đồng/ngày và phí tính theo quãng đường di chuyển là 10 nghìn đồng/km còn thứ bảy và chủ nhật thì phí cố định là 1200 nghìn đồng/ngày và phí tính theo quãng đường di chuyển là 15 nghìn đồng/km. Gọi x, y lần lượt là số km mà anh A đi trong các ngày từ thứ hai đến thứ sáu và trong hai ngày cuối tuần. Viết bất phương trình biểu thị mối liên hệ giữa x và y sao cho tổng số tiền anh A phải trả không quá 20 triệu đồng.

A. $10x + 15y \leq 20000$.

C. $10x + 15y \geq 20000$.

B. $2x + 3y \geq 2720$.

D. $2x + 3y \leq 2720$.

—HẾT—

Bài 2

HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- Là hệ bất phương trình gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- Cặp số $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn khi $(x_0; y_0)$ đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình trong hệ đó.

2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

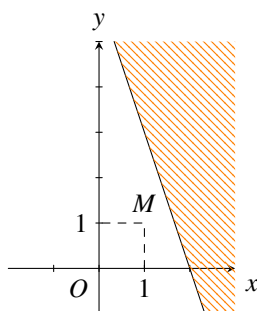
- Miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.
- Để biểu diễn miền nghiệm của hệ, ta làm như sau:

- Trên cùng một mặt phẳng tọa độ, xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong hệ và gạch bỏ miền còn lại.
- Miền cuối cùng không bị gạch là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

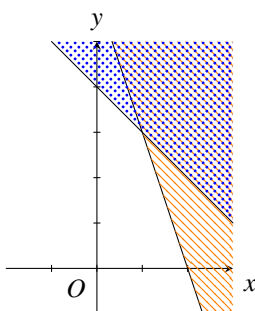
Ví dụ 1

Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 3x + y \leq 6 & (1) \\ x + y \leq 4 & (2) \\ x \geq 0 & (3) \\ y \geq 0 & (4) \end{cases} \quad (*)$$
, ta làm như sau:

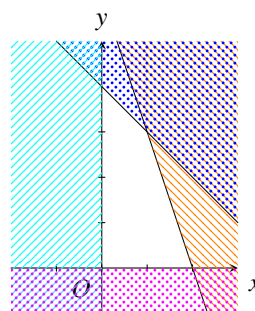
- Vẽ đường thẳng $d_1: 3x + y = 6$.
Lấy điểm $M(1; 1)$, thay tọa độ M vào bất phương trình (1), ta được $3 \cdot 1 + 1 \leq 6$ (thỏa mãn).
Suy ra miền nghiệm của bất phương trình (1) là phần không bị gạch như hình vẽ 1, kể cả những điểm nằm trên d_1 .
- Tương tự cho bất phương trình (2) (Hình 2) và bất phương trình (3) và (4) (Hình 3).



Hình 1



Hình 2



Hình 3

- Miền không bị tô đậm (hình tứ giác kể cả bốn cạnh của nó) trong hình vẽ bên là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

B

RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN

KN

1

Nghiem của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

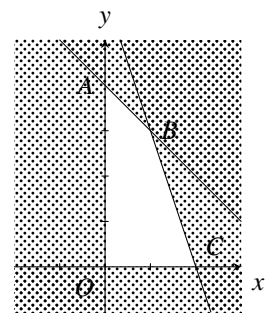
Ví dụ 1. Cho hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn $\begin{cases} x+y > 0 \\ x+2y < 9 \end{cases}$. Tìm tất cả các cặp số $(x_0; y_0)$ có tọa độ nguyên là nghiệm của hệ đã cho, biết $x_0 = -1$.

Ví dụ 2.

Cho hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn $\begin{cases} 3x+y \leq 6 \\ x+y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ có miền nghiệm là

phần không bị gạch như hình bên (tứ giác $OABC$, bao gồm các cạnh).

- Tìm những cặp nghiệm có tọa độ nguyên của hệ bất phương trình trên.
- Xác định tọa độ 3 đỉnh A, B và C . Tính diện tích tứ giác $OABC$.



KN

2

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Ví dụ 3. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x+y > 1 \\ x-y < 2 \end{cases}$.

Ví dụ 4. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x+y < 2 \\ x-y > 1 \\ y > -1 \end{cases}$.

Ví dụ 5. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x+5y > 2 \\ x-3y \geq 1 \\ x+y < 3 \end{cases}$.

C

VẬN DỤNG, THỰC TIỄN

KN

3

Ứng dụng của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn giúp ta mô tả được nhiều bài toán thực tế để tìm ra cách giải quyết tối ưu. Chúng thường đưa về bài toán tìm giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của biểu thức $F = ax + by$ trên một miền của đa giác. Các bước giải:

- Biểu diễn miền nghiệm (miền đa giác) và tìm tọa độ các đỉnh của đa giác đó.
- Thay tọa độ các đỉnh của đa giác vào biểu thức $F = ax + by$, chọn GTLN, GTNN.

Ví dụ 6. Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24g hương liệu, 9 lít nước và 210g đường để pha chế nước cam và nước táo. Để pha chế 1 lít nước cam cần 30g đường, 1 lít nước và 1g hương liệu; pha chế 1 lít nước táo cần 10g đường, 1 lít nước và 4g hương liệu. Mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước trái cây mỗi loại để được số điểm thưởng là lớn nhất.

Ví dụ 7. Một công ty kinh doanh thương mại chuẩn bị cho một đợt khuyến mại nhằm thu hút khách hàng bằng cách tiến hành quảng cáo sản phẩm của công ty trên hệ thống phát thanh và truyền hình. Chi phí cho 1 phút quảng cáo trên sóng phát thanh là 800.000 đồng, trên sóng truyền hình là 4.000.000 đồng. Đài phát thanh chỉ nhận phát các chương trình quảng cáo dài ít nhất là 5 phút. Do nhu cầu quảng cáo trên truyền hình lớn nên đài truyền hình chỉ nhận phát các chương trình dài tối đa là 4 phút. Theo các phân tích, cùng thời lượng một phút quảng cáo, trên truyền hình sẽ có hiệu quả gấp 6 lần trên sóng phát thanh. Công ty dự định chi tối đa 16.000.000 đồng cho quảng cáo. Công ty cần đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh và truyền hình như thế nào để hiệu quả nhất?

Ví dụ 8. Trong một cuộc thi gói bánh vào dịp năm mới, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 20 kg gạo nếp, 2 kg thịt ba chỉ, 5 kg đậu xanh để gói bánh chưng và bánh ông. Để gói một cái bánh chưng cần 0,4 kg gạo nếp, 0,05 kg thịt và 0,1 kg đậu xanh; để gói một cái bánh ông cần 0,6 kg gạo nếp, 0,075 kg thịt và 0,15 kg đậu xanh. Mỗi cái bánh chưng nhận được 5 điểm thưởng, mỗi cái bánh ông nhận được 7 điểm thưởng. Hỏi cần phải gói mấy cái bánh mỗi loại để được nhiều điểm thưởng nhất?

D BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1

Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ x - 2y \leq 1 \\ y \leq 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

2

Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x + 2y \geq 1 \\ 3x - y \leq 2 \end{cases}$$

3

Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x - 2y < 1 \\ x + 3y > -2 \\ -x + y < 2 \end{cases}$$

4

Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 3x + y \leq 5 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

5

Một hộ nông dân định trồng đậu và cà trên diện tích 8 ha. Nếu trồng đậu thì cần 20 công và thu 3000000 đồng trên diện tích mỗi ha, nếu trồng cà thì cần 30 công và thu 4000000 đồng trên diện tích mỗi ha. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu để thu được nhiều tiền nhất biết rằng tổng số công không quá 180?

- 6** Một gia đình định trồng cà phê và ca cao trên diện tích 10 ha. Nếu trồng cà phê thì cần 20 công và thu về 10.000.000 đồng trên diện tích mỗi ha, nếu trồng ca cao thì cần 30 công và thu 12.000.000 đồng trên diện tích mỗi ha. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu để thu được nhiều tiền nhất. Biết rằng cà phê do các thành viên trong gia đình tự chăm sóc và số công không vượt quá 80, còn ca cao gia đình thuê người làm với giá 100.000 đồng cho mỗi công?
- 7** Quảng cáo sản phẩm trên truyền hình là một hoạt động quan trọng trong kinh doanh của các doanh nghiệp.
Theo Thông báo số 10/2019, giá quảng cáo trên VTV1 là 30 triệu đồng cho 15 giây/1 lần quảng cáo vào khoảng 20h30; là 6 triệu đồng cho 15 giây/1 lần quảng cáo vào khung giờ 16h00 – 17h00. Một công ty dự định chi không quá 900 triệu đồng để quảng cáo trên VTV1 với yêu cầu quảng cáo về số lần phát như sau: ít nhất 10 lần quảng cáo vào khoảng 20h30 và không quá 50 lần quảng cáo vào khung giờ 16h00 – 17h00.
- 8** Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kg thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipid. Mỗi kg thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid. Biết rằng mỗi ngày gia đình này chỉ mua tối đa 1,5 kg thịt bò và 1 kg thịt lợn, giá tiền 1 kg thịt bò là 200 nghìn đồng, 1 kg thịt lợn là 100 nghìn đồng. Hỏi gia đình đó phải mua bao nhiêu kg thịt mỗi loại để số tiền bỏ ra là ít nhất.

E BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 1.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 2y - 3 < 0 \\ 2x + y - 2 > 0 \end{cases}$. Điểm nào sau đây thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho?
- A. $Q(-1; -5)$. B. $N(2; 2)$. C. $P(3; -1)$. D. $M(2; 3)$.
- Câu 2.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} y \geq 0 \\ 3x + 2y - 6 < 0 \end{cases}$ có miền nghiệm là S và bốn điểm $O(0; 0)$, $A(2; 3)$, $B(-1; 1)$, $C(-1; 3)$. Có bao nhiêu điểm thuộc S ?
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 3.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - 5y - 1 > 0 \\ 2x + y + 5 > 0 \\ x + y + 1 < 0 \end{cases}$ chứa điểm nào trong các điểm sau?
- A. $(0; 0)$. B. $(1; 0)$. C. $(0; -2)$. D. $(0; 2)$.
- Câu 4.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - y \geq 3 \\ 2x + y < 4 \end{cases}$ chứa điểm nào trong các điểm sau?
- A. $(1; -3)$. B. $(-2; 1)$. C. $(3; -2)$. D. $(4; 1)$.
- Câu 5.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - y > 0 \\ x + y \geq -1 \\ x - y < -2 \end{cases}$ không chứa điểm nào trong các điểm sau?
- A. $(5; 8)$. B. $(6; 9)$. C. $(4; 7)$. D. $(3; 4)$.
- Câu 6.** Tính diện tích S của miền nghiệm hệ bất phương trình $\begin{cases} y + x \leq 3 \\ y - x \leq 3 \\ y \geq -1 \end{cases}$.
- A. $S = 8$. B. $S = 25$. C. $S = 16$. D. $S = 12$.

Câu 7. Tính diện tích S của miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x \geq -3 \\ y + x \leq 8 \\ y - x \geq -2 \end{cases}.$$

- A. $S = 48$. B. $S = 64$. C. $S = 81$. D. $S = 49$.

Câu 8. Tính chu vi P của miền nghiệm hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 6 \\ y \leq 5 \\ y \geq -6 \end{cases}.$$

- A. $P = 38$. B. $P = 36$. C. $P = 42$. D. $P = 40$.

Câu 9. Ngoài giờ học, bạn Nam làm thêm việc phụ bán cơm được 15 nghìn đồng/một giờ và phụ bán tạp hóa được 10 nghìn đồng/một giờ. Nam không thể làm thêm việc nhiều hơn 15 giờ mỗi tuần. Gọi x , y lần lượt là số giờ phụ bán cơm và phụ bán tạp hóa. Hệ bất phương trình nào sau đây xác định số giờ để làm mỗi việc nếu Nam muốn kiếm được ít nhất 100 nghìn đồng mỗi tuần?

- A.
$$\begin{cases} x + y \geq 15 \\ 15x + 10y \geq 100. \end{cases}$$
 B.
$$\begin{cases} x + y \leq 15 \\ 15x + 10y > 100. \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x + y \leq 15 \\ 15x + 10y \geq 100. \end{cases}$$
 D.
$$\begin{cases} x + y > 15 \\ 15x + 10y < 100. \end{cases}$$

Câu 10. Để trở thành một thành viên của ban nhạc thì một sinh viên phải đạt điểm trung bình các môn học ít nhất là 7,0 và phải có tối thiểu 5 lần thực hành sau giờ học. Hãy chọn hệ bất phương trình thể hiện tốt nhất tình huống này.

- A.
$$\begin{cases} x \geq 7 \\ y \geq 5 \end{cases}$$
 B.
$$\begin{cases} x \leq 7 \\ y \leq 5 \end{cases}$$
 C.
$$\begin{cases} x < 7 \\ y < 5 \end{cases}$$
 D.
$$\begin{cases} x > 7 \\ y > 5 \end{cases}$$

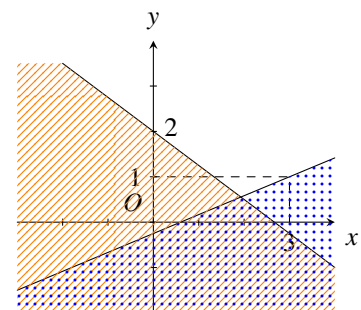
Câu 11. Để trở thành một thành viên của ban nhạc thì một sinh viên phải đạt điểm trung bình các môn học ít nhất là 7,0 và phải có tối thiểu 5 lần thực hành sau giờ học. Gọi x là điểm trung bình các môn học và y là số lần thực hành sau giờ học, hãy chọn hệ bất phương trình thể hiện tốt nhất tình huống này.

- A.
$$\begin{cases} x \geq 7 \\ y \geq 5 \end{cases}$$
 B.
$$\begin{cases} x \leq 7 \\ y \leq 5 \end{cases}$$
 C.
$$\begin{cases} x < 7 \\ y < 5 \end{cases}$$
 D.
$$\begin{cases} x > 7 \\ y > 5 \end{cases}$$

Câu 12. Hình vẽ dưới đây là biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình nào? (với miền nghiệm là miền **không** gạch sọc và chứa bờ)

- A.
$$\begin{cases} 3x + 4y - 8 \geq 0 \\ 5x - 12y - 3 \leq 0 \end{cases}$$
 B.
$$\begin{cases} 3x + 4y - 8 \leq 0 \\ 5x - 12y - 3 \leq 0 \end{cases}$$

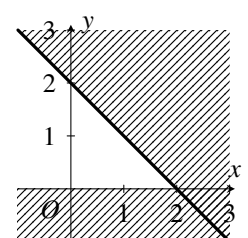
C.
$$\begin{cases} 3x + 4y - 8 \geq 0 \\ 5x - 12y - 3 \geq 0 \end{cases}$$
 D.
$$\begin{cases} 3x + 4y - 3 \geq 0 \\ 5x - 12y - 8 \leq 0 \end{cases}$$



Câu 13. Phần mặt phẳng không bị gạch, kể cả phần biên của nó trên đường thẳng $y = 0$ trong hình vẽ bên là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào?

- A.
$$\begin{cases} y \leq 0 \\ 2x + y > 1 \end{cases}$$
 B.
$$\begin{cases} x + y < 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} 2x - 2y > 6 \\ 2x + y \geq 1 \end{cases}$$
 D.
$$\begin{cases} y \leq 0 \\ x + y < 1 \end{cases}$$



Câu 14. Xét x, y thỏa mãn hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 4 \\ x - y \leq 1. \end{cases}$$
 Tìm giá trị lớn nhất M của biểu thức $F = 3x + 2y$.

A. $M = 8$.B. $M = 10$.C. $M = 6$.D. $M = 9$.

Câu 15. Xét x, y thỏa mãn hệ điều kiện
$$\begin{cases} x - 2y + 2 \geq 0 \\ 3x + 8y - 24 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$
 Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F(x; y) = x - y - 1$.

A. 5.

B. 7.

C. 6.

D. 8.

Câu 16. Gọi (x, y) là nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x - 2y - 2 \leq 0 \\ 4x - 3y + 12 \geq 0 \\ x + 3y + 3 \geq 0 \\ 2x + y - 4 \leq 0 \end{cases}$$
. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = 4x + 5y - 6$.

A. 2.

B. 18.

C. -18.

D. 14.

Câu 17. Một cửa hàng làm kệ sách và bàn làm việc. Mỗi kệ sách cần 5 giờ chế biến gỗ và 4 giờ hoàn thiện. Mỗi bàn làm việc cần 10 giờ chế biến gỗ và 3 giờ hoàn thiện. Mỗi tháng cửa hàng có 600 giờ lao động để chế biến gỗ và 240 giờ để hoàn thiện. Lợi nhuận của mỗi kệ sách là 400 nghìn đồng và mỗi bàn là 750 nghìn đồng. Có bao nhiêu sản phẩm mỗi loại cần được làm mỗi tháng để thu được lợi nhuận tối đa?

A. 24000.

B. 45000.

C. 45600.

D. 46000.

Câu 18. Một cửa hàng làm kệ sách và bàn làm việc. Mỗi kệ sách cần 5 giờ chế biến gỗ và 4 giờ hoàn thiện. Mỗi bàn làm việc cần 10 giờ chế biến gỗ và 3 giờ hoàn thiện. Mỗi tháng cửa hàng có 600 giờ lao động để chế biến gỗ và 240 giờ để hoàn thiện. Lợi nhuận của mỗi kệ sách là 400 nghìn đồng và mỗi bàn là 750 nghìn đồng. Có bao nhiêu sản phẩm mỗi loại cần được làm mỗi tháng để thu được lợi nhuận tối đa?

A. 24000.

B. 45000.

C. 45600.

D. 46000.

Câu 19. Khẩu phần dinh dưỡng hàng ngày cho người ăn kiêng cần cung cấp ít nhất 300 calo, 36 đơn vị vitamin A và 90 đơn vị vitamin C. Một tách thức uống X có giá 5 nghìn đồng và cung cấp 60 calo, 12 đơn vị vitamin A và 10 đơn vị vitamin C. Một tách thức uống Y có giá 6 nghìn đồng và cung cấp 60 calo, 6 đơn vị vitamin A và 30 đơn vị vitamin C. Mỗi ngày nên uống bao nhiêu tách mỗi loại để có được chi phí tối ưu và vẫn đáp ứng được yêu cầu dinh dưỡng hàng ngày?

A. 1 tách loại X, 4 tách loại Y.

B. 3 tách loại X, 2 tách loại Y.

C. 2 tách loại X, 3 tách loại Y.

D. 4 tách loại X, 1 tách loại Y.

Câu 20. Người ta dự định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 140 kg chất A và 9 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng, có thể chiết xuất được 20 kg chất A và 0,6 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng có thể chiết xuất được 10 kg chất A và 1,5 kg chất B. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất, biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II?

A. 2,5 tấn loại I và 9 tấn loại II.

B. 10 tấn loại I và 9 tấn loại II.

C. 10 tấn loại I và 2 tấn loại II.

D. 5 tấn loại I và 4 tấn loại II.

—HẾT—

HÀM SỐ BẬC HAI VÀ ĐỒ THỊ

Bài 1

HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tập xác định và tập giá trị của hàm số

Định nghĩa: Giả sử x và y là hai đại lượng biến thiên và x nhận giá trị thuộc tập số $\mathcal{D}$. Nếu với mỗi giá trị x thuộc $\mathcal{D}$, ta xác định được một và chỉ một giá trị tương ứng y thuộc tập hợp số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một hàm số.

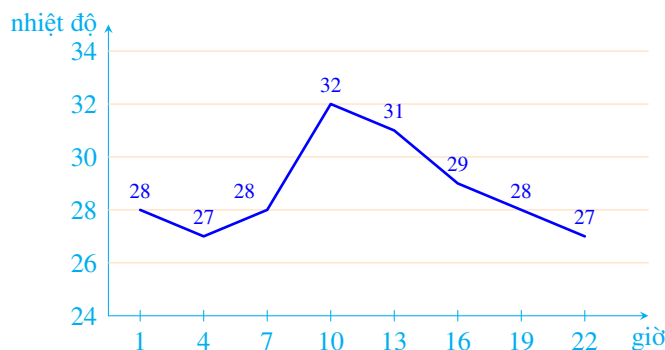
Lưu ý:

- Ta gọi x là biến số và y là hàm số của x .
- Tập hợp $\mathcal{D}$ được gọi là tập xác định của hàm số.
- Tập hợp T gồm tất cả các giá trị y (tương ứng với x thuộc $\mathcal{D}$) gọi là tập giá trị của hàm số.

Cách cho một hàm số: Một hàm số có thể được cho bởi một công thức hoặc nhiều công thức; có thể cho bằng mô tả; cho bằng bảng hoặc cho bằng biểu đồ.

Ví dụ 1

Bản tin dự báo thời tiết cho biết nhiệt độ ở một số thời điểm trong ngày 01/05/2021 tại thành phố Hồ Chí Minh được ghi lại với biểu đồ bên dưới



Rõ ràng với mỗi mốc giờ xác định trong ngày, ta có tương ứng duy nhất 1 số đo nhiệt độ được dự báo nên có xem đây là 1 hàm số với

- Tập xác định $D = \{1; 4; 7; 10; 13; 16; 19; 22\}$
- Tập giá trị $T = \{28; 27; 32; 31; 29\}$.

Ví dụ 2

Xét công thức $y = 2x + 1$. Ta đã biết đây là một hàm số bậc nhất với

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$
- Tập giá trị $T = \mathbb{R}$.

2. Đồ thị hàm số

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathcal{D}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , đồ thị (C) của hàm số là tập hợp tất cả các điểm $M(x; y)$ với $x \in \mathcal{D}$ và $y = f(x)$. Vậy $(C) = \{M(x; f(x)) \mid x \in \mathcal{D}\}$.

Lưu ý: Điểm $M(x_M; y_M)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi và chỉ khi $x_M \in \mathcal{D}$ và $y_M = f(x_M)$.

3. Hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến

Khái niệm: Với hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$, ta nói

- ✓ Hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- ✓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Lưu ý: Khi vẽ bảng biến thiên, xét từ trái sang phải, ta dùng mũi tên đi xuống để minh họa khoảng nghịch biến và mũi tên đi lên để minh họa khoảng đồng biến.

B RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN**KN****1****Tính giá trị của hàm số tại một điểm**

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathcal{D}$ và $x_0 \in \mathcal{D}$.

- ✍ Tính giá trị hàm số tại x_0 : Ta chỉ việc thay x_0 vào biểu thức $y = f(x)$, tìm được y_0 .
- ✍ Nếu $f(x)$ là hàm cho bởi nhiều biểu thức thì ta thay x_0 vào biểu thức mà miền xác định của nó chứa x_0 .

Ví dụ 1. Cho hai hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ và $g(x) = 1 - x$. Tính $f(1)$; $g(-2)$; $f(1) + g(-2)$.

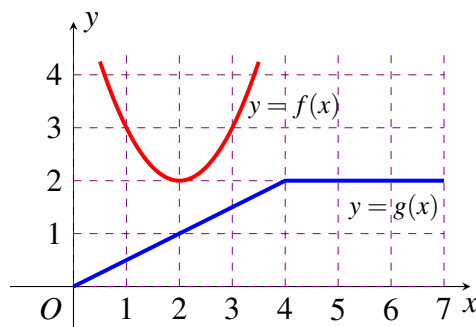
Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{với } x \geq 1 \\ 1 - 2x^2 & \text{với } x < 1 \end{cases}$. Tính $f(1)$, $f(2)$, $f(0)$, $f(-3)$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m - 1)x + 2$, với m là tham số.

- Tìm m để đồ thị hàm số đi qua điểm $M(1; 2)$.
- Tìm m để đồ thị hàm số đi qua điểm $N(-3; 1)$.

Ví dụ 4.

Cho hàm số $y = f(x)$ và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị như hình bên.



- Trong các điểm $A(2;2)$, $B(4;2)$, $C(3;3)$ điểm nào thuộc đồ thị $f(x)$? điểm nào thuộc đồ thị $g(x)$?
- Tính giá trị $f(1) + g(2)$.
- Tìm điểm trên đồ thị $f(x)$ có tung độ bằng 3.

KN

2

Tìm tập xác định, tập giá trị của hàm số

Tập xác định: Ta tìm tập hợp tất cả các giá trị của x để hàm số đã cho có nghĩa. Cần lưu ý hai vấn đề sau:

① $\frac{A}{B}$ có nghĩa khi $B \neq 0$.

② $\sqrt{B}$ có nghĩa khi $B \geq 0$.

Tập giá trị: Với x thuộc miền xác định $\mathcal{D}$, ta có thể căn cứ vào bảng biến thiên hoặc đồ thị để tìm miền giá trị (nhìn khoảng "dao động" của y).

Ví dụ 5. Sau khi đun nóng băng phiến lên đến gần 90°C , người ta để nguội, quan sát, ghi nhận nhiệt độ và trạng thái của băng phiến sau mỗi phút như bảng sau

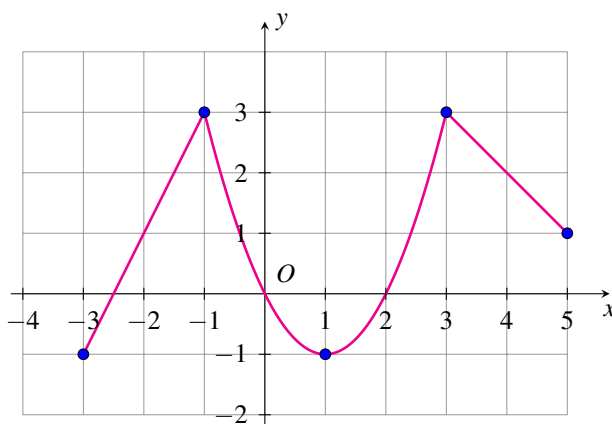
Nhiệt độ và trạng thái của băng phiến khi để nguội

Thời gian nguội (phút)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nhiệt độ ($^\circ\text{C}$)	86	84	82	81	80	80	80	80	79	77	75
Trạng thái	lỏng			lỏng và rắn				rắn			

- Tại sao từ bảng trên, có thể nói nhiệt độ của băng phiến là một hàm số theo thời gian (nung nóng)? Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số trên.
- Sau khi để nguội 3 phút, nhiệt độ băng phiến là bao nhiêu?
- Băng phiến chuyển hoàn toàn sang trạng thái rắn sau bao nhiêu phút?

Ví dụ 6.

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathcal{D}$ và đồ thị là đường liền nét được vẽ trên miền $\mathcal{D}$ như hình bên



- Xác định tập xác định $\mathcal{D}$.
- Tìm tập giá trị của hàm số trên miền $\mathcal{D}$.
- Tìm các điểm thuộc đồ thị và có tung độ bằng 3.

Ví dụ 7. Tìm tập xác định của các hàm số sau đây:

a) $y = x^4 + x^2 - 2.$

b) $y = \frac{x+2}{x-2}.$

c) $y = \frac{x^2+2}{4-x}.$

d) $y = \frac{1}{-x^2+3x}$

Ví dụ 8. Tìm tập xác định của các hàm số sau đây:

a) $y = \sqrt{x-2}.$

b) $y = \frac{2x-1}{\sqrt{x+2}}.$

c) $y = x + \frac{1}{\sqrt{3-x}}.$

d) $y = \sqrt{2+x} + \sqrt{x-2}.$

Ví dụ 9. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{nếu } x \leq 0 \\ x^2 & \text{nếu } x > 0 \end{cases}.$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{nếu } x \leq 2 \\ x^2 & \text{nếu } x > 2 \end{cases}.$

KN**3****Tìm khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số**

Nếu đề bài cho bảng biến thiên hoặc đồ thị: Xét từ trái sang phải thì

- Khoảng nào có mũi tên đi xuống (đồ thị đổ xuống) thì khoảng đó hàm số nghịch biến.
- Khoảng nào có mũi tên đi lên (đồ thị đi lên) thì khoảng đó hàm số đồng biến.

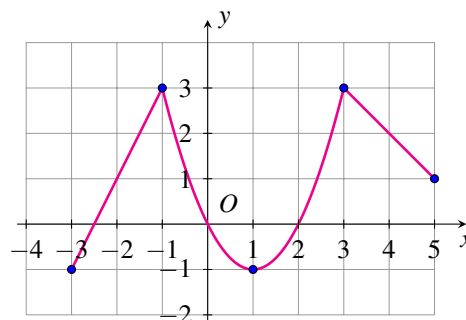
Nếu đề bài yêu cầu xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng xác định $(a; b)$: Ta lấy x_1, x_2 tùy ý thuộc $(a; b)$, với $x_1 < x_2$ và tính $f(x_1) - f(x_2)$, nếu

- $f(x_1) - f(x_2) < 0$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$.
- $f(x_1) - f(x_2) > 0$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$.

Trong nhiều trường hợp, để tìm được khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số, ta có thể lập bảng biến thiên của hàm số đó trên miền xác định.

Ví dụ 10.

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathcal{D}$ và đồ thị là đường liên nét được vẽ trên miền $\mathcal{D}$ như hình bên. Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số trên miền $\mathcal{D}$.



Ví dụ 11. Cho hàm số $y = f(x) = -2x^2 - 7$. Xét tính đồng biến và nghịch biến của hàm số trên các khoảng $(-4; 0)$; $(3; 10)$.

Ví dụ 12. Xét tính đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = f(x) = x^2 + 10x + 9$ trên $(-5; +\infty)$.

Ví dụ 13. Xét tính đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = f(x) = \frac{x}{x-7}$ trên các khoảng $(-\infty; 7)$; $(7; +\infty)$.

KN 4 Về đồ thị hàm số cho bởi nhiều biểu thức

Ví dụ 14. Tìm tập xác định và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{với } x \geq 0 \\ -x & \text{với } x < 0. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{với } x \leq 1 \\ 1 & \text{với } x > 1. \end{cases}$

c) $f(x) = |x|.$

d) $f(x) = |x+2|.$

KN 5 Viết công thức hàm số cho một số bài toán thực tế

Ví dụ 15. Theo quyết định số 2019/QĐ-BĐVN ngày 01/11/2018 của Tổng công ty Bưu điện Việt Nam, giá cước dịch vụ Bưu chính phổ cập đối với dịch vụ thư cơ bản và bưu thiếp trong nước có khối lượng đến 250g như trong bảng sau

a) Số tiền dịch vụ thư cơ bản phải trả y (đồng) có là hàm số của khối lượng thư cơ bản x (g) hay không? Nếu đúng, hãy xác định những công thức tính y .

Khối lượng đến 250 g	Mức cước (đồng)
Đến 20 g	4000
Trên 20 g đến 100 g	6000
Trên 100 g đến 250 g	8000

b) Tính số tiền phải trả khi bạn Dương gửi thư có khối lượng 150g, 200g.

Ví dụ 16. Nhiệt độ ở mặt đất đo được khoảng 30°C . Biết rằng cứ lên 1 km thì nhiệt độ giảm đi 5° .

a) Hãy lập hàm số T theo h , trong đó T tính bằng độ ($^\circ$) và h tính bằng ki-lô-mét (km).

b) Hãy tính nhiệt độ khi ở độ cao 3 km so với mặt đất.

Ví dụ 17. Một công ty viễn thông A cung cấp dịch vụ truyền hình cáp với mức phí ban đầu là 300000 đồng và mỗi tháng phải đóng 150000 đồng. Công ty viễn thông B cũng cung cấp dịch vụ truyền hình cáp nhưng không tính phí ban đầu và mỗi tháng khách hàng sẽ phải đóng 200000 đồng.

a) Gọi T (đồng) là số tiền khách hàng phải trả cho mỗi công ty viễn thông trong t (tháng) sử dụng dịch vụ truyền hình cáp. Khi đó hãy lập hàm số T theo t đối với mỗi công ty.

b) Tính số tiền khách hàng phải trả sau khi sử dụng dịch vụ truyền hình cáp trong 5 tháng đối với mỗi công ty.

c) Khách hàng cần sử dụng dịch vụ truyền hình cáp trên mấy tháng thì đăng kí bên công ty viễn thông A sẽ tiết kiệm chi phí hơn?

- 1 Trong kinh tế thị trường, lượng cầu và lượng cung là hai khái niệm quan trọng. Lượng cầu chỉ khả năng về số lượng sản phẩm cần mua của bên mua (người tiêu dùng), tùy theo đơn giá bán sản phẩm; còn lượng cung chỉ khả năng cung cấp số lượng sản phẩm này cho thị trường của bên bán (nhà sản xuất) cũng phụ thuộc vào đơn giá bán sản phẩm. Người ta khảo sát nhu cầu của thị trường đối với sản phẩm A theo đơn giá của sản phẩm này và thu được bảng sau:

Đơn giá sản phẩm A (đơn vị: nghìn đồng)	10	20	40	70	90
Lượng cầu (nhu cầu về số sản phẩm)	338	288	200	98	50

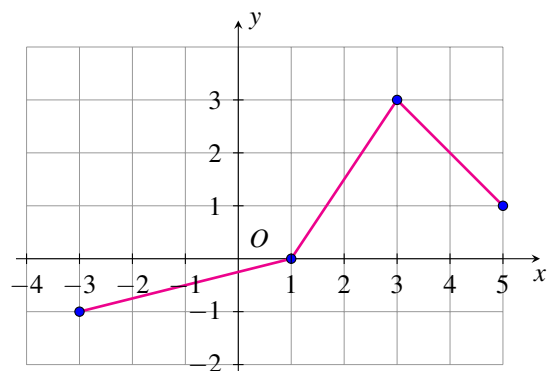
- a) Hãy cho biết tại sao bảng giá trị trên xác định một hàm số? Hãy tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số đó (gọi là hàm cầu).
- b) Giả sử lượng cung của sản phẩm A tuân theo công thức $y = f(x) = \frac{x^2}{50}$, trong đó x là đơn giá sản phẩm A và y là lượng cung ứng với đơn giá này. Hãy điền các giá trị của hàm số $f(x)$ (gọi là hàm cung) vào bảng sau

Đơn giá sản phẩm A (đơn vị: nghìn đồng)	10	20	40	70	90
Lượng cung (khả năng cung cấp về số sản phẩm)					

- c) Ta nói thị trường của một sản phẩm là cân bằng khi lượng cung và lượng cầu bằng nhau. Hãy tìm đơn giá x của sản phẩm A khi thị trường cân bằng.

- 2 Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathcal{D}$ và đồ thị là đường liền nét được vẽ trên miền $\mathcal{D}$ như hình bên.

- a) Trong các điểm $A(2; 2)$, $B(0; 1)$, $C(4; 2)$, $D(-3; -1)$, điểm nào thuộc (C) ? điểm nào không thuộc (C) ?
- b) Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ và tập giá trị $\mathcal{T}$ của hàm số $y = f(x)$.
- c) Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số trên miền $\mathcal{D}$.



- 3 Cho hai hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ và $g(x) = 1 - \sqrt{x}$. Tính giá trị $\frac{f(-1)}{g(4)}$.

- 4 Cho hàm số $f(x) = 4 - \sqrt[3]{x}$.

- a) Tính $f(-8)$. b) Tính $f(a^3)$. c) Tìm $a > 0$ thỏa $f(a^6) = 0$

- 5 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{với } x \leq 0 \\ \frac{x+1}{x^2+x+1} & \text{với } x > 0 \end{cases}$. Tính giá trị của hàm số đó tại $x = 1; x = 0; x = -2$.

- 6 Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau

- a) $y = -x^2$. b) $y = \sqrt{2-3x}$.

c) $y = \frac{4}{x+1}$.

d) $y = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{nếu } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

7 Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = 2 - 4x$.

b) $y = \frac{x-3}{5-2x}$.

c) $y = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$.

d) $y = \frac{2x+1}{(x-2)(x^2-4x+3)}$.

8 Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \frac{\sqrt{4-2x}}{x^2-6x+5}$.

b) $y = \sqrt{\frac{x^2}{x-1}}$.

9 Tìm tập xác định các hàm số sau

a) $f(x) = \frac{4x-1}{\sqrt{2x-5}}$.

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3} & \text{với } x \geq 0 \\ 1 & \text{với } x < 0. \end{cases}$

10 Xét sự biến thiên của hàm số sau trên khoảng $(1; +\infty)$.

a) $y = \frac{3}{x-1}$.

b) $y = x + \frac{1}{x}$.

11 Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau

a) $f(x) = 1 - 3x$.

b) $f(x) = \frac{1}{x-3}$.

c) $f(x) = |2x - 1|$.

12 Vẽ đồ thị các hàm số sau

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{với } x \leq 2 \\ x+2 & \text{với } x > 2. \end{cases}$

b) $f(x) = |x+3| - 2$.

13 Một lớp muốn thuê một chiếc xe khách cho chuyến tham quan với tổng đoạn đường cần di chuyển trong khoảng từ 550 km đến 600 km, có hai công ty được tiếp cận để tham khảo giá. Công ty A có giá khởi đầu là 3,75 triệu đồng cộng thêm 5000 đồng cho mỗi km chạy xe. Công ty B có giá khởi đầu là 2,5 triệu đồng cộng thêm 7500 đồng cho mỗi km chạy xe. Lớp đó nên chọn công ty nào để chi phí là thấp nhất?

14 Một người đang dự định đi mua xe máy mà muốn chọn 1 trong hai loại xe sau:

- **Loại 1:** Có giá 27000000 (đồng) và trung bình số ki-lô-mét đi được mỗi lít xăng là 58 km/lít xăng
- **Loại 2:** Có giá 30000000 (đồng) và trung bình số ki-lô-mét đi được mỗi lít xăng là 62,5 km/lít xăng.

Biết rằng giá trung bình của 1 lít xăng là 18000 (đồng). Người ta dự tính mua xe máy để sử dụng khoảng 8 năm, mỗi năm người đó ước chừng đi khoảng 7250 km.

- Gọi s (đồng) là chi phí từng năm theo thời gian t (năm) của mỗi loại xe (bao gồm tiền mua xe và tiền xăng). Lập hàm số của s theo t .
- Nên chọn loại xe nào để tiết kiệm hơn? Tại sao?

15 Bảng giá cước của một hãng Taxi như sau:

Bảng Giá Cước - Taxi Fare Quote		
GIÁ MỞ CỬA First 0.7km	GIÁ KM TIẾP THEO Each additional 0.8 km up to 30th km	TỪ KM THỨ 31 From 31st km
11.000Đ/ 0.7Km	15.800Đ/ 1Km	12.500Đ/ 1Km
Phí thời gian chờ (Each 5 minutes of wait time: VND 3000)		GIÁ TIỀN ĐÃ BAO GỒM 10% THUẾ VAT (10% VAT INCLUDED)
QUÝ KHÁCH VUI LÒNG THANH TOÁN PHÍ CẦU ĐƯỜNG, PHÀ VÀ BẾN BÀI (NẾU CÓ) All tolls, road & bridge use charge or parking fee shall be surcharged (if any) TAXI MAI LINH CAM KẾT TÍNH GIÁ CƯỚC THEO ĐỒNG HỒ TÍNH TIỀN Metter - based Fare		

- a) Gọi y (đồng) là số tiền khách hàng phải trả sau khi đi x (km). Lập hàm số của y theo x (giả sử rằng không có phát sinh chi phí khác).
- b) Một hành khách thuê taxi đi quãng đường 40 km phải trả số tiền là bao nhiêu?

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số $y = 2x^2 + x - 3$?

- A. $(0; -3)$. B. $(-2; 1)$. C. $(-1; 0)$. D. $(3; -7)$.

Câu 2. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số $y = 3x^3 - 2x + 1$?

- A. $(-1; 2)$. B. $(1; 1)$. C. $(0; 0)$. D. $(1; 2)$.

Câu 3. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{x-1}{x-2}$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

Câu 4. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-2x+2}$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

Câu 5. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \sqrt{x-2}$.

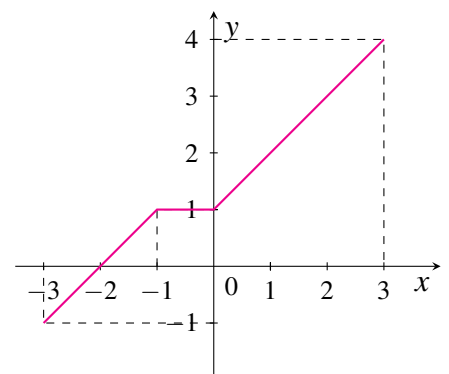
- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. B. $\mathcal{D} = (2; +\infty)$. C. $\mathcal{D} = (-\infty; 2)$. D. $\mathcal{D} = [2; +\infty)$.

Câu 6. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{2x+3}{x^2-x}$.

- A. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. B. $\mathbb{R}$. C. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. D. $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $[-3; 3]$ và đồ thị của nó được biểu diễn bởi hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; -1)$.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 3)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$.
 D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$.

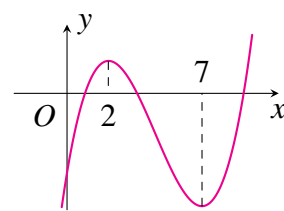


Câu 8. Khẳng định nào sau đây về hàm số $y = x^2$ là khẳng định đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
 C. Hàm số nghịch biến trên $[0; +\infty)$. D. Hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(3; 6)$.



Câu 10. Tập xác định của hàm số $y = \frac{x^2 + \sqrt{3-x}}{x-2}$ là

- A. $(-\infty; 3) \setminus \{2\}$.
- B. $(2; 3]$.
- C. $(-\infty; 3] \setminus \{2\}$.
- D. $(-\infty; 3]$.

Câu 11. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x}$.

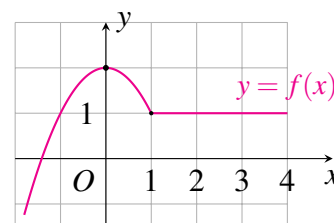
- A. $[-3; 6]$.
- B. $(-3; 6)$.
- C. $(-\infty; -3) \cup (6; +\infty)$.
- D. $\mathbb{R} \setminus (-3; 6)$.

Câu 12. Tập xác định của hàm số $y = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{3-x}$ là

- A. $[1; 3]$.
- B. $(1; 3]$.
- C. $(-\infty; 3]$.
- D. $(1; +\infty)$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Tính giá trị biểu thức $P = 2f(1) + f(4) - f(3)$

- A. $P = 1$.
- B. $P = 0$.
- C. $P = 2$.
- D. $P = 4$.



Câu 14. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4} & \text{khi } x > 1 \\ x^2 + 1 & \text{khi } -1 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{khi } x < -1 \end{cases}$. Giá trị $f(0)$ bằng

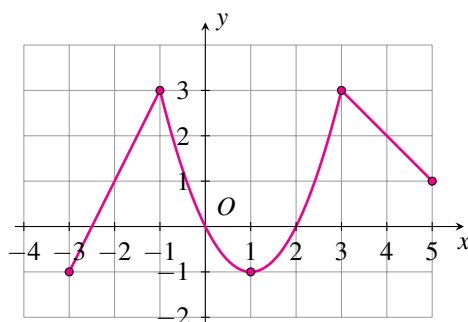
- A. -2 .
- B. 2 .
- C. -1 .
- D. 1 .

Câu 15. Cho hàm số $y = \begin{cases} 2x + 1 & \text{khi } x \leq 2 \\ x^2 - 3 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Trong các điểm sau đây, điểm nào thuộc đồ thị hàm số?

- A. $(0; 1)$.
- B. $(0; -3)$.
- C. $(3; 7)$.
- D. $(-3; 6)$.

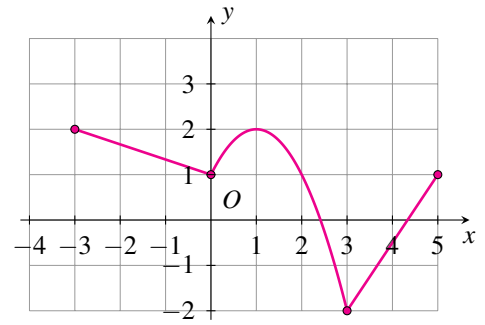
Câu 16. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên miền $[-3; 5]$ như hình bên. Trong các điểm sau, điểm nào thuộc đồ thị hàm số đã cho?

- A. $A(4; 1)$.
- B. $B(1; 1)$.
- C. $C(3; 3)$.
- D. $D(0; 2)$.



Câu 17. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên miền $\mathcal{D} = [-3; 5]$ như hình bên. Tập giá trị của hàm số này trên miền $\mathcal{D}$ là

- A. $[-3; 5]$. B. $[-2; 5]$.
C. $[-3; 3]$. D. $[-2; 2]$.

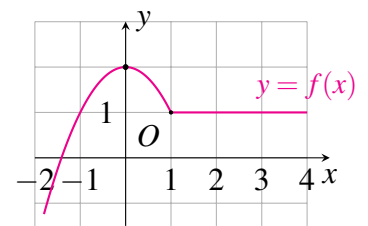


Câu 18. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$. Tìm tọa độ điểm thuộc đồ thị của hàm số có tung độ bằng -2 .

- A. $(0; -2)$. B. $(\frac{1}{3}; -2)$. C. $(-2; -2)$. D. $(-1; -2)$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là một đường liên nét trên đoạn $[-2; 4]$ (hình bên). Xét trên $[-2; 4]$, có bao nhiêu giá trị của x để $y = 1$?

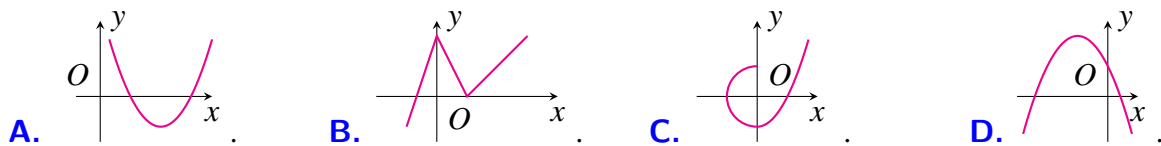
- A. 4. B. 5.
C. vô số. D. 1.



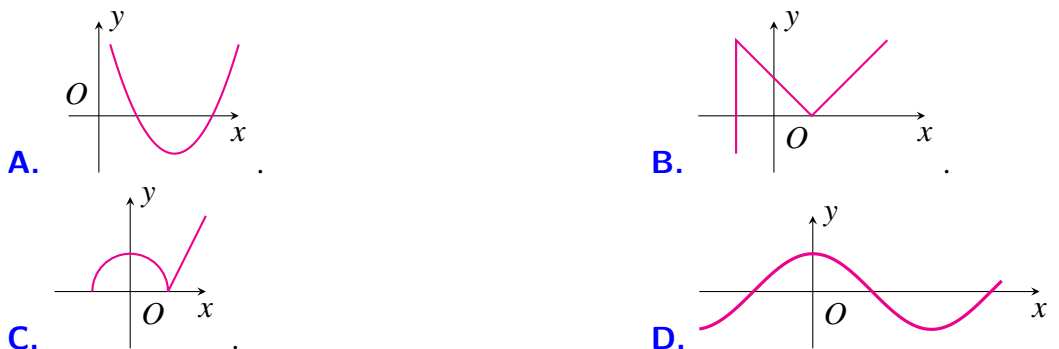
Câu 20. Trong các công thức dưới đây, công thức nào được xem là công thức của một hàm số y theo biến x ?

- A. $3x^2 - y^2 = 0$. B. $3x^2 - y + 1 = 0$. C. $y^2 = x$. D. $(y - x)(y + x) = 1$.

Câu 21. Trong các đường biểu diễn dưới đây, đường nào **không** phải là đồ thị của một hàm số?



Câu 22. Trong các đường biểu diễn dưới đây, đường nào **không** phải là đồ thị của một hàm số?



Câu 23. Bảng giá cước gọi quốc tế của công ty viễn thông A được cho bởi bảng sau:

Thời gian gọi (phút)	Giá cước điện thoại (đồng/phút)
Không quá 8 phút	6500
Từ phút thứ 9 đến phút thứ 15	6000
Từ phút thứ 16 đến phút thứ 25	5500
Từ phút 26 trở đi	5000

Ông An thực hiện cuộc gọi quốc tế 12 phút. Số tiền cước ông An phải trả là

- A. 72 000 đồng . B. 76 000 đồng . C. 70 000 đồng . D. 90 000 đồng.

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{x\sqrt{5}}{x^2 - 2x + m}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- A. $m > 1$. B. $m = 1$. C. $m < 1$. D. $m < 0$.

Câu 25. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m+2}{x-m}$ xác định trên $(-1; 2)$.

- A. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$. C. $-1 < m < 2$. D. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{cases}$.

—HẾT—

Bài 2

HÀM SỐ BẬC HAI

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$, với $a \neq 0$.

- ① Tập xác định $\mathbb{R}$.
- ② Tọa độ đỉnh $S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Để xác định nhanh tọa độ đỉnh, ta chỉ cần xác định hoành độ x_0 . Sau đó thay x_0 vào hàm số, ta tính y_0 .
- ③ Sự biến thiên của hàm số bậc hai:

$a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$

• $a > 0$ thì bề lõm quay lên.
 • Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$; đồng biến trên $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

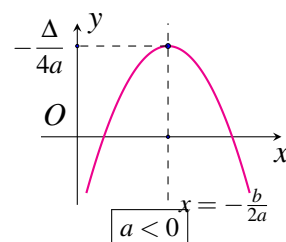
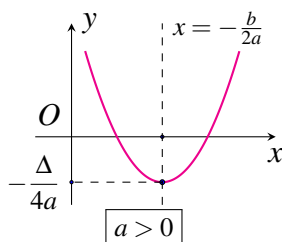
$a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$

• $a < 0$ thì bề lõm quay xuống.
 • Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$; nghịch biến trên $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

2. Đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$, với $a \neq 0$.

- ① Trong mặt phẳng Oxy , đồ thị là một parabol:



- ② Trục đối xứng: $x = -\frac{b}{2a}$ (xem đồ thị).
- ③ Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng c , tức là đồ thị luôn qua điểm $(0; c)$.
- ④ Giá trị lớn nhất (max), giá trị nhỏ nhất (min)

- Khi $a > 0$, hàm số đạt **giá trị nhỏ nhất** $y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$ khi $x = -\frac{b}{2a}$ (tại đỉnh).
- Khi $a < 0$, hàm số đạt **giá trị lớn nhất** $y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$ khi $x = -\frac{b}{2a}$ (tại đỉnh).

Muốn vẽ parabol, ta cần là các bước sau:

- ① Xác định tọa độ đỉnh $S(x_0; y_0)$, với $x_0 = -\frac{b}{2a}$, y_0 được tính bằng cách thay x_0 vào hàm số và bấm máy.
- ② Xác định trục đối xứng $d: x = -\frac{b}{2a}$.
- ③ Lập bảng giá trị (5 điểm), hoặc tìm giao điểm với Ox , Oy .
- ④ Xác định "chiều quay" của parabol và vẽ **parabol** có đỉnh S , có trục đối xứng d và qua các điểm vừa xác định.

Ví dụ 1. Vẽ đồ thị và xác định tập giá trị của các hàm số sau đây

- a) $y = 2x^2$. b) $y = x^2 - 4x + 1$. c) $y = -x^2 - 2x + 3$.
- d) $y = -x^2 - 2$. e) $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$. f) $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 2$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = -x^2 - 3x + 1$ có đồ thị là parabol (P).

- a) Tìm tọa độ của đỉnh, giao điểm của đồ thị (P) với trục tung và trục hoành.
- b) Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị là parabol (P).

- a) Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số.
- b) Vẽ đồ thị (P).

Việc xác định (P) hay đi tìm các hệ số a, b, c , ta thường quy về việc giải hệ phương trình liên quan đến ba ẩn a, b, c . Khi tìm các phương trình liên quan, ta chú ý một số nội dung sau:

⚙ Nếu đề cho (P) qua điểm $(x_0; y_0)$ thì ta được: $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$.

⚙ Nếu đề cho tọa độ đỉnh là $(x_0; y_0)$ thì ta được

- ① Hoành độ đỉnh $-\frac{b}{2a} = x_0$;
- ② $(x_0; y_0) \in (P)$, suy ra $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$.
- ③ (P) viết dưới dạng $y = a(x - x_0)^2 + y_0$.

⚙ Nếu đề cho hoành độ đỉnh (hoặc trục đối xứng) $x = x_0$, ta được $-\frac{b}{2a} = x_0$.

⚙ Nếu đề cho tung độ đỉnh $y = y_0$, ta được $-\frac{\Delta}{4a} = y_0$.

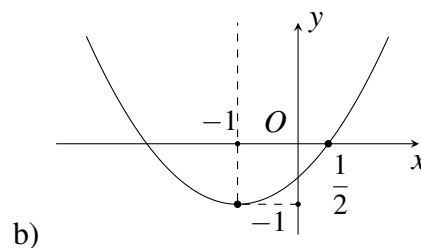
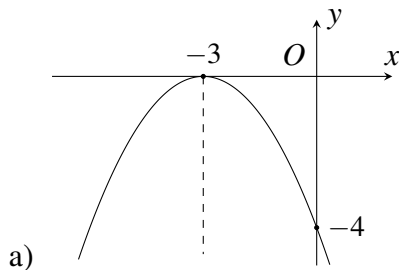
Ví dụ 4. Xác định phương trình của (P) : $y = -2x^2 + bx + c$, biết

- (P) đi qua hai điểm $M(0; -2)$ và $N(2; 0)$;
- (P) có đỉnh $I(1; 3)$;
- (P) đi qua điểm $A(2; -3)$ và có hoành độ đỉnh $x_0 = 3$;
- (P) có trục đối xứng là $x = 2$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

Ví dụ 5. Xác định hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị (P) , biết

- (P) đi qua ba điểm $A(1; 0)$, $B(2; 8)$ và $C(0; -6)$.
- (P) đi qua điểm $A(0; 5)$ và có đỉnh $I(3; -4)$.
- Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 3 và đồ thị (P) qua các điểm $(0; 5)$, $(3; 13)$.

Ví dụ 6. Hãy viết phương trình của parabol ứng với mỗi đồ thị dưới đây.



KN

3

Ứng dụng của hàm số bậc hai trong thực tế

- Một số mô hình thực tế (cổng chào, cầu,...) có hình dạng parabol;
- Một số chuyển động có phương trình quỹ đạo là một hàm bậc hai.

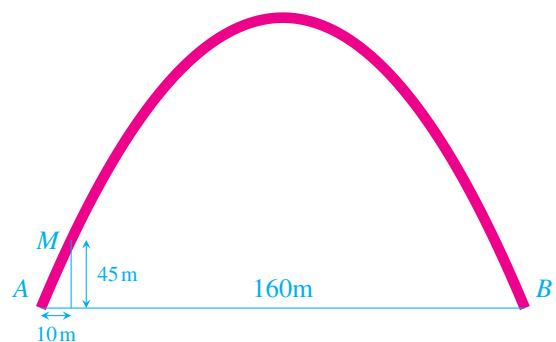
Khi thực hiện đo đạc tính toán, ta thường dùng lý thuyết về hàm số bậc hai để giải các bài toán trên.

Ví dụ 7. Một vật chuyển động với vận tốc $v = 40 + 18t - t^2$ (m/s). Trong 20 giây đầu vận tốc lớn nhất của vật là bao nhiêu?

Đáp số: $v_{\max} = 121$ m/s.

Ví dụ 8.

Cổng vào miền Tây (Gateway Arch) ở thành phố St. Louis, nước Mỹ, có hình dạng là một phần của parabol như hình vẽ. Khoảng cách giữa 2 chân cổng $AB = 160$ m. Trên thành cổng, tại vị trí có độ cao 45 m so với mặt đất (tại điểm M), người ta thả một sợi dây chạm đất (dây căng thẳng theo phương vuông góc với đất). Vị trí chạm đất của đầu sợi dây này cách chân cổng A một đoạn 10 m. Hãy tính khoảng cách từ mặt đất đến điểm cao nhất của cổng.

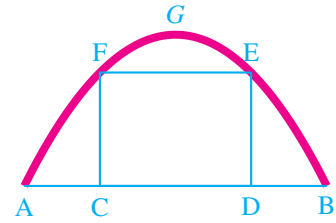


Đáp số: 192 m

Ví dụ 9.

Một chiếc cổng hình Parabol bao gồm một cửa chính hình chữ nhật ở giữa và hai cánh cửa phụ hai bên như hình vẽ. Biết chiều cao cổng Parabol là 4 m còn kích thước cửa ở giữa là $3 \text{ m} \times 4 \text{ m}$. Hãy tính khoảng cách giữa hai điểm A và B . (xem hình minh họa bên).

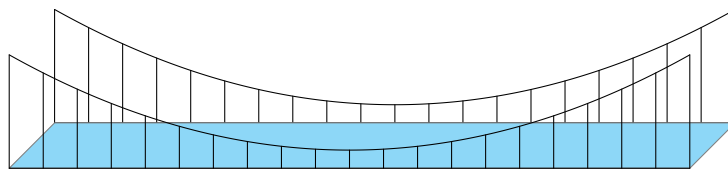
Đáp số: $AB = 8$



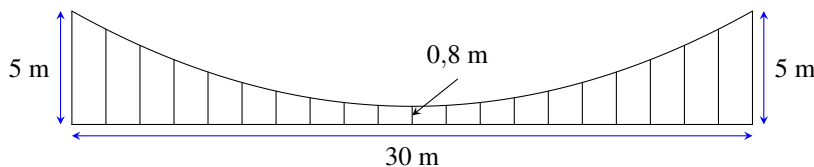
Ví dụ 10. Khi quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt độ cao nào đó rồi rơi xuống đất. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth , trong đó t là thời gian (tính bằng giây), kể từ khi quả bóng được đá lên; h là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao 1,2 m. Sau đó 1 giây, nó đạt độ cao 8,5 m và 2 giây sau khi đá lên, nó ở độ cao 6 m. Hãy tìm hàm số bậc hai biểu thị độ cao h theo thời gian t và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng trong tình huống trên.

Đáp số: $h = -4,9t^2 + 12,2t + 1,2$

Ví dụ 11. Chiếc cầu dây văng một nhịp được thiết kế hai bên thành cầu có dạng parabol và được cố định bằng các dây cáp song song.



Hình vẽ cầu dây văng



Hình chiếu đứng của cầu dây văng

Dựa vào bản vẽ ở hình bên, hãy tính chiều dài tổng cộng của các dây cáp dọc ở hai mặt bên. Biết

Dây dài nhất là 5 m, dây ngắn nhất là 0,8 m, khoảng cách giữa các dây bằng nhau.

Nhịp cầu dài 30 m.

Cần tính thêm 5% chiều dài mỗi sợi dây cáp để neo cố định.

Đáp số: 103,2 m

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Vẽ đồ thị các hàm số sau và nêu khoảng đồng biến, nghịch biến của chúng

a) $y = -x^2 + 5x - 4$

b) $y = x^2 + 2x - 3$

c) $y = \begin{cases} -x + 4 & \text{khi } x < 1 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{khi } x \geq 1. \end{cases}$

2. Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất (nếu có) của các hàm số sau

a) $y = 7x^2 - 3x + 10$.

b) $y = -2x^2 - x + 1$.

3. Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất (nếu có) của các hàm số sau

a) $y = x^2 - 3x$ với $0 \leq x \leq 2$.

b) $y = -x^2 - 4x + 3$ với $0 \leq x \leq 4$.

4. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 2$, biết rằng parabol đó

a) Đi qua hai điểm $M(1; 5)$ và $N(-2; 8)$.

b) Có đỉnh $I(2; -2)$.

c) Đi qua điểm $A(3; -4)$ và có trục đối xứng $x = -\frac{3}{4}$.

d) Đi qua điểm $B(-1; 6)$ và đỉnh có tung độ $-\frac{1}{4}$.

5. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó

a) Đi qua ba điểm $A(1; 1)$, $B(-1; -3)$, $O(0; 0)$.

b) Cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ lần lượt là -1 và 2 , cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng -2 .

c) Đi qua điểm $M(4; -6)$, cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 1 và 3 .

6. Một quả bóng chày được đánh lên ở độ cao 3 feet (1 feet = 0,3048 mét) so với mặt đất với vận tốc 100 feet/giây và ở một góc 45° so với mặt đất. Đường đi của quả bóng chày được cho bởi hàm số $f(x) = -0,0032x^2 + x + 2$ trong đó $f(x)$ là chiều cao của bóng chày (theo feet) và x là khoảng cách theo chiều ngang của quả bóng tính từ vị trí ban đầu của quả bóng được đánh lên (theo feet). Tính chiều cao tối đa mà bóng chày đạt được.

7. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe hơn đa Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 (triệu đồng) và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất?

8. Một cửa hàng sách mua sách từ nhà xuất bản với giá là 3 USD/cuốn. Cửa hàng bán sách với giá là 15 USD/cuốn, tại giá bán này mỗi ngày sẽ bán được 200 cuốn. Cửa hàng có kế hoạch giảm giá để kích thích sức mua, và họ ước tính rằng cứ mỗi 1 USD mà giảm đi trong giá bán thì mỗi tháng sẽ bán nhiều hơn 20 cuốn. Tìm giá bán mới một quyển sách để cửa hàng đạt lợi nhuận cao nhất.

9. Ta có bảng giá trị của hàm cầu đối với sản phẩm A theo đơn giá của sản phẩm A như sau

Đơn giá sản phẩm A (đơn vị: nghìn đồng)	10	20	40	70	90
Lượng cầu (như cầu về số sản phẩm)	338	288	200	98	50

a) Giả sử hàm cầu là một hàm số bậc hai theo đơn giá x , hãy viết công thức của hàm này, biết rằng $c = 392$.

b) Chứng tỏ rằng hàm số có thể viết thành dạng $y = f(x) = a(b - x)^2$.

- c) Giả sử hàm cầu này lấy mọi giá trị trên đoạn $[0; 100]$, hãy tính lượng cầu khi đơn giá sản phẩm A là 30, 50, 100.
- d) Cùng giả thiết với câu c, nếu lượng cầu là 150 sản phẩm thì đơn giá sản phẩm A là khoảng bao nhiêu (đơn vị: nghìn đồng)?

- 10** Khi một vật từ vị trí y_0 được ném xiên lên cao theo góc α (so với phương ngang) với vận tốc ban đầu v_0 thì phương trình chuyển động của vật này là

$$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \cdot x + y_0.$$

Lấy giá trị $g = 10 \text{ m/s}^2$ cho gia tốc trọng trường.

- a) Vật bị ném xiên như vậy có chuyển động theo đường xiên hay không? Tại sao?
- b) Giả sử góc ném có số đo là 45° , vận tốc ban đầu của vật là 3 m/s và vật được ném xiên từ độ cao 1 m so với mặt đất, hãy viết phương trình chuyển động của vật.
- c) Một vận động viên ném lao đã lập kỉ lục với độ xa 90 m. Biết người này ném lao từ độ cao 0,9 m và góc ném là khoảng 45° . Hỏi vận tốc đầu của lao khi được ném đi là bao nhiêu?

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Parabol $y = -x^2 + 2x$ có đỉnh là

- A. $I(1; 1)$. B. $I(-1; 1)$. C. $I(-1; 2)$. D. $I(2; 0)$.

Câu 2. Tìm tọa độ đỉnh I của Parabol $y = x^2 - 3x + 4$.

- A. $I(3; 3)$. B. $\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right)$. C. $\left(-\frac{3}{2}; \frac{43}{4}\right)$. D. $\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{4}\right)$.

Câu 3. Tìm tọa độ đỉnh I của parabol $y = x^2 + 4x + 5$.

- A. $I(0; 5)$. B. $I(1; 10)$. C. $I(-1; 2)$. D. $I(-2; 1)$.

Câu 4. Tìm phương trình trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = -x^2 + 6x + 7$.

- A. $y = 6$. B. $x = 3$. C. $y = 3$. D. $x = 6$.

Câu 5. Đồ thị hàm số $y = 2x^2 - x - 3$ có trục đối xứng là

- A. $x = \frac{1}{4}$. B. $x = -\frac{1}{2}$. C. $x = -\frac{1}{4}$. D. $x = \frac{1}{2}$.

Câu 6. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x + 1$?

- A. $M(-2; -12)$. B. $N(1; 3)$. C. $P(-1; -5)$. D. $Q(2; 5)$.

Câu 7. Tìm giá trị của m để parabol $y = x^2 + mx + 1$ đi qua điểm $A(1; 1)$.

- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = -1$. D. $m = -2$.

Câu 8. Cho hàm số $y = -x^2 + 4x + 3$. Chọn khẳng định đúng.

- A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. B. Hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên $(2; +\infty)$. D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 9. Hàm số $y = x^2 + 2x + 2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

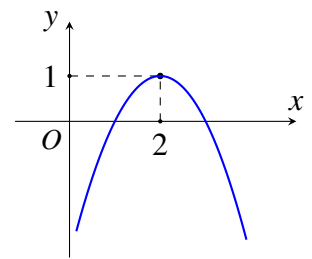
- A. $(-\infty; +\infty)$. B. $(-2; +\infty)$. C. $(-1; +\infty)$. D. $(-\infty; -1)$.

Câu 10. Hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$ đồng biến trên

- A. $(-1; +\infty)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-\infty; 1)$.

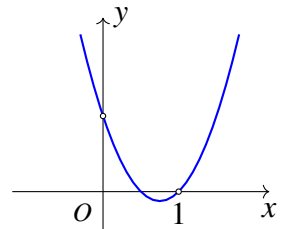
Câu 11. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong các hàm số cho ở các phương án **A, B, C, D**. Hỏi đó là hàm số nào?

- A.** $y = x^2 - 4x - 3$.
B. $y = -x^2 + 4x$.
C. $y = x^2 + 4x - 3$.
D. $y = -x^2 + 4x - 3$.



Câu 12. Hình bên là đồ thị của một hàm số bậc hai. Hàm số đó là hàm số nào trong các hàm số sau?

- A.** $y = -x^2 + 3x - 1$.
B. $y = -2x^2 + 3x - 1$.
C. $y = 2x^2 - 3x + 1$.
D. $y = x^2 - 3x + 1$.



Câu 13. Hàm số nào trong các hàm số sau đây có bảng biến thiên như hình vẽ

- A.** $y = -x^2 + 2x - 3$.
B. $y = x^2 + 2x - 1$.
C. $y = -x^2 - x - 1$.
D. $y = x^2 - x - 1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	-2	$-\infty$

Câu 14. Bảng biến thiên của hàm số $y = -2x^2 + 4x + 1$ là bảng nào sau đây?

A.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	1	$+\infty$

C.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	1	$-\infty$

B.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	3	$-\infty$

D.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	3	$+\infty$

Câu 15. Gọi S là tập giá trị của hàm số $y = -x^2 + 4x$. Hỏi tập S có bao nhiêu số nguyên dương?

- A.** 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 16. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 2x + 3$ bằng

- A.** 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 17. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^2 - 2x + 4$ là

- A.** 5. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 3.

Câu 18. Giao điểm của parabol $(P): y = x^2 - 3x - 4$ với trục tung là

- A.** $(4; 0)$. **B.** $(0; -4)$. **C.** $(0; -1)$. **D.** $(-1; 0)$.

Câu 19. Giao điểm của parabol $(P): y = x^2 - 3x - 4$ với trục hoành có hoành độ lần lượt là x_1 và x_2 . Tính $x_1 + x_2$.

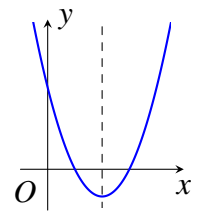
- A.** $x_1 + x_2 = -3$. **B.** $x_1 + x_2 = 3$. **C.** $x_1 + x_2 = 4$. **D.** $x_1 + x_2 = -4$.

Câu 20. Parabol $y = x^2 - ax + b$ có đỉnh $I(2; -2)$. Khi đó giá trị của $a + 2b$ là

- A.** $a + 2b = 0$. **B.** $a + 2b = 8$. **C.** $a + 2b = -2$. **D.** $a + 2b = 4$.

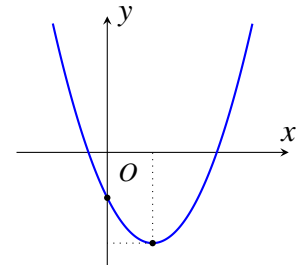
Câu 21. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là một Parabol (P) như hình vẽ bên. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

- A. $a > 0, b > 0$ và $c > 0$.
B. $a < 0, b < 0$ và $c > 0$.
C. $a > 0, b > 0$ và $c < 0$.
D. $a > 0, b < 0$ và $c > 0$.



Câu 22. Cho parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên. Hãy chọn khẳng định đúng khi nói về dấu của các hệ số a, b, c .

- A. $a < 0, b > 0, c < 0$.
B. $a > 0, b > 0, c < 0$.
C. $a > 0, b < 0, c < 0$.
D. $a > 0, b > 0, c > 0$.



Câu 23. Xác định parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$ biết (P) có giá trị lớn nhất bằng 3 tại $x = 2$ và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 1.

- A. $y = -x^2 + 4x - 3$.
B. $y = x^2 - 4x + 7$.
C. $y = 2x^2 - 12x + 20$.
D. $y = -3x^2 + 12x - 9$.

Câu 24. Biết parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$ đi qua hai điểm $A(1; 2)$ và $B(2; 6)$. Tính giá trị của biểu thức $Q = 3a + b$.

- A. $Q = 4$.
B. $Q = -4$.
C. $Q = 0$.
D. Không đủ dữ liệu để tính.

Câu 25. Tìm m để hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2; 5]$ bằng -3 .

- A. $m = -3$.
B. $m = -9$.
C. $m = 1$.
D. $m = 0$.

Câu 26. Đợt xuất khẩu gạo của tỉnh A thường kéo dài trong 2 tháng (60 ngày). Người ta nhận thấy số lượng xuất khẩu gạo tính theo ngày thứ t được xác định bởi công thức

$$S(t) = \frac{2}{5}t^3 - 63t^2 + 3240t - 3100 \quad (1 \leq t \leq 60).$$

Hỏi trong những ngày đó thì ngày thứ mấy số lượng xuất khẩu gạo cao nhất?

- A. 60.
B. 30.
C. 1.
D. 45.

Câu 27. Chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí là

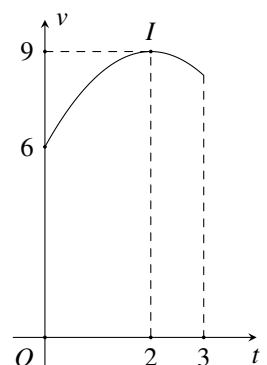
$$C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 10000 \quad (\text{đơn vị } 10 \text{ ngàn đồng}).$$

Chi phí phát hành mỗi cuốn tạp chí là 4 ngàn đồng; số lượng tạp chí cần xuất bản là bao nhiêu để chi phí trung bình thấp nhất?

- A. 10000 cuốn.
B. 2000 cuốn.
C. 1000 cuốn.
D. 100000 cuốn.

Câu 28. Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình vẽ. Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm 2 giờ 30 phút sau khi vật bắt đầu chuyển động gần bằng giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

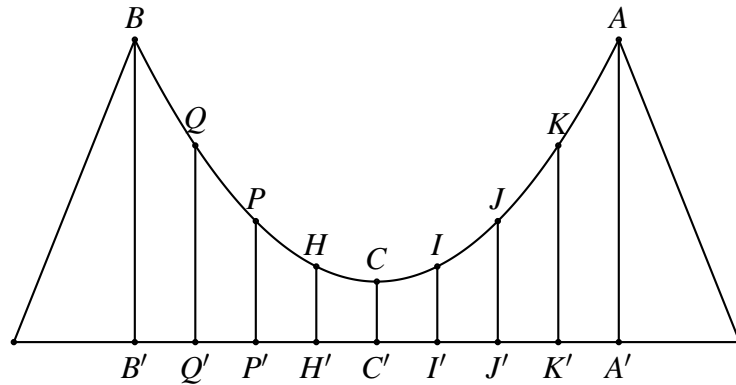
- A. 8,6(km/h).
B. 8,8(km/h).
C. 8,5(km/h).
D. 8,7(km/h).



Câu 29. Người ta thiết kế một van điều tiết nước để dẫn nước từ một dòng chảy tự nhiên vào hồ thủy lợi chứa nước. Biết rằng lượng nước được dẫn qua van điều tiết để vào hồ trong mỗi phút được điều tiết qua công thức $F(x) = \frac{1}{16875}x^2(225 - x)$, trong đó x là lưu lượng dòng chảy tự nhiên tính theo đơn vị $\text{m}^3/\text{phút}$. Lưu lượng dòng chảy tự nhiên là bao nhiêu thì lượng nước vào hồ thủy lợi là lớn nhất?

- A. $0 \text{ m}^3/\text{phút}$. B. $150 \text{ m}^3/\text{phút}$. C. $225 \text{ m}^3/\text{phút}$. D. $450 \text{ m}^3/\text{phút}$.

Câu 30. Dây truyền đỡ trên cầu treo có dạng Parabol ACB như hình vẽ.



Đầu, cuối của dây được gắn vào các điểm A, B trên mỗi trụ AA' và BB' với độ cao 30m. Chiều dài đoạn $A'B'$ trên nền cầu bằng 200m. Độ cao ngắn nhất của dây truyền trên cầu là $OC = 5\text{m}$. Gọi $Q', P', H', O, I', J', K'$ là các điểm chia đoạn $A'B'$ thành các phần bằng nhau. Các thanh thẳng đứng nối nền cầu với đáy dây truyền: $QQ', PP', HH', OC, II', JJ', KK'$ gọi là các dây cáp treo. Tính tổng độ dài của các dây cáp treo?

- A. 78,75m. B. 36,87m. C. 76,75m. D. 73,75m.

—HẾT—

ĐỀ TRẮC NGHIỆM CUỐI CHƯƠNG

1. Đề số 1

Câu 1. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số $y = x^4 + x^3 - 2x^2 + 1$?

- A. $M(-2; 1)$. B. $N(1; 6)$. C. $P(-1; 1)$. D. $Q(0; -1)$.

Câu 2. Đồ thị của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{với } x \leq 2 \\ -3, & \text{với } x > 2 \end{cases}$ đi qua điểm nào sau đây?

- A. $(0; 1)$. B. $(3; 7)$. C. $(2; -3)$. D. $(0; -3)$.

Câu 3. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{2x+3}{x^2-x}$.

- A. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. B. $\mathbb{R}$. C. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. D. $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Câu 4. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{x-1}{x-2}$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

Câu 5. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \sqrt{x-2}$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. B. $\mathcal{D} = (2; +\infty)$. C. $\mathcal{D} = (-\infty; 2)$. D. $\mathcal{D} = [2; +\infty)$.

Câu 6. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-2x+2}$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

Câu 7. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x}$.

- A. $[-3; 6]$. B. $(-3; 6)$.
C. $(-\infty; -3) \cup (6; +\infty)$. D. $\mathbb{R} \setminus (-3; 6)$.

Câu 8. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{2-2x}}{x^2-1}$ là

- A. $\mathcal{D} = (1; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.
C. $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \setminus \{-1\}$. D. $\mathcal{D} = (-\infty; 1] \setminus \{-1\}$.

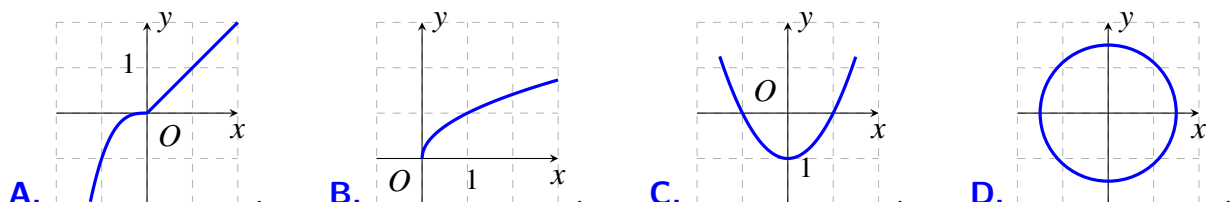
Câu 9. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \frac{2017}{x-3}$ là

- A. $\mathcal{D} = [1; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. C. $\mathcal{D} = [1; +\infty) \setminus \{3\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Câu 10. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

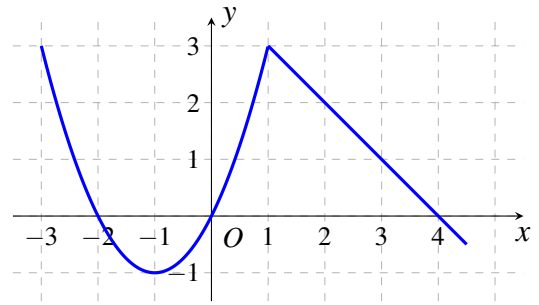
- A. $y = -5x + 3$. B. $y = 5x + 3$. C. $y = -5 + 3x$. D. $y = 5x - 3$.

Câu 11. Trong các đường biểu diễn sau, đường nào không được coi là đồ thị của một hàm số?



Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 4)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 3)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.



Câu 13. Parabol $y = -x^2 + 2x$ có đỉnh là

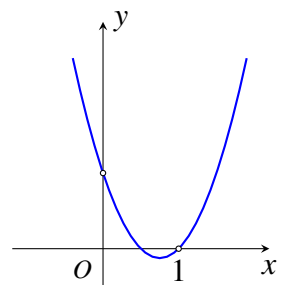
- A. $I(1; 1)$.
- B. $I(-1; 1)$.
- C. $I(-1; 2)$.
- D. $I(2; 0)$.

Câu 14. Tìm tọa độ đỉnh I của Parabol $y = x^2 - 3x + 4$.

- A. $I(3; 3)$.
- B. $I(\frac{3}{2}; \frac{7}{4})$.
- C. $I(-\frac{3}{2}; \frac{43}{4})$.
- D. $I(\frac{3}{2}; -\frac{7}{4})$.

Câu 15. Hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số được cho ở bên dưới. Hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = -x^2 + 3x - 1$.
- B. $y = -2x^2 + 3x - 1$.
- C. $y = 2x^2 - 3x + 1$.
- D. $y = x^2 - 3x + 1$.



Câu 16. Cho hàm số $y = -2x^2 - 4x + 10$. Tìm khẳng định đúng.

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và nghịch biến trên $(-2; +\infty)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và đồng biến trên $(-2; +\infty)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và nghịch biến trên $(-1; +\infty)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên $(-1; +\infty)$.

Câu 17. Hàm số nào trong các hàm số sau đây có bảng biến thiên như hình vẽ:

- A. $y = -x^2 + 2x - 3$.
- B. $y = x^2 + 2x - 1$.
- C. $y = -x^2 - x - 1$.
- D. $y = x^2 - x - 1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	-2	$-\infty$

Câu 18. Tìm tọa độ giao điểm của parabol $(P): y = -x^2 + 2x + 3$ và trục Oy .

- A. $(0; 4)$.
- B. $(0; 3)$.
- C. $(3; 0)$.
- D. $(-1; 0)$.

Câu 19. Tìm phương trình trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = -x^2 + 6x + 7$.

- A. $y = 6$.
- B. $x = 3$.
- C. $y = 3$.
- D. $x = 6$.

Câu 20. Một vật chuyển động với vận tốc $v = 40 + 18t - t^2$ (m/s). Trong 20 giây đầu vận tốc lớn nhất của vật là bao nhiêu?

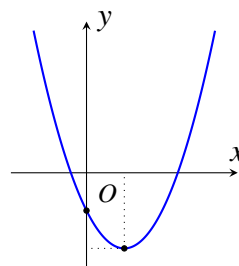
- A. 121 m/s.
- B. 212 m/s.
- C. 40 m/s.
- D. 4 m/s.

Câu 21. Hàm số $y = 5x^2 - 4x + 6$ có giá trị nhỏ nhất khi

- A. $x = \frac{4}{5}$.
- B. $x = -\frac{4}{5}$.
- C. $x = \frac{2}{5}$.
- D. $x = -\frac{2}{5}$.

Câu 22. Cho parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên. Hãy chọn khẳng định đúng khi nói về dấu của các hệ số a, b, c .

- A. $a < 0, b > 0, c < 0$.
- B. $a > 0, b > 0, c < 0$.
- C. $a > 0, b < 0, c < 0$.
- D. $a > 0, b > 0, c > 0$.

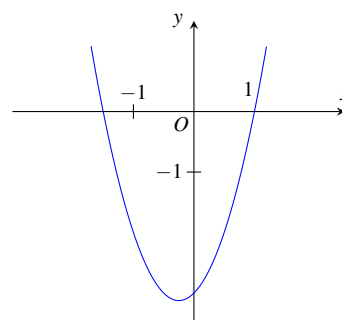


Câu 23. Cho parabol $y = ax^2 + bx + 4$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = \frac{1}{3}$ và đi qua điểm $A(1; 3)$. Tổng giá trị $a + 2b$ là

- A. 1.
- B. -1.
- C. $-\frac{1}{2}$.
- D. $\frac{1}{2}$.

Câu 24. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên. Tính tổng $a + b + c$.

- A. 0.
- B. -1.
- C. 1.
- D. 2.



Câu 25. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe honda Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 (triệu đồng) và bán với giá 31 (triệu đồng) mỗi chiếc. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 (triệu đồng) mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất?

- A. 30,5 triệu.
- B. 29,5 triệu.
- C. 30 triệu.
- D. 29 triệu.

—HẾT—

2. Đề số 2

Câu 1. Đường thẳng $y = 3x - 2$ không đi qua điểm nào sau đây?

- A. $Q(1; 1)$.
- B. $N(-2; -4)$.
- C. $P(0; -2)$.
- D. $M(-1; -5)$.

Câu 2. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = -22x + 10$.
- B. $y = 22x + 10$.
- C. $y = -10x - 22$.
- D. $y = 22 - 10x$.

Câu 3. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x-5}}$.

- A. $(-\infty; 5]$.
- B. $[5; +\infty)$.
- C. $(-\infty; 5)$.
- D. $(5; +\infty)$.

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y = \frac{5+x}{\sqrt{x-2}}$ là

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- B. $\mathcal{D} = [0; +\infty) \setminus \{4\}$.
- C. $\mathcal{D} = [0; +\infty) \setminus \{2\}$.
- D. $\mathcal{D} = (0; +\infty)$.

Câu 5. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x+2} + 4\sqrt{3-x}$ là

- A. $\mathcal{D} = [3; +\infty)$.
- B. $[-2; 3]$.
- C. $(-\infty; 3]$.
- D. $(-2; 3)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & \text{khi } x \leq -1 \\ 2x - 1 & \text{khi } -1 < x \leq 3 \\ -x + 6 & \text{khi } x > 3 \end{cases}$.

Tính giá trị biểu thức $A = f(-2) + f(-1) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$

- A. $A = 4$. B. $A = 63$. C. $A = 2$. D. $A = 8$.

Câu 7. Tập xác định của hàm số $y = \frac{x^2 + \sqrt{3-x}}{x-2}$ là

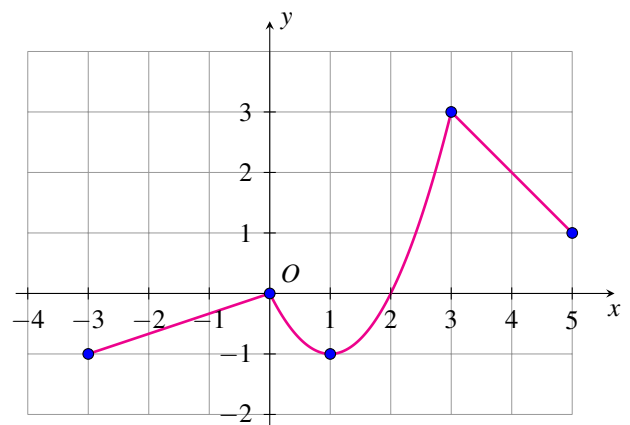
- A. $(-\infty; 3) \setminus \{2\}$. B. $(2; 3]$. C. $(-\infty; 3] \setminus \{2\}$. D. $(-\infty; 3]$.

Câu 8. Hàm số nào dưới đây có tập xác định là $\mathbb{R}$?

- A. $y = \frac{3x}{x^2 - 4}$. B. $y = x^2 - 2\sqrt{x-1} - 3$.
C. $y = x^2 - \sqrt{x^2 + 1} - 3$. D. $y = \frac{2\sqrt{x}}{x^2 + 4}$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên miền $[-3; 5]$ như sau. Hàm số nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-3; 0)$. B. $(0; 1)$.
C. $(0; 3)$. D. $(1; 3)$.



Câu 10. Tìm m để hàm số $y = (-2m + 1)x + m - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m < \frac{1}{2}$. B. $m > \frac{1}{2}$. C. $m < 3$. D. $m > 3$.

Câu 11. Hàm số nào trong các hàm sau đây **không** phải là hàm số bậc hai?

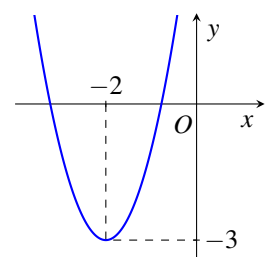
- A. $y = f(x) = \sqrt{3}x^2 + x - 4$. B. $y = f(x) = x^2 + \frac{1}{x} - 5$.
C. $y = f(x) = -2x(x - 1)$. D. $y = f(x) = 2(x^2 + 1) + 3x - 1$.

Câu 12. Tìm tọa độ đỉnh I của parabol $y = x^2 + 4x + 5$.

- A. $I(0; 5)$. B. $I(1; 10)$. C. $I(-1; 2)$. D. $I(-2; 1)$.

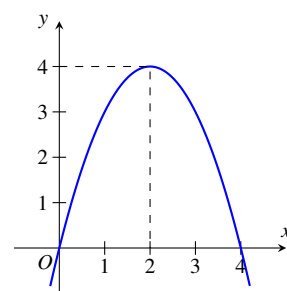
Câu 13. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

- A. $y = x^2 + 4x + 5$.
B. $y = x^2 + 2x - 1$.
C. $y = 2x^2 + 8x + 5$.
D. $y = x^2 + 4x - 3$.



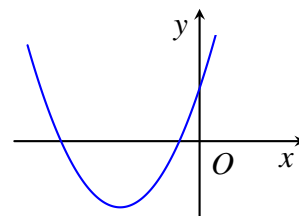
Câu 14. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = -x^2 + 4x$.
 B. $y = -x^2 + 3x$.
 C. $y = -2x^2 + 2x + 1$.
 D. $y = x^2 - 3x + 2$.



Câu 15. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh nào sau đây đúng?

- A. $a > 0, b > 0, c > 0$.
 B. $a > 0, b < 0, c > 0$.
 C. $a < 0, b > 0, c > 0$.
 D. $a > 0, b = 0, c > 0$.

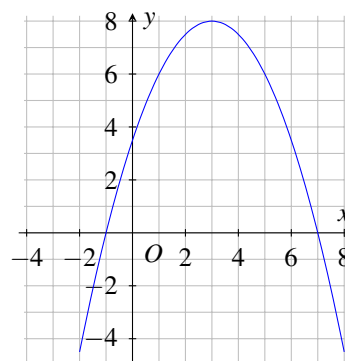


Câu 16. Tập giá trị của hàm số $y = f(x) = -2x^2 + \sqrt{2}x + 1$ là

- A. $T = \left(-\frac{5}{4}; +\infty\right)$.
 B. $T = \left[-\frac{5}{4}; +\infty\right)$.
 C. $T = \left(-\infty; \frac{5}{4}\right)$.
 D. $T = \left(-\infty; \frac{5}{4}\right]$.

Câu 17. Cho hàm số bậc hai có đồ thị như hình bên. Tập xác định và tập giá trị của hàm số theo thứ tự là

- A. $[-1; 7]$ và $(-\infty; 8]$.
 B. $(-\infty; +\infty)$ và $[8; +\infty)$.
 C. $(-\infty; +\infty)$ và $(-\infty; 8]$.
 D. $[-1; 9]$ và $[-2; 9]$.



Câu 18. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f(x) = x^2 - 4x + 1$ là

- A. 3.
 B. 2.
 C. -2.
 D. -3.

Câu 19. Đồ thị hàm số $y = 2x^2 - x - 3$ có trục đối xứng là

- A. $x = \frac{1}{4}$.
 B. $x = -\frac{1}{2}$.
 C. $x = -\frac{1}{4}$.
 D. $x = \frac{1}{2}$.

Câu 20. Tọa độ đỉnh của Parabol $y = x^2 - 2x + 4$ là

- A. $I(1; -3)$.
 B. $I(-1; -3)$.
 C. $I(-1; 3)$.
 D. $I(1; 3)$.

Câu 21. Cho hàm số $y = -x^2 + 4x + 3$. Chọn khẳng định đúng.

- A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
 B. Hàm số đồng biến trên $(2, +\infty)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên $(2, +\infty)$.
 D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 22. Biết rằng đồ thị hàm số $y = mx + n$ đi qua đỉnh của parabol $y = x^2 - 2x + 3$. Hãy tính $m + n$.

- A. 0.
 B. 1.
 C. 2.
 D. -2.

Câu 23. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình vẽ dưới?

A. $y = -x^2 - 4x - 9$.

B. $y = x^2 + 4x - 5$.

C. $y = x^2 + 4x - 1$.

D. $y = x^2 + 2x - 5$.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y	$+\infty$	-5	$+\infty$

Câu 24. Xác định (P) : $y = ax^2 + bx + c$ biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ khi $x = \frac{1}{2}$ và nhận giá trị bằng 1 khi $x = 1$.

A. $y = x^2 + x - 1$.

B. $y = x^2 - x + 1$.

C. $y = 2x^2 - x + 1$.

D. $y = x^2 - x$.

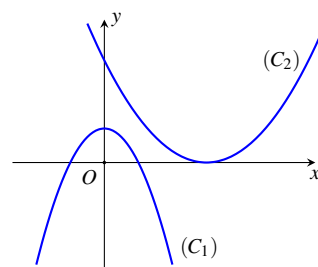
Câu 25. Cho hai hàm số $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ và $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$ với $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ là các số thực, lần lượt có đồ thị là (C_1) và (C_2) như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a_1 > a_2, b_1 > b_2, c_1 > c_2$.

B. $a_1 < a_2, b_1 < b_2, c_1 < c_2$.

C. $a_1 > a_2, b_1 < b_2, c_1 > c_2$.

D. $a_1 < a_2, b_1 > b_2, c_1 < c_2$.



—HẾT—

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

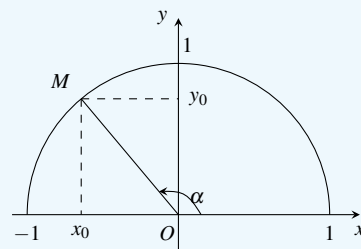
Bài 1 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Giá trị lượng giác của một góc

Định nghĩa: Với mỗi góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$), ta xác định duy nhất một điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Giả sử điểm M có tọa độ $M(x_0; y_0)$, khi đó ta có định nghĩa:

- sin của góc α là y_0 , kí hiệu $\sin \alpha$.
- cosin của góc α là x_0 , kí hiệu $\cos \alpha$.
- tang của góc α là $\frac{y_0}{x_0}$ ($x_0 \neq 0$), kí hiệu $\tan \alpha$.
- cotang của góc α là $\frac{x_0}{y_0}$ ($y_0 \neq 0$), kí hiệu $\cot \alpha$.



Từ định nghĩa trên, ta có:

$$\textcircled{1} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\textcircled{2} \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\textcircled{3} \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$$

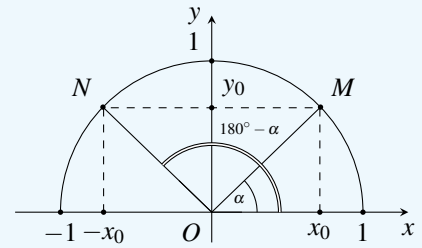
Bảng giá trị lượng giác của góc đặc biệt:

	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		0
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	

2. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác

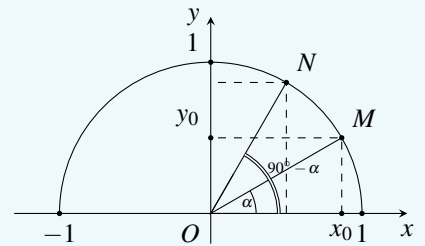
Hai góc bù nhau: Trên hình bên ta có dây cung NM song song với trục Ox và nếu $\widehat{xOM} = \alpha$ thì $\widehat{xON} = 180^\circ - \alpha$. Ta có $y_M = y_N = y_0$, $x_M = -x_N = x_0$. Do đó

- ① $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- ② $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$
- ③ $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$
- ④ $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$



Hai góc phụ nhau: Hình vẽ bên, hai điểm M và N ứng với hai góc phụ nhau α và $90^\circ - \alpha$ ($\widehat{xOM} = \alpha$, $\widehat{xON} = 90^\circ - \alpha$)

- $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
- $\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$
- $\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$



B RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN

KN

1

Giá trị lượng giác của góc α cho trước ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$)

Ví dụ 1. Bằng cách vẽ nửa đường tròn đơn vị, hãy tính các giá trị lượng giác của góc α với

- a) $\alpha = 60^\circ$. b) $\alpha = 90^\circ$. c) $\alpha = 120^\circ$. d) $\alpha = 135^\circ$.

Ví dụ 2. Bằng cách vẽ nửa đường tròn đơn vị, hãy tìm góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) trong các trường hợp sau:

- a) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. b) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. d) $\sin \alpha = 1$.

KN

2

Tính giá trị biểu thức

Ví dụ 3. Tính giá trị biểu thức sau

- a) $A = 2 \cos 30^\circ + 3 \sin 120^\circ$. b) $B = a \cos 60^\circ + 2a \tan 45^\circ - 3a \sin 30^\circ$.

Ví dụ 4. Cho $x = 30^\circ$. Tính $A = \sin(2x) - 3 \cos x$.

Ví dụ 5. Biết $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. Tính giá trị biểu thức $P = \sin 165^\circ + \cos 75^\circ$.

Ví dụ 6. Tính giá trị các biểu thức sau:

- a) $A = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \dots + \sin^2 170^\circ + \sin^2 180^\circ$.
 b) $B = \tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \dots \tan 80^\circ$.
 c) $C = \cot 20^\circ + \cot 40^\circ + \dots + \cot 140^\circ + \cot 160^\circ$.

KN

3

Rút gọn, chứng minh biểu thức

Ví dụ 7. Chứng minh rằng

- a) $\sin 105^\circ = \sin 75^\circ$; b) $\cos 170^\circ = \cos 10^\circ$; c) $\tan 122^\circ = -\tan 58^\circ$.

Ví dụ 8. Chứng minh rằng với mọi góc α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$), ta đều có

- a) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. b) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$. c) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

Ví dụ 9. Áp dụng kết quả của **Ví dụ 7**, hãy giải các bài toán sau:

- a) Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Tính giá trị của biểu thức $A = 2\sin^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha$.

- b) Cho $\tan \alpha = 2$. Tính giá trị của biểu thức

$$\bullet B = \frac{2\sin \alpha + 3\cos \alpha}{5\sin \alpha + \cos \alpha}, \quad \bullet C = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{3\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}.$$

Ví dụ 10. Cho A, B, C là các góc của tam giác. Chứng minh các đẳng thức sau:

- a) $\sin(A+B) = \sin C$. b) $\cos(A+B) + \cos C = 0$.
 c) $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$. d) $\tan(A-B+C) = -\tan 2B$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Giá trị $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ$ bằng bao nhiêu?

- A. 1. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. 0.

Câu 2. Giá trị của $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{4}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. D. 2.

Câu 3. Trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào là **đúng**?

- A. $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$.

Câu 4. Tính giá trị biểu thức $P = \cos 30^\circ \cos 60^\circ - \sin 30^\circ \sin 60^\circ$.

- A. $P = \sqrt{3}$. B. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $P = 1$. D. $P = 0$.

Câu 5. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào **sai**?

A. $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$. B. $\cos 45^\circ = \sin 135^\circ$. C. $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$. D. $\sin 60^\circ = \cos 120^\circ$.

Câu 6. Tam giác ABC vuông ở A có góc $\widehat{B} = 30^\circ$ Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\cos B = \frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\cos C = \frac{1}{2}$. D. $\sin B = \frac{1}{2}$.

Câu 7. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **đúng**?

A. $\sin(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$. B. $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$.
C. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$. D. $\sin(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.

Câu 8. Cho hai góc α và β với $\alpha + \beta = 180^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $P = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha$.

A. $P = 0$. B. $P = 1$. C. $P = -1$. D. $P = 2$.

Câu 9. Cho tam giác ABC . Tính $P = \sin A \cdot \cos(B+C) + \cos A \cdot \sin(B+C)$.

A. $P = 0$. B. $P = 1$. C. $P = -1$. D. $P = 2$.

Câu 10. Cho tam giác ABC . Tính $P = \cos A \cdot \cos(B+C) - \sin A \cdot \sin(B+C)$.

A. $P = 0$. B. $P = 1$. C. $P = -1$. D. $P = 2$.

Câu 11. Cho hai góc nhọn α và β phụ nhau. Hệ thức nào sau đây là **sai**?

A. $\sin \alpha = -\cos \beta$. B. $\cos \alpha = \sin \beta$. C. $\tan \alpha = \cot \beta$. D. $\cot \alpha = \tan \beta$.

Câu 12. Cho hai góc α và β với $\alpha + \beta = 90^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $P = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$.

A. $P = 0$. B. $P = 1$. C. $P = -1$. D. $P = 2$.

Câu 13. Cho α là góc tù. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $\sin \alpha < 0$. B. $\cos \alpha > 0$. C. $\tan \alpha < 0$. D. $\cot \alpha > 0$.

Câu 14. Cho biết $\sin \frac{\alpha}{3} = \frac{3}{5}$. Giá trị của $P = 3 \sin^2 \frac{\alpha}{3} + 5 \cos^2 \frac{\alpha}{3}$ bằng bao nhiêu?

A. $P = \frac{105}{25}$. B. $P = \frac{107}{25}$. C. $P = \frac{109}{25}$. D. $P = \frac{111}{25}$.

Câu 15. Cho biết $\tan \alpha = -3$. Giá trị của $P = \frac{6 \sin \alpha - 7 \cos \alpha}{6 \cos \alpha + 7 \sin \alpha}$ bằng bao nhiêu?

A. $P = \frac{4}{3}$. B. $P = \frac{5}{3}$. C. $P = -\frac{4}{3}$. D. $P = -\frac{5}{3}$.

Câu 16. Cho biết $\sin \alpha + \cos \alpha = a$. Tính giá trị của $\sin \alpha \cos \alpha$.

A. $\sin \alpha \cos \alpha = a^2$. B. $\sin \alpha \cos \alpha = 2a$.
C. $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{a^2 - 1}{2}$. D. $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{a^2 - 11}{2}$.

Câu 17. Cho biết $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{1}{3}$. Giá trị của $P = \sqrt{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha}$ bằng bao nhiêu?

A. $P = \frac{5}{4}$. B. $P = \frac{7}{4}$. C. $P = \frac{9}{4}$. D. $P = \frac{11}{4}$.

Câu 18. Cho biết $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Giá trị của $P = \sqrt{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}$ bằng bao nhiêu?

A. $P = \frac{\sqrt{15}}{5}$. B. $P = \frac{\sqrt{17}}{5}$. C. $P = \frac{\sqrt{19}}{5}$. D. $P = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

—HẾT—

Bài 2

ĐỊNH LÝ CÔSIN VÀ ĐỊNH LÝ SIN

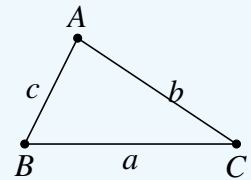
A TOÁN TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lý cô-sin

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$ và $AB = c$.

Ta có

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.
- $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B$.
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.



Áp dụng để tính góc

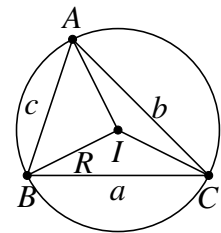
$$\textcircled{1} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \textcircled{2} \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \textcircled{3} \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

2. Định lý sin

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

 Ghi nhớ: Tỷ lệ "cạnh chia sin góc đối" thì bằng nhau.



3. Công thức tính diện tích tam giác

Gọi S là diện tích tam giác ABC . Ta có

$$\begin{aligned} \textcircled{1} S &= \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c. & \textcircled{2} S &= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C \\ \textcircled{3} S &= \frac{abc}{4R}. & \textcircled{4} S &= p \cdot r \\ \textcircled{5} S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \end{aligned}$$

Trong đó:

- h_a, h_b, h_c là độ dài đường cao lần lượt tương ứng với các cạnh BC, CA, AB .
- R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.
- r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.
- $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác.

KN

1

Vận dụng định lý cô-sin

*Nhận dạng:*

- Cho tam giác biết trước độ dài hai cạnh và số đo của một góc.
- Cho tam giác biết trước độ dài ba cạnh.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $b = 5, c = 7$ và $\cos A = \frac{3}{5}$. Tính cạnh a và cosin các góc còn lại của tam giác đó.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $AC = 10$ cm, $BC = 16$ cm và $\widehat{C} = 120^\circ$, tính độ dài cạnh AB .

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC , biết $AC = 4\sqrt{3}, AB = 4, \widehat{A} = 30^\circ$. Tính độ dài cạnh BC và số đo góc B, C của tam giác.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có $BC = 3, CA = 4$ và $AB = 6$, Tính cosin của góc có số đo lớn nhất của tam giác đã cho.

KN

2

Vận dụng định lý sin

*Nhận dạng: Cho tam giác biết trước độ dài một cạnh và số đo của hai góc.*

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 45^\circ, \widehat{C} = 75^\circ$ và cạnh $BC = 5$.

- Tính độ dài AB và AC .
- Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$. Biết bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = 6$. Tính độ dài cạnh BC .

Ví dụ 7. Cho $\triangle ABC$ có $A = 120^\circ, B = 45^\circ$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác là $R = 2$.

- Tính các cạnh và diện tích của $\triangle ABC$.
- Tính độ dài phân giác trong và ngoài góc A .

KN

3

Diện tích tam giác và các bài toán liên quan

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC vuông tại $B, BC = 15$ cm và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC vuông tại C , có đường cao CK . Biết $AC = 10$ cm và $AK = 6$ cm. Tính diện tích S của tam giác ABC .

Ví dụ 10. Tam giác ABC có $c = 8$, $c = 3$; $\widehat{B} = 60^\circ$.

- Tính diện tích tam giác ABC .
- Tính độ dài đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh lần lượt là 13, 14, 15.

- Tính diện tích tam giác ABC .
- Tính độ dài đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .
- Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Ví dụ 12. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh lần lượt là 26, 28, 30.

- Tính diện tích tam giác ABC .
- Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Ví dụ 13. Tam giác ABC có $c = 3$, $b = 4$; $S = 3\sqrt{3}$.

- Tính độ dài BC .
- Tính độ dài đường cao kẻ từ B của tam giác ABC .

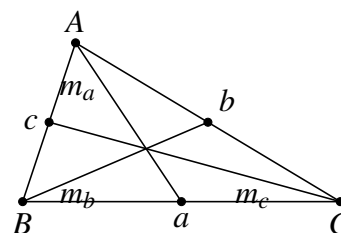
KN

4

Tổng hợp chứng minh, tính toán

Công thức độ dài đường trung tuyến: Cho tam giác ABC có m_a, m_b, m_c lần lượt là các trung tuyến kẻ từ A, B, C . Ta có

$$\begin{aligned} \bullet m_a^2 &= \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \\ \bullet m_b^2 &= \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \\ \bullet m_c^2 &= \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \end{aligned}$$



Ví dụ 14. Cho tam giác ABC có $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm và $BC = 6$ cm. Tính độ dài trung tuyến kẻ từ C của tam giác ABC .

Ví dụ 15. Tam giác ABC có $b = 6$, $c = 8$ và $m_a = 5$. Tính $a, \widehat{A}$.

Ví dụ 16. Chứng minh rằng trong tam giác ABC , ta có

- $b^2 - c^2 = a(b \cdot \cos C - c \cdot \cos B)$;
- $\sin C = \sin A \cos B + \sin B \cos A$.

Ví dụ 17. Cho tam giác ABC có $a^2 = \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c}$. Tính số đo góc A .

Ví dụ 18. Cho tam giác ABC thỏa mãn $a \sin B = c \sin A$. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

Ví dụ 19. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$ và $AB = c$ thỏa $a^3 = b^3 + c^3$. Chứng minh $60^\circ < \hat{A} < 90^\circ$.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- 1 Cho tam giác ABC , biết
 - a) $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$, $b = 4$. Tính cạnh a và c .
 - b) $\hat{A} = 60^\circ$, $a = 6$. Tính R .
- 2 Cho tam giác ABC , biết
 - a) $a = 7$, $b = 8$, $c = 6$. Tính m_a .
 - b) $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$. Lấy D đối xứng của B qua C . Tính m_a và AD .
- 3 Cho tam giác ABC , có $AC = 13$, $AB + BC = 22$ và $\hat{B} = 60^\circ$. Tính độ dài các cạnh AB , BC .
- 4 Cho tam giác ABC , biết
 - a) $a = 7$, $b = 8$, $c = 6$. Tính S và h_a
 - b) $b = 7$, $c = 5$, $\cos A = \frac{3}{5}$. Tính S và R , r .
- 5 Cho $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 90^\circ$, bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = 7$ và bán kính đường tròn nội tiếp là $r = 3$. Tính diện tích S của tam giác.
- 6 Cho tam giác ABC . Chứng minh
 - a) Góc A nhọn $\Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$.
 - b) Góc A tù $\Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$.
 - c) Góc A vuông $\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$.
- 7 Tam giác ABC có $b + 2c = 2a$. Chứng minh rằng
 - a) $2 \sin A = \sin B + \sin C$.
 - b) $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$.
- 8 Tam giác ABC có $AB = c$; $BC = a$; $CA = b$. Các cạnh a , b , c liên hệ với nhau bởi đẳng thức $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$. Tính số đo góc $\widehat{BAC}$.
- 9 Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau là $b^2 + c^2 = 5a^2$.
- 10 Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin A = 2 \sin B \cdot \cos C$. Chứng minh ABC là tam giác cân.

- 11 Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.
- 12 Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.
- 13 Cho h_a là đường cao vẽ từ đỉnh A , R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Chứng minh hệ thức $h_a = 2R \sin B \sin C$.
- 14 Cho tam giác ABC có góc B nhọn, AD và CE là hai đường cao.
- Chứng minh $\frac{S_{BDE}}{S_{BAC}} = \frac{BD \cdot BE}{BA \cdot BC}$.
 - Biết rằng $S_{ABC} = 9S_{BDE}$ và $DE = 2\sqrt{2}$. Tính $\cos B$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- 15 Cho tứ giác lồi $ABCD$ có các đường chéo $AC = x$, $BD = y$ và góc giữa AC và BD bằng α . Gọi S là diện tích của tứ giác $ABCD$.
- Chứng minh $S = \frac{1}{2}xy \sin \alpha$.
 - Nêu kết quả trong trường hợp $AC \perp BD$.

Bài 3

GIẢI TAM GIÁC VÀ ỨNG DỤNG THỰC TẾ

A RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN

KN

1

Giải tam giác

Giải tam giác là tìm số đo các cạnh và các góc còn lại của tam giác khi ta biết được các yếu tố đủ để xác định tam giác đó.

- Khi biết trước 2 cạnh và số đo 1 góc; hoặc biết trước 3 cạnh, ta áp dụng định lý cosin và hệ quả của nó.
- Khi biết trước 1 cạnh và số đo 2 góc, ta áp dụng định lý sin.

Ví dụ 1. Giải tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) $AB = 3$, $BC = 5$, $\widehat{B} = 60^\circ$.

b) $\widehat{A} = 120^\circ$, $AC = 8$, $AB = 5$

Ví dụ 2. Giải tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) $BC = 100$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$.

b) $AB = 100$, $\widehat{B} = 100^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$.

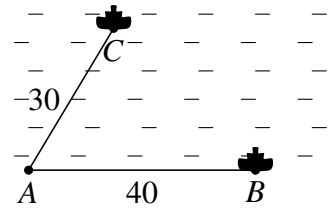
Ví dụ 3. Giải tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) $AB = 2$; $AC = 2\sqrt{7}$ và $BC = 4$.

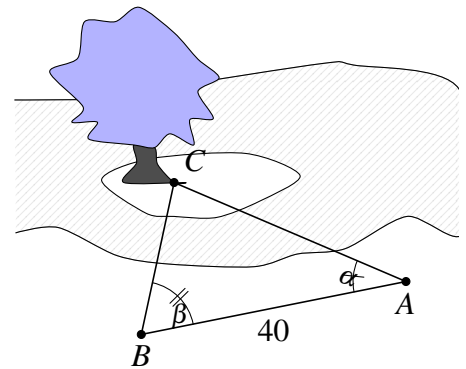
b) $AB = 12$, $AC = 15$, $BC = 20$.

Ví dụ 4.

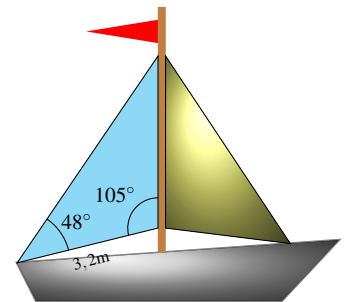
Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60° . Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Hỏi sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí?

**Ví dụ 5.**

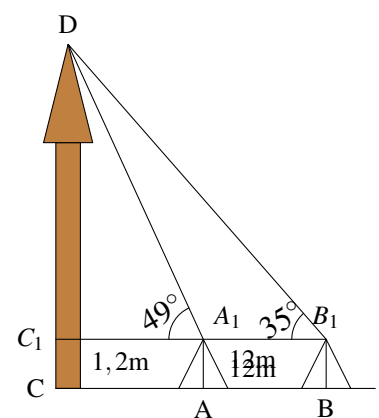
Để đo khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến gốc cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C . Ta đo được khoảng cách $AB = 40$ m, $\widehat{CAB} = 45^\circ$ và $\widehat{CBA} = 70^\circ$. Tính độ dài AC .

**Ví dụ 6.**

Tính diện tích một cánh buồm hình tam giác. Biết cánh buồm đó có chiều dài một cạnh là 3,2 m và hai góc kề cạnh đó có số đo là 48° và 105° .

**Ví dụ 7.**

Muốn đo chiều cao của tháp chàm Por Klong Garai ở Ninh Thuận người ta lấy hai điểm A và B trên mặt đất có khoảng cách $AB = 12$ m cùng thẳng hàng với chân C của tháp để đặt hai giác kế có chiều cao $h = 1,2$ m. Gọi D là đỉnh tháp và hai điểm A_1, B_1 cùng thẳng hàng với C_1 thuộc chiều cao CD của tháp. Người ta đo được góc $\widehat{DA_1C_1} = 49^\circ$ và $\widehat{DB_1C_1} = 35^\circ$. Chiều cao CD của tháp gần với kết quả nào nhất.



1 Giải tam giác ABC , biết

a) $a = b = 6; \widehat{C} = 54^\circ$

b) $c = 7; b = 23; \widehat{A} = 130^\circ$

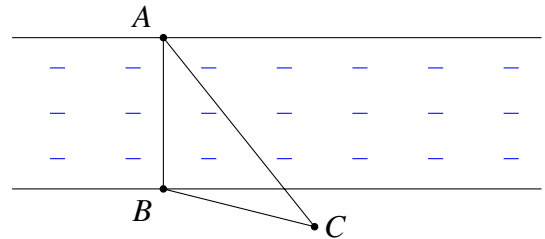
c) $c = 14; \widehat{A} = 60^\circ; \widehat{B} = 40^\circ$

d) $b = 35; \widehat{A} = 40^\circ; \widehat{C} = 120^\circ$

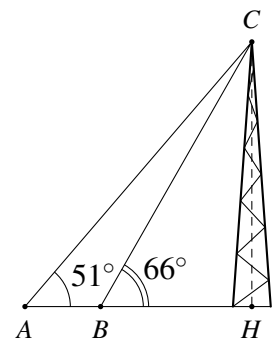
e) $a = 14; b = 18; c = 20$

f) $a = 6; b = 7,3; c = 4,8$

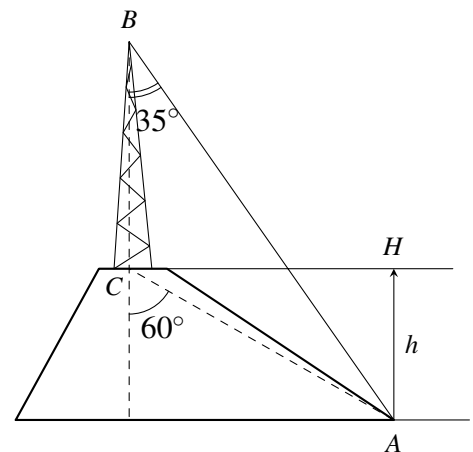
2 Để đo chiều rộng AB của một khúc sông, người ta chọn điểm C . Sau đó, đo khoảng cách BC , các góc B và C . Biết rằng $BC = 200$ m, $\widehat{B} = 107^\circ$, $\widehat{C} = 28^\circ$. Tìm chiều rộng AB của khúc sông đó (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



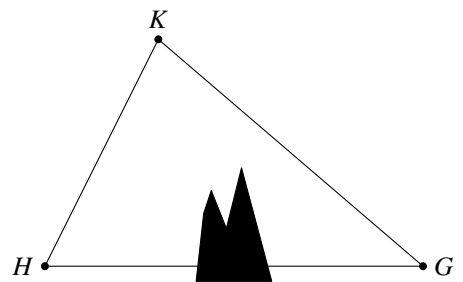
3 Để đo chiều cao CH của một tháp truyền hình, người ta chọn hai điểm quan sát A, B trên mặt đất (hình vẽ). Biết $\widehat{CAH} = 51^\circ$, $\widehat{CBH} = 66^\circ$ và $AB = 75$ m, tính chiều cao của tháp.



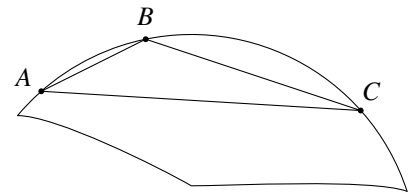
4 Trên ngọn đồi có một cái tháp cao 120 m. Đỉnh tháp B và chân tháp C nhìn điểm A ở chân đồi dưới các góc tương ứng bằng 35° và 60° so với phương thẳng đứng. Xác định chiều cao HA của ngọn đồi. (Làm tròn đến phần mười)



5 Một ô tô muốn đi từ địa điểm H đến địa điểm G, nhưng giữa H và G là một ngọn núi cao nên ô tô phải đi thành 2 đoạn từ H lên K (ô tô leo dốc lên núi) và từ K đến G (ô tô xuống núi). Các đoạn đường tạo thành tam giác HKG với $HK = 15$ km, $KG = 20$ km và $\widehat{HKG} = 120^\circ$. Giả sử cứ chạy 1 km, ô tô tiêu thụ hết 0,3 lít xăng. Giá thành xăng hiện nay là 13050 đồng một lít xăng. Hỏi ô tô đi từ H đến G hết bao nhiêu tiền xăng?

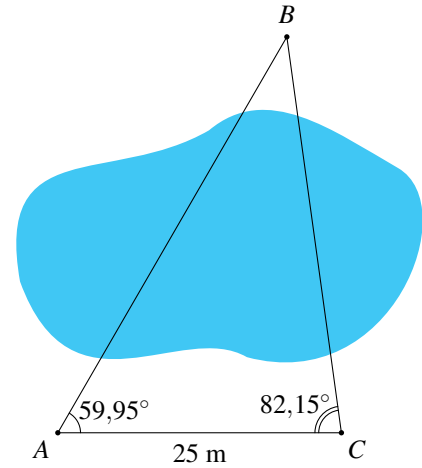


- 6 Để đo bán kính của một chiếc đĩa cổ chỉ còn lại một phần, các nhà khảo cổ chọn 3 điểm trên chiếc đĩa (hình vẽ) và tiến hành đo được kết quả như sau: $\widehat{A} = 33^\circ$, $BC = 15,3$ cm. Tính bán kính của chiếc đĩa (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

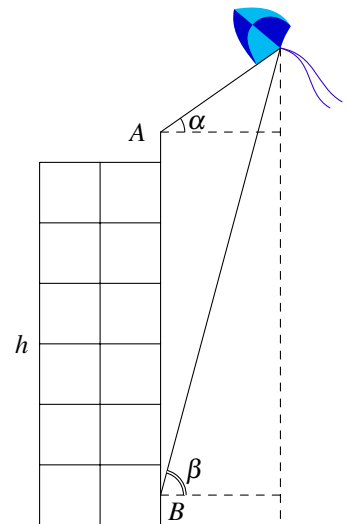


- 7 Để đo khoảng cách từ vị trí A đến vị trí B ở hai bên bờ một cái ao, bạn An đi dọc bờ ao từ vị trí A đến vị trí C và tiến hành đo các góc BAC , BCA . Biết $AC = 25$ m, $\widehat{BAC} = 59,95^\circ$, $\widehat{BCA} = 82,15^\circ$ (hình vẽ bên). Hỏi khoảng cách từ vị trí A đến vị trí B là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

A. 27 m. B. 32 m. C. 30 m. D. 29 m.



- 8 Bạn A đứng ở đỉnh của tòa nhà và quan sát chiếc điều, nhận thấy góc nâng (góc nghiêng giữa phương từ mắt của bạn A tới chiếc điều và phương nằm ngang) là $\alpha = 35^\circ$; khoảng cách từ đỉnh tòa nhà tới mắt bạn A là 1,5 m. Cùng lúc đó ở dưới chân tòa nhà, bạn B cũng quan sát chiếc điều và thấy góc nâng là $\beta = 75^\circ$; khoảng cách từ mặt đất tới mắt bạn B cũng là 1,5 m. Biết chiều cao của tòa nhà là $h = 20$ m (minh họa ở hình bên). Chiếc điều bay cao bao nhiêu mét so với mặt đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



- 9 Một tàu cá xuất phát từ đảo A, chạy 50 km theo hướng $N24^\circ E$ đến đảo B để lấy thêm ngư cụ, rồi chuyển hướng $N36^\circ W$ chạy tiếp 130 km đến ngư trường C.
- a) Tính khoảng cách từ vị trí xuất phát A đến C (làm tròn đến hàng đơn vị, theo đơn vị đo kilômét).
- b) Tìm hướng từ A đến C (làm tròn đến hàng đơn vị, theo đơn vị độ).
- 10 Một tàu du lịch xuất phát từ bãi biển Đồ Sơn (Hải Phòng), chạy theo hướng $N80^\circ E$ với vận tốc 20 km/h. Sau khi đi được 30 phút, tàu chuyển sang hướng $E20^\circ S$ giữ nguyên vận tốc và chạy tiếp 36 phút nữa đến đảo Cát Bà. Hỏi khi đó tàu du lịch cách vị trí xuất phát bao nhiêu kilômét?
- 11 Một cây cổ thụ mọc thẳng đứng bên lề một con dốc có độ dốc 10° so với phương nằm ngang. Từ một điểm dưới chân dốc, cách gốc cây 31 m người ta nhìn đỉnh ngọn cây dưới một góc 40° so với phương nằm ngang. Hãy tính chiều cao của cây.

Câu 1. Tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$ và $AB = 5$. Tính độ dài cạnh AC .

- A. $AC = 5\sqrt{2}$. B. $AC = 5\sqrt{3}$. C. $AC = 10$. D. $AC = \frac{5\sqrt{6}}{2}$.

Câu 2. Tam giác ABC vuông tại A và có $AB = AC = a$. Tính độ dài đường trung tuyến BM của tam giác đã cho.

- A. $BM = \frac{\sqrt{5}}{2}a$. B. $BM = 1,5a$. C. $BM = \sqrt{2}a$. D. $BM = \sqrt{3}a$.

Câu 3. Tam giác ABC có $BC = 10$ và $\widehat{A} = 30^\circ$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $R = \frac{10}{\sqrt{3}}$. B. $R = 10$. C. $R = 10\sqrt{3}$. D. $R = 5$.

Câu 4. Tam giác ABC có $AC = 4$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$, $\widehat{ACB} = 75^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

- A. $S_{\Delta ABC} = 4$. B. $S_{\Delta ABC} = 8\sqrt{3}$. C. $S_{\Delta ABC} = 4\sqrt{3}$. D. $S_{\Delta ABC} = 8$.

Câu 5. Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 6$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

- A. $S_{\Delta ABC} = 9$. B. $S_{\Delta ABC} = 9\sqrt{3}$. C. $S_{\Delta ABC} = \frac{9}{2}$. D. $S_{\Delta ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Câu 6. Tam giác ABC có $AB = 5$, $BC = 7$, $CA = 8$. Số đo góc $\widehat{A}$ bằng

- A. 90° . B. 45° . C. 60° . D. 30° .

Câu 7. Tam giác ABC có $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm và $BC = 15$ cm. Tính độ dài đường trung tuyến AM của tam giác đã cho.

- A. $AM = \frac{15}{2}$ cm. B. $AM = 9$ cm. C. $AM = 10$ cm. D. $AM = \frac{13}{2}$ cm.

Câu 8. Tam giác ABC có $AB = \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{3}$ và $\widehat{C} = 45^\circ$. Tính độ dài cạnh BC .

- A. $BC = \sqrt{5}$. B. $BC = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$. C. $BC = \sqrt{6}$. D. $BC = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$.

Câu 9. Tam giác ABC có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm và $BC = 10$ cm. Độ dài đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác bằng

- A. 4 cm. B. $\sqrt{3}$ cm. C. 7 cm. D. 5 cm.

Câu 10. Tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 1$ và $\widehat{A} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC .

- A. $BC = \sqrt{2}$. B. $BC = \sqrt{3}$. C. $BC = 1$. D. $BC = 2$.

Câu 11. Tam giác ABC vuông tại A có $AB = AC = 30$ cm. Hai đường trung tuyến BF và CE cắt nhau tại G . Diện tích tam giác GFC bằng

- A. 50 cm^2 . B. 75 cm^2 . C. $50\sqrt{2} \text{ cm}^2$. D. $15\sqrt{105} \text{ cm}^2$.

Câu 12. Tam giác ABC cân tại C , có $AB = 9$ cm và $AC = \frac{15}{2}$ cm. Gọi D là điểm đối xứng của B qua C . Tính độ dài cạnh AD

- A. $AD = 12\sqrt{2}$ cm. B. $AD = 6$ cm. C. $AD = 12$ cm. D. $AD = 9$ cm.

Câu 13. Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 6$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính độ dài đường cao h_a của tam giác.

- A. $h_a = 3\sqrt{3}$. B. $h_a = \sqrt{3}$. C. $h_a = \frac{3}{2}$. D. $h_a = 3$.

Câu 14. Tam giác ABC có $BC = 21$ cm, $CA = 17$ cm, $AB = 10$ cm. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. $R = \frac{85}{8}$ cm.

B. $R = \frac{7}{2}$ cm.

C. $R = \frac{85}{2}$ cm.

D. $R = \frac{7}{4}$ cm.

Câu 15. Tam giác ABC vuông tại A , đường cao $AH = 32$ cm. Hai cạnh AB và AC tỉ lệ với 3 và 4. Cạnh nhỏ nhất của tam giác này có độ dài bằng bao nhiêu?

A. 40 cm.

B. 38 cm.

C. 45 cm.

D. 42 cm.

Câu 16. Tam giác ABC có $AB = 8$ cm, $AC = 18$ cm và có diện tích bằng 64 cm². Tính $\sin A$.

A. $\sin A = \frac{3}{8}$.

B. $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\sin A = \frac{8}{9}$.

D. $\sin A = \frac{4}{5}$.

Câu 17. Tam giác ABC có $AB = 3$, $BC = 8$. Gọi M là trung điểm của BC . Biết $\cos \widehat{AMB} = \frac{5\sqrt{13}}{26}$ và $AM > 3$. Tính độ dài cạnh AC .

A. $AC = 7$.

B. $AC = \sqrt{7}$.

C. $AC = 13$.

D. $AC = \sqrt{13}$.

Câu 18. Hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$ và $\widehat{BAD} = 45^\circ$. Khi đó hình bình hành có diện tích bằng

A. a^2 .

B. $a^2\sqrt{3}$.

C. $2a^2$.

D. $a^2\sqrt{2}$.

Câu 19. Tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

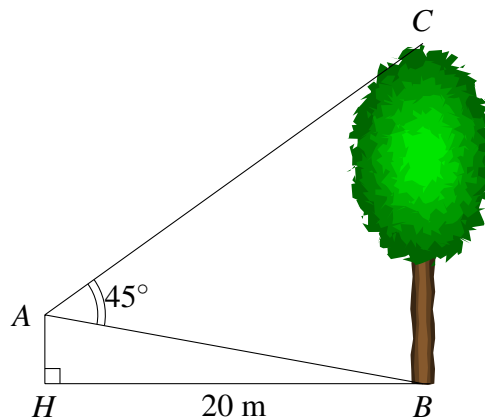
A. $r = 2$.

B. $r = \sqrt{3}$.

C. $r = 1$.

D. $r = 2\sqrt{3}$.

Câu 20. Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (Hình vẽ). Biết $AH = 4$ m, $HB = 20$ m, $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Chiều cao của cây gần nhất với giá trị nào sau đây?



A. 14 m.

B. 15 m.

C. 17 m.

D. 16 m.

Câu 21. Tam giác ABC có $AB = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$, $BC = \sqrt{3}$, $CA = \sqrt{2}$. Gọi D là chân đường phân giác trong góc $\widehat{A}$. Khi đó góc $\widehat{ADB}$ bằng

A. 90° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 75° .

Câu 22. Tam giác ABC có đoạn thẳng nối trung điểm của AB và BC bằng 3, cạnh $AB = 9$ và $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC .

A. $BC = 3 + 3\sqrt{6}$.

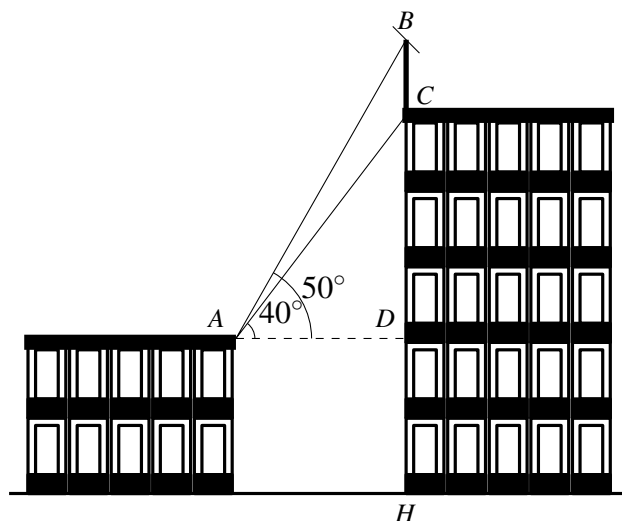
B. $BC = 3\sqrt{7}$.

C. $BC = \frac{3 + 3\sqrt{33}}{2}$.

D. $BC = 3\sqrt{6} - 3$.

Câu 23. Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc 50° và 40° so với phương nằm ngang. Chiều cao của tòa nhà gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 29 m.
- B. 24 m.
- C. 19 m.
- D. 12 m.



Câu 24. Tam giác ABC có $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 2\sqrt{7}$. Điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Tính độ dài cạnh AM.

- A. $AM = 4\sqrt{2}$.
- B. $AM = 3\sqrt{2}$.
- C. $AM = 2\sqrt{3}$.
- D. $AM = 3$.

Câu 25. Cho hình thoi ABCD cạnh bằng 1 cm và có $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh AC.

- A. $AC = 2$.
- B. $AC = \sqrt{3}$.
- C. $AC = 2\sqrt{3}$.
- D. $AC = \sqrt{2}$.

Câu 26. Cho hình bình hành ABCD có $AB = a$, $BC = b$, $BD = m$ và $AC = n$. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào đúng?

- A. $m^2 + m^2 = 3(a^2 + b^2)$.
- B. $3(m^2 + m^2) = a^2 + b^2$.
- C. $m^2 + m^2 = 2(a^2 + b^2)$.
- D. $2(m^2 + m^2) = a^2 + b^2$.

Câu 27. Tam giác ABC có ba đường trung tuyến m_a , m_b , m_c thỏa mãn $5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$. Khi đó tam giác này là tam giác gì?

- A. Tam giác đều.
- B. Tam giác vuông cân.
- C. Tam giác vuông.
- D. Tam giác cân.

Câu 28. Cho tam giác ABC có $AB = 3\sqrt{3}$, $BC = 6\sqrt{3}$ và $CA = 9$. Gọi D là trung điểm BC. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD.

- A. $R = \frac{9}{2}$.
- B. $R = 3$.
- C. $R = \frac{9}{6}$.
- D. $R = 3\sqrt{3}$.

Câu 29. Cho góc $\widehat{xOy} = 30^\circ$. Gọi A và B là hai điểm di động lần lượt trên Ox và Oy sao cho $AB = 1$. Độ dài lớn nhất của đoạn OB bằng

- A. $\frac{3}{2}$.
- B. 2.
- C. $2\sqrt{2}$.
- D. $\sqrt{3}$.

Câu 30. Tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Các cạnh a, b, c liên hệ với nhau bởi đẳng thức $a^2 + b^2 = 5c^2$. Góc giữa hai trung tuyến AM và BN bằng

- A. 30° .
- B. 90° .
- C. 60° .
- D. 45° .

—HẾT—

ĐỀ TRẮC NGHIỆM CUỐI CHƯƠNG

1. Đề số 1

Câu 1. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

- A. $\cos 0^\circ = 1$. B. $\sin 0^\circ = 0$. C. $\cos 120^\circ = \frac{2}{\sqrt{2}}$. D. $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 2. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\tan 30^\circ = \sqrt{3}$. C. $\cot 90^\circ = 1$. D. $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 3. Cho α là góc tù. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau?

- A. $\sin \alpha < 0$. B. $\cos \alpha > 0$. C. $\tan \alpha < 0$. D. $\cot \alpha > 0$.

Câu 4. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

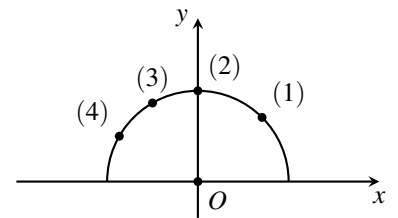
- A. $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$. B. $\cos \alpha = \cos(180^\circ - \alpha)$.
C. $\tan \alpha = \tan(180^\circ - \alpha)$. D. $\cot \alpha = \cot(180^\circ - \alpha)$.

Câu 5. Biết $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Tính $P = \cos^2 \alpha + 3 \tan^2 \alpha$.

- A. $\frac{91}{72}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $\frac{8}{9}$. D. $\frac{67}{72}$.

Câu 6. Trên nửa đường tròn đơn vị, vị trí nào trong các vị trí dưới đây xác định điểm M sao cho $\tan \widehat{xOM} = 1$.

- A. Vị trí (1). B. Vị trí (2).
C. Vị trí (3). D. Vị trí (4).



Câu 7. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh $AB = 5$, $AC = 8$, $BC = 7$. Tính số đo góc A .

- A. 120° . B. 60° . C. 45° . D. 30° .

Câu 8. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 5$. Độ dài đoạn trung tuyến AM là

- A. 13. B. $\sqrt{13}$. C. $\frac{\sqrt{26}}{2}$. D. $\frac{13}{2}$.

Câu 9. Tam giác ABC cân tại C , có $AB = 9$ cm và $AC = \frac{15}{2}$ cm. Gọi D là điểm đối xứng của B qua C . Tính độ dài cạnh AD

- A. $AD = 6$ cm. B. $AD = 9$ cm. C. $AD = 12$ cm. D. $AD = 12\sqrt{2}$ cm.

Câu 10. Tam giác ABC có $BC = 10$ và $\widehat{A} = 30^\circ$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $R = 5$. B. $R = 10$. C. $R = \frac{10}{\sqrt{3}}$. D. $R = 10\sqrt{3}$.

Câu 11. Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 6$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

- A. $S_{\Delta ABC} = 9\sqrt{3}$. B. $S_{\Delta ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$. C. $S_{\Delta ABC} = 9$. D. $S_{\Delta ABC} = \frac{9}{2}$.

Câu 12. Tam giác ABC có $AC = 4$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$, $\widehat{ACB} = 75^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

- A. $S_{\Delta ABC} = 8$. B. $S_{\Delta ABC} = 4\sqrt{3}$. C. $S_{\Delta ABC} = 4$. D. $S_{\Delta ABC} = 8\sqrt{3}$.

Câu 13. Tam giác ABC có $a = 21, b = 17, c = 10$. Diện tích của tam giác ABC bằng

- A. $S_{\Delta ABC} = 16$. B. $S_{\Delta ABC} = 48$. C. $S_{\Delta ABC} = 24$. D. $S_{\Delta ABC} = 84$.

Câu 14. Tam giác ABC có $AB = 5, AC = 8$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

- A. $r = 1$. B. $r = 2$. C. $r = \sqrt{3}$. D. $r = 2\sqrt{3}$.

Câu 15. Tam giác ABC có $a = 21, b = 17, c = 10$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

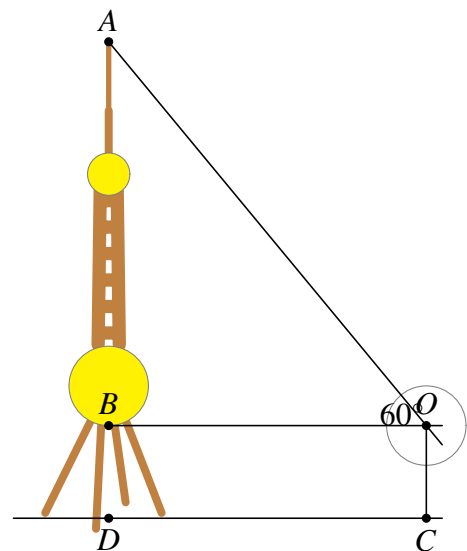
- A. $r = 16$. B. $r = 7$. C. $r = \frac{7}{2}$. D. $r = 8$.

Câu 16. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 4, BC = 6, M$ là trung điểm của BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $ND = 3NC$. Khi đó bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN bằng

- A. $5\sqrt{2}$. B. $3\sqrt{5}$. C. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

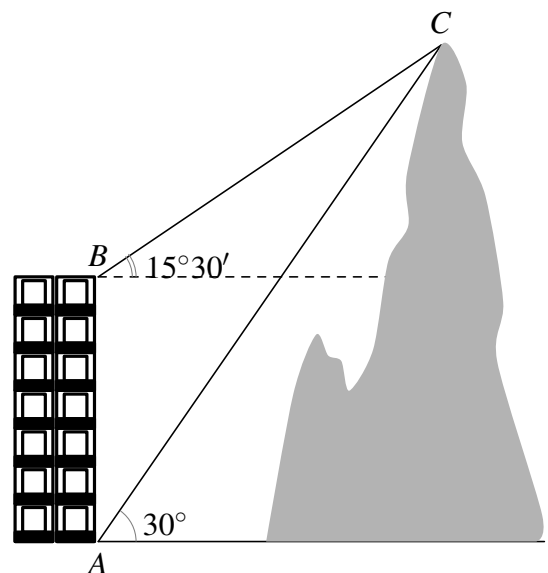
Câu 17. Xác định chiều cao của một tháp mà không cần lên đỉnh của tháp. Đặt kế giác thẳng đứng cách chân tháp một khoảng $CD = 60$ m, giả sử chiều cao của giác kế là $OC = 1$ m. Quay thanh giác kế sao cho khi ngắm theo thanh ta nhìn thấy đỉnh A của tháp. Đọc trên giác kế số đo của góc $\widehat{AOB} = 60^\circ$. Chiều cao của ngọn tháp gần với giá trị nào sau đây:

- A. 40 m.
B. 114 m.
C. 105 m.
D. 110 m.



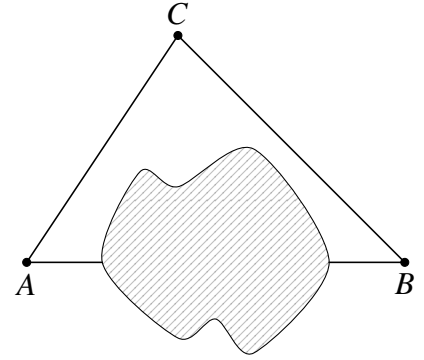
Câu 18. Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB = 70$ m, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc 30° , phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc $15^\circ 30'$. Ngọn núi đó có độ cao so với mặt đất gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 135 m.
B. 234 m.
C. 165 m.
D. 195 m.



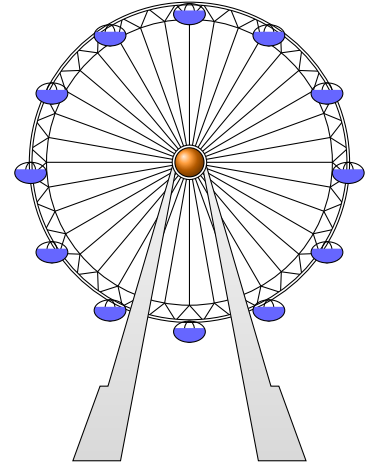
Câu 19. Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc 60° . Biết $CA = 200$ m, $CB = 180$ m. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

- A. $20\sqrt{91}$ m. B. 112 m.
C. 168 m. D. 228 m.



Câu 20. Vòng quay mặt trời Hạ Long Sun Wheel trong khu giải trí Sun World Ha Long Park có đường kính 115 m, quay hết một vòng trong thời gian 20 phút. Lúc bắt đầu quay, một người ở cabin thấp nhất cách mực nước biển 100 m. Hỏi người đó đạt được độ cao 200 m (so với mực nước biển) lần đầu tiên sau bao nhiêu giây (làm tròn đến $1/10$ giây)?

- A. 460,6 giây. B. 407,9 giây.
C. 408,6 giây. D. 458,9 giây.



—HẾT—

2. Đề số 2

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , lấy điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = 135^\circ$. Tìm hoành độ của điểm M .

- A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 2. Tính giá trị của biểu thức $P = 3 \sin 30^\circ - 5 \cos 60^\circ + 7 \cos 90^\circ$.

- A. $P = 3$. B. $P = -5$. C. $P = -1$. D. $P = 7$.

Câu 3. Biết $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Giá trị đúng của biểu thức $P = \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha$ là

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{10}{9}$. C. $\frac{11}{9}$. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 4. Biết $\tan \alpha = -2$. Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{2 + \sin \alpha}{\cos \alpha - 3 \sin \alpha}$.

- A. $-\frac{3}{7}$. B. $-\frac{7}{3}$. C. $\frac{2}{9}$. D. $-\frac{2}{9}$.

Câu 5. Tính giá trị biểu thức $P = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$.

- A. $P = 0$. B. $P = -1$. C. $P = 1$. D. $P = 2$.

Câu 6. Tam giác ABC có $AB = \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{3}$ và $\widehat{C} = 45^\circ$. Tính độ dài cạnh BC .

- A. $BC = \sqrt{5}$. B. $BC = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$. C. $BC = \sqrt{6}$. D. $BC = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$.

Câu 7. Tam giác ABC có $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 2\sqrt{7}$. Điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Tính độ dài cạnh AM .

- A. $AM = 4\sqrt{2}$. B. $AM = 3\sqrt{2}$. C. $AM = 2\sqrt{3}$. D. $AM = 3$.

Câu 8. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh bằng 1 cm và có $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh AC .

- A. $AC = 2$. B. $AC = \sqrt{3}$. C. $AC = 2\sqrt{3}$. D. $AC = \sqrt{2}$.

Câu 9. Cho tam giác ABC có góc $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{B} = 45^\circ$, $AB = 25$. Độ dài cạnh BC gần với giá trị nào nhất dưới đây?

- A. 22. B. 22,5. C. 24,5. D. 21,5.

Câu 10. Cho tam giác ABC có $AB = 8$, $AC = 11$, $\widehat{A} = 30^\circ$. Số đo góc B gần với giá trị nào nhất dưới đây?

- A. $50,5^\circ$. B. $45,8^\circ$. C. $65,3^\circ$. D. $55,2^\circ$.

Câu 11. Cho tam giác ABC có $BC = 4$, $CA = 6$, $AB = 8$ và M là trung điểm BC . Tính độ dài AM .

- A. $AM = \sqrt{46}$. B. $AM = 4\sqrt{6}$. C. $AM = \sqrt{42}$. D. $AM = \sqrt{34}$.

Câu 12. Cho tam giác ABC có $BC = 2$, $\widehat{A} = 60^\circ$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $R = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. B. $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $R = 4$. D. $R = 2$.

Câu 13. Cho tam giác ABC cân tại A có diện tích $S = 2\sqrt{3}$ và $BC = 2\sqrt{6}$. Tính độ dài cạnh AB .

- A. $AB = 2\sqrt{2}$. B. $AB = 2$. C. $AB = 2\sqrt{3}$. D. $AB = 4$.

Câu 14. Cho tam giác ABC có $BC^2 > AB^2 + AC^2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $\widehat{A}$ là góc tù. B. $\widehat{A}$ là góc nhọn. C. $\widehat{A}$ là góc vuông. D. $\widehat{A}$ là góc nhỏ nhất.

Câu 15. Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 3$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Khi đó diện tích tam giác ABC bằng

- A. 3. B. $4\sqrt{3}$. C. $6\sqrt{3}$. D. 6.

Câu 16. Tìm chu vi tam giác ABC , biết $AB = 6$ và $2\sin A = 3\sin B = 4\sin C$.

- A. 26. B. 13. C. $5\sqrt{26}$. D. $10\sqrt{6}$.

Câu 17. Cho tam giác ABC có $a = 13$ m, $b = 14$ m, $c = 15$ m. Tính diện tích S của tam giác ABC .

- A. $S = 84$ m². B. $S = 90$ m². C. $S = 76$ m². D. $S = 80$ m².

Câu 18. Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 6$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính độ dài đường cao h_a của tam giác.

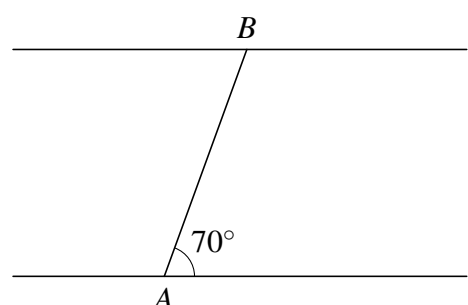
- A. $h_a = 3\sqrt{3}$. B. $h_a = \sqrt{3}$. C. $h_a = \frac{3}{2}$. D. $h_a = 3$.

Câu 19. Cho tam giác ABC có chu vi bằng 6. Tìm giá trị lớn nhất S của diện tích tam giác ABC .

- A. $S = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. B. $S = \sqrt{3}$. C. $S = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $S = 2\sqrt{3}$.

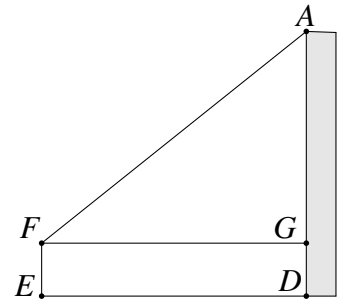
Câu 20. Một con thuyền từ điểm A ở bờ bên này sông di chuyển sang bờ sông bên kia với vận tốc 2 km/h. Do tác động của dòng nước nên đường đi của con thuyền tạo với bờ sông một góc 70° . Biết thuyền đi từ A đến B mất 5 phút và coi hai bờ sông là hai đường thẳng song song, tính độ rộng của con sông (làm tròn đến hàng đơn vị).

- A. 134 m. B. 157 m. C. 168 m. D. 142 m.



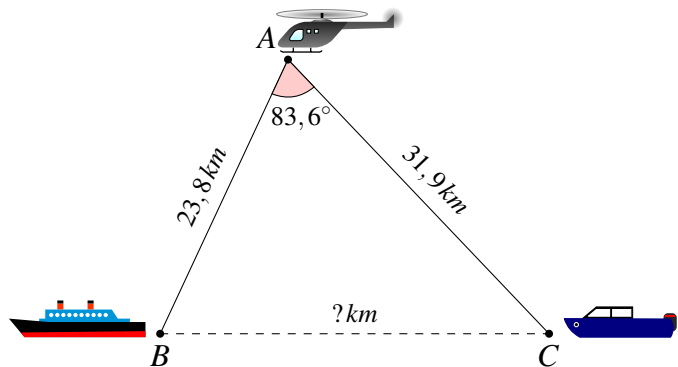
Câu 21. Một người đứng tại vị trí E , có chiều cao $EF = 1,8$ m, quan sát một cái cây AD , góc nhìn $\widehat{AFG} = 45^\circ$. Khoảng cách từ người tới vị trí cái cây là $ED = 20$ m. Tính chiều cao AD của cái cây (Hình vẽ bên).

- A. $AD = 21,8$ m. B. $AD = 20$ m.
C. $AD = 18,2$ m. D. $AD = 30$ m.



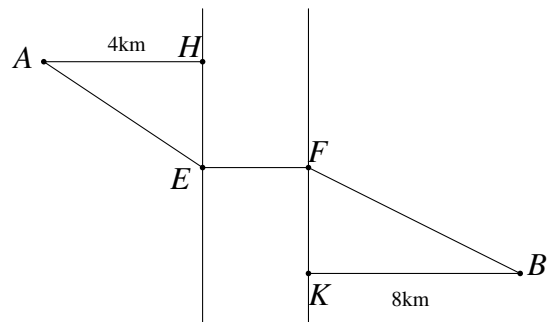
Câu 22. Một máy bay trực thăng A quan sát hai tàu B và C . Biết trực thăng A cách tàu B và tàu C lần lượt là $23,8$ km và $31,9$ km. Góc nhìn từ trực thăng đến hai tàu là $83,6^\circ$. Hỏi hai tàu cách nhau một khoảng gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. $41,87$ km. B. $40,87$ km.
C. $37,61$ km. D. $39,61$ km.



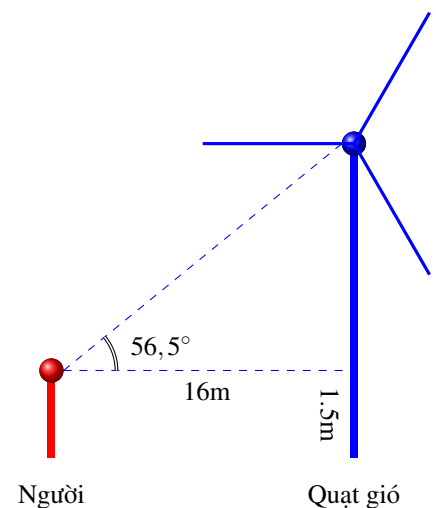
Câu 23. Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu $EF = 1$ km bắc qua sông biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là 4 km và thành phố B cách con sông một khoảng là 8 km (hình vẽ), $HE = 3$ km, $KF = 6$ km. Tính tổng quãng đường d đi từ A đến B (đi theo đường $AEFB$).

- A. $d = 16$ km. B. $d = 15$ km.
C. $d = 22$ km. D. $d = 21$ km.



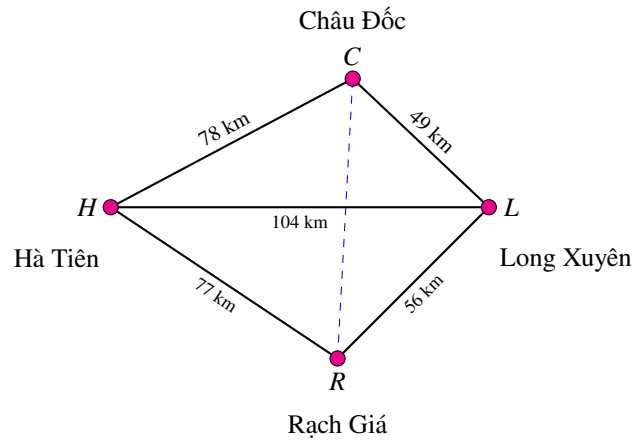
Câu 24. Một người đứng cách thân một cái quạt gió 16 m và nhìn thấy tâm của cánh quạt với góc nâng $56,5^\circ$ (Hình vẽ bên). Tính khoảng cách từ tâm của cánh quạt đến mặt đất. Cho biết khoảng cách từ mắt của người đó đến mặt đất là $1,5$ m.

- A. $20,8$ m. B. $35,2$ m.
C. $28,5$ m. D. $25,7$ m.



Câu 25. Trên bản đồ địa lý, người ta thường gọi tứ giác với 4 đỉnh lần lượt là các thành phố Hà Tiên, Châu Đốc, Long Xuyên, Rạch Giá là tứ giác Long Xuyên. Dựa vào các khoảng cách đã cho ở hình bên, tính khoảng cách giữa Châu Đốc và Rạch Giá.

- A. 80 km . B. 75,7 km.
C. 120 km . D. 70 km .



—HẾT—

Bài 1

CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm vectơ

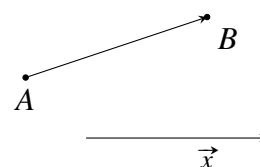
Cho đoạn thẳng AB . Nếu chọn điểm A làm điểm đầu, điểm B làm điểm cuối thì đoạn thẳng AB có hướng từ A đến B . Khi đó ta nói AB là một **đoạn thẳng có hướng**.

⚙ Định nghĩa:

- Vectơ là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là trong hai điểm mút của đoạn thẳng đã chỉ rõ điểm đầu, điểm cuối.
- Độ dài vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

⚙ Chú ý:

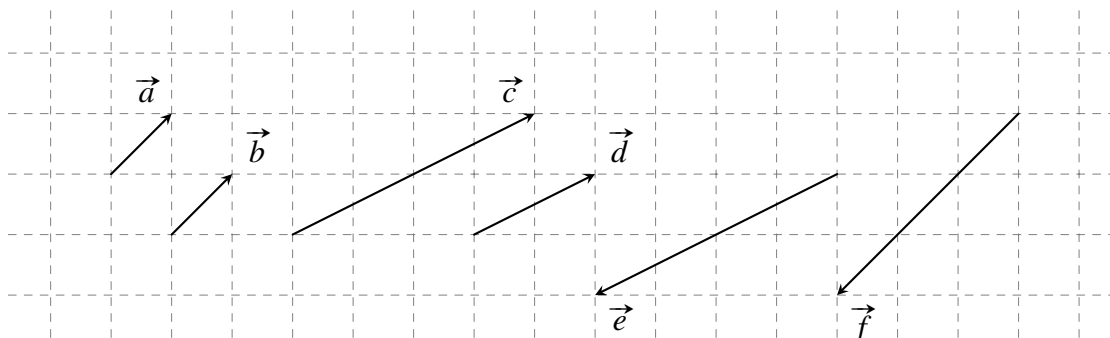
- Nếu chỉ rõ điểm đầu là A và điểm cuối là B , ta có "vectơ AB ", kí hiệu $\overrightarrow{AB}$. Nếu không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối, ta dùng các chữ cái thường để kí hiệu. Ví dụ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, ...
- Độ dài $\vec{a}$, kí hiệu $|\vec{a}|$; Độ dài $\overrightarrow{AB}$, kí hiệu $|\overrightarrow{AB}|$ và hiển nhiên $|\overrightarrow{AB}| = AB$.



2. Vectơ cùng phương, cùng hướng

Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ gọi là giá của vectơ đó.

- ⚙ Hai vectơ cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.
- ⚙ Khi hai vectơ cùng phương, chúng có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.



Trong hình vẽ trên

- các cặp vec tơ cùng phương: $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$; $\vec{a}$ cùng phương $\vec{f}$; $\vec{d}$ cùng phương $\vec{e}$,...
- các cặp vec tơ cùng hướng: $\vec{a}$ cùng hướng $\vec{b}$; $\vec{c}$ cùng hướng $\vec{d}$.
- các cặp vec tơ ngược hướng: $\vec{a}$ ngược hướng $\vec{f}$; $\vec{c}$ ngược hướng $\vec{e}$; $\vec{d}$ ngược hướng $\vec{e}$;

3. Vectơ bằng nhau

Hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$ nếu chúng có cùng hướng và cùng độ dài.

4. Vectơ-không

Định nghĩa: Là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.

- Kí hiệu $\vec{0}$, nghĩa là $\vec{0} = \vec{AA} = \vec{BB}...$;
- Độ dài vectơ-không bằng 0, nghĩa là $|\vec{0}| = 0$.

Qui ước: Vec tơ-không cùng phương và cùng hướng với mọi vec tơ.

B RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN

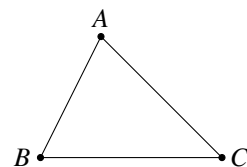
KN

1

Xác định vectơ, vectơ cùng phương, vectơ cùng hướng, vectơ ngược hướng

Ví dụ 1.

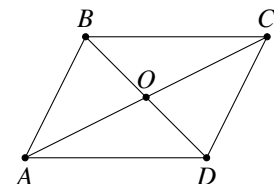
Cho tam giác ABC . Hãy kể tên các vectơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh A, B, C .



Ví dụ 2.

Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Trên hình bên,

- Kể tên 2 vectơ cùng phương với vec tơ $\vec{OA}$.
- Kể tên vectơ cùng hướng, ngược hướng với vec tơ $\vec{OB}$.



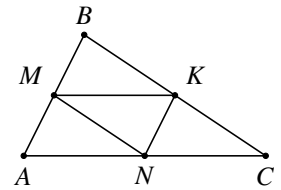
Ví dụ 3. Hai ca nô A và B chạy trên sông với các vận tốc riêng có cùng độ lớn là 15 km/h. Tuy vậy, ca nô A chạy xuôi dòng còn ca nô B chạy ngược dòng. Vận tốc của dòng nước trên sông là 3 km/h.

- Hãy thể hiện trên hình vẽ, vectơ vận tốc $\vec{v}$ của dòng nước và các vectơ vận tốc thực tế $\vec{v}_a, \vec{v}_b$ của các ca nô A, B .
- Trong các vectơ $\vec{v}, \vec{v}_a, \vec{v}_b$, những cặp vectơ nào cùng phương và những cặp vectơ nào ngược hướng?

Ví dụ 4.

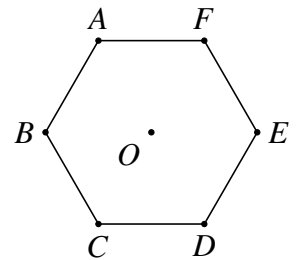
Cho tam giác ABC . Các điểm M, N và K lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC .

- Tìm các vectơ bằng với $\overrightarrow{AM}$.
- Tìm các vectơ bằng với $\overrightarrow{KN}$.

**Ví dụ 5.**

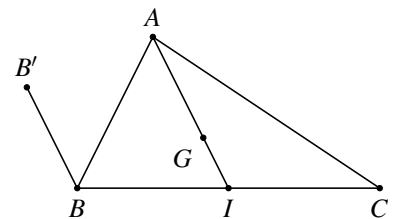
Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O .

- Tìm các vectơ bằng với $\overrightarrow{EF}$.
- Tìm các vectơ bằng với $\overrightarrow{OB}$.

**Ví dụ 6.**

Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi I là trung điểm của BC . Dựng điểm B' thỏa $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$.

- Chứng minh $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$
- Gọi K là trung điểm của BB' . Chứng minh rằng $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG}$.



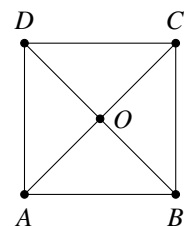
Ví dụ 7. Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng tứ giác đó là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Độ dài $\overrightarrow{AB}$ là độ dài đoạn thẳng AB . Khi tính toán, ta có thể chú ý đến định lý Pitago và các tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông.

Ví dụ 8.

Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , cạnh bằng 2.

- Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO}$.
- Gọi I là trung điểm của BC . Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AI}$.



Ví dụ 9. Cho tam giác ABC đều, cạnh bằng 3. Gọi H là trung điểm của BC và G là trọng tâm tam giác ABC .

- Hãy tính độ lớn của vectơ $\overrightarrow{AH}$
- Hãy tính độ lớn của vectơ $\overrightarrow{AG}$

Câu 1. Véc-tơ có điểm đầu M và điểm cuối N được kí hiệu như thế nào là đúng?

- A. MN . B. NM . C. $\overrightarrow{MN}$. D. $\overrightarrow{mn}$.

Câu 2. Cho hai điểm phân biệt A, B . Số véc-tơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm A, B là

- A. 2. B. 6. C. 13. D. 12.

Câu 3. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hai véc-tơ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng phương và cùng độ dài.
B. Hai véc-tơ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.
C. Hai véc-tơ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng.
D. Hai véc-tơ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng độ dài.

Câu 4. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Cặp véc-tơ nào sau đây cùng hướng?

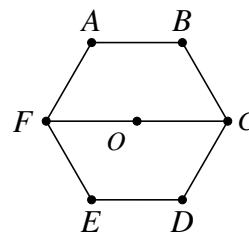
- A. $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CB}$. B. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CB}$. C. $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Câu 5. Cho ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $\overrightarrow{BC}$ ngược hướng với $\overrightarrow{BA}$. B. $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\overrightarrow{BC}$.
C. $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng với $\overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{CB}$ ngược hướng với $\overrightarrow{BA}$.

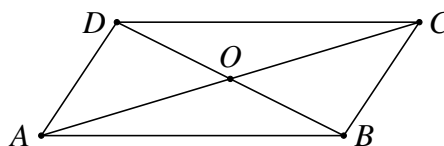
Câu 6. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Số các véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$, cùng phương với véc-tơ $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác trên là

- A. 9. B. 7.
C. 6. D. 4.



Câu 7. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Trên hình vẽ, số véc-tơ (khác $\vec{0}$, khác $\overrightarrow{AC}$) cùng phương với véc-tơ $\overrightarrow{AC}$ là

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.



Câu 8. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương. B. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.
C. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{MB}|$. D. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng.

Câu 9. Cho tam giác đều ABC , mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

- A. $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương $\overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.
C. $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BC}$. D. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$.

Câu 10. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm là I . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{DI}$. B. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$. C. $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{DI}$. D. $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$.

Câu 11. Cho tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$ thì tứ giác $ABCD$ là hình gì?

- A. Hình bình hành. B. Hình thoi. C. Hình chữ nhật. D. Hình vuông.

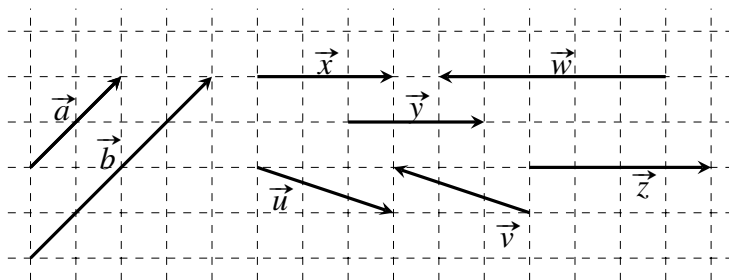
Câu 12. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, phát biểu nào sau đây là **sai**?

- A. $AB = CD$.
B. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai véc-tơ cùng hướng.

C. AC và BD nhận cùng một điểm làm trung điểm.

D. $ABCD$ là hình bình hành.

Câu 13. Cho các véc-tơ như hình vẽ. Có bao nhiêu cặp véc-tơ cùng phương xuất hiện trong hình?



A. 8.

B. 3.

C. 7.

D. 6.

Câu 14. Cho tam giác ABC , gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và AC . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

B. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.

C. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương.

D. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BN}$ cùng phương.

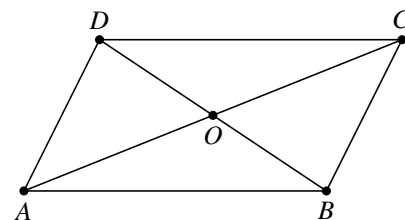
Câu 15. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

B. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$.

C. $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$.

D. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.



Câu 16. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai véc-tơ nào ngược hướng?

A. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DB}$.

B. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$.

D. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$.

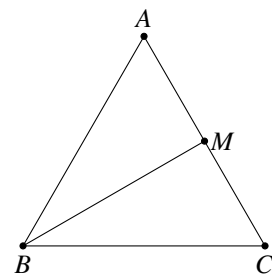
Câu 17. Cho tam giác đều ABC cạnh a , có trung tuyến BM . Độ dài của $\overrightarrow{BM}$ là

A. $a\sqrt{3}$.

B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Câu 18. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 1, trọng tâm G . Độ dài véc-tơ $\overrightarrow{AG}$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

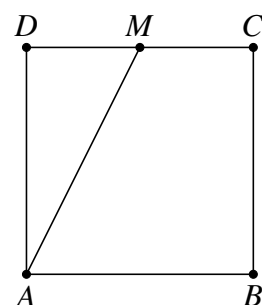
Câu 19. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của CD . Tính độ lớn của véc-tơ $\overrightarrow{AM}$.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

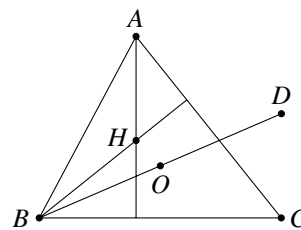
C. $\frac{3a}{2}$.

D. $\frac{5a}{2}$.



Câu 20. Cho tam giác ABC có trực tâm H , gọi D là điểm đối xứng của B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tiếp tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ và $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$.
- B. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.
- C. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$.
- D. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CH}$.



—HẾT—

Bài 2

TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

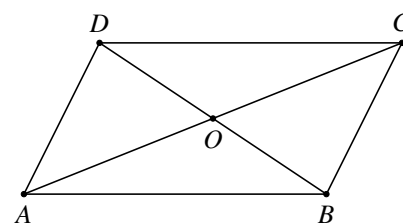
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Vectơ bằng nhau, vectơ đối nhau

- Hai vectơ bằng nhau nếu chúng có cùng **độ lớn** và **cùng hướng**.
- Hai vectơ đối nhau nếu chúng có cùng **độ lớn** nhưng **ngược hướng**.

Ví dụ: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O , ta có vài kết quả sau

- Các vectơ bằng nhau: $\vec{AB} = \vec{DC}$; $\vec{AD} = \vec{BC}$; $\vec{AO} = \vec{OC}$; $\vec{DO} = \vec{OB}$,...
- Các vectơ đối nhau: $\vec{AB}$ đối $\vec{CD}$; $\vec{BC}$ đối $\vec{DA}$; $\vec{OA}$ đối $\vec{OC}$; $\vec{OB}$ đối $\vec{OD}$,...



Hình 1

2. Phép toán cộng hai vectơ

Phép cộng hai vectơ có tính chất giao hoán. Khi thực hiện phép toán cộng hai vectơ, ta chú ý các quy tắc sau

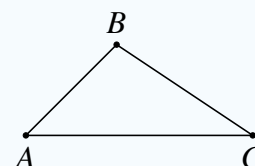
⚙ Quy tắc 3 điểm:

Với ba điểm A, B, C bất kì, ta luôn có $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

- Dấu hiệu nhận biết là "điểm liên tiếp nhau".
- Các hệ thức tương tự

$$\vec{BA} + \vec{AC} = \vec{BC}$$

$$\vec{CB} + \vec{BA} = \vec{CA}$$



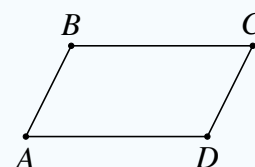
⚙ Quy tắc hình bình hành:

Xét hình bình hành $ABCD$, ta luôn có $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$

- Dấu hiệu nhận biết là "cùng gốc".
- Các hệ thức tương tự

$$\vec{BA} + \vec{BC} = \vec{BD}$$

$$\vec{CB} + \vec{CD} = \vec{CA}$$



⚙ Quy tắc cộng vectơ đối:

- Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đối nhau thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.
- Trong Hình 1 ở trên, ta có

$$\vec{AD} + \vec{CB} = \vec{0}$$

$$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{0}$$

$$\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{0}$$

Tính chất: Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tùy ý

- Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- Tính chất của vectơ-không: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

3. Phép toán hiệu hai vectơ

⚙ Vectơ đối:

- Vectơ đối của $\vec{a}$ kí hiệu là $-\vec{a}$.
- Vectơ đối của $\vec{AB}$ là $\vec{BA}$, nghĩa là $-\vec{AB} = \vec{BA}$ (dùng để làm mất dấu trừ trước vectơ).
- Vectơ $\vec{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó.

⚙ **Quy tắc trừ:** Với ba điểm A, B, C bất kì, ta luôn có $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$

4. Công thức trung điểm, trọng tâm

⚙ Công thức trung điểm:

- Nếu M là trung điểm của đoạn AB thì $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}$.
- Tương tự $\vec{AM} + \vec{BM} = \vec{0}$.

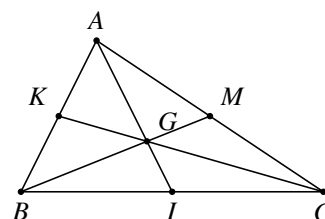


⚙ Công thức trọng tâm:

- Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}.$$

- Tương tự $\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} = \vec{0}$.



B RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN

KN

1

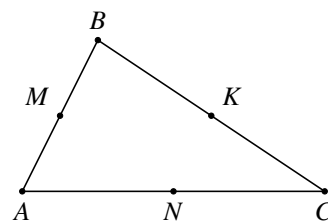
Thực hiện phép toán cộng, trừ hai vectơ

- ⚙ Nếu hai vectơ được sắp xếp thỏa mãn một trong các quy tắc (ba điểm, hình bình hành, vectơ đối), thì ta tiến hành phép cộng theo quy tắc tương ứng.
- ⚙ Nếu hai vectơ được sắp xếp chưa thỏa mãn quy tắc (điểm chưa liên tiếp, chưa cùng gốc), thì ta tiến hành dời;
 - Để không cho hình vẽ (điểm bất kì), ta dùng quy tắc 3 điểm để chèn điểm vào.
 - Để cho hình vẽ (tam giác, hình bình hành,...), ta dùng vectơ bằng nhau, thay vectơ này bởi vectơ khác bằng với nó sao cho có thể ghép được "quy tắc cộng" với các vectơ còn lại.

Ví dụ 1.

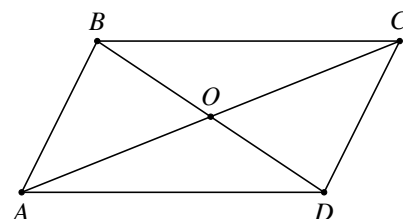
Cho tam giác ABC . Các điểm M, N và K lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC .

- Tìm các vectơ bằng với $\overrightarrow{MK}$.
- Tìm các vectơ đối của $\overrightarrow{MN}$.
- Xác định các vectơ $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NK}$; $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{KN}$; $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$; $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC}$; $\overrightarrow{BK} - \overrightarrow{CK}$.

**Ví dụ 2.**

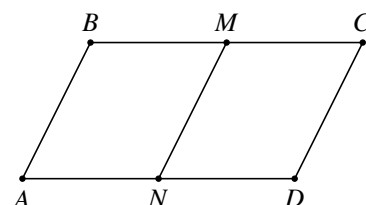
Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O .

- Tìm vectơ bằng với $\overrightarrow{OC}$.
- Xác định các vectơ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DC}$.

**Ví dụ 3.**

Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Xác định vectơ

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}, & \quad \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}, \\ \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CM}, & \quad \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC}. \end{aligned}$$

**KN****2****Chứng minh một đẳng thức vectơ**

Ta thường dùng một trong hai cách sau:

- Thực hiện các phép toán, biến đổi đẳng thức cần chứng minh đi đến một kết quả hiển nhiên đúng.
- Biến đổi vế phức tạp thành vế đơn giản (biến vế trái thành vế phải hoặc ngược lại)

Ví dụ 4. Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh các đẳng thức sau:

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$;
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$;
- $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$;
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.

Ví dụ 5. Cho năm điểm A, B, C, D, E . Chứng minh rằng

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$;
- $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$.

Ví dụ 6. Cho các sáu điểm A, B, C, D, E, F . Chứng minh rằng

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$;
- $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$;
- $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$;
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED} = \vec{0}$.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các hình bình hành $ABEF$, $ACPQ$, $BCIJ$. Chứng minh $\vec{EJ} + \vec{IP} + \vec{QF} = \vec{0}$.

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM .

- Chứng minh $\vec{MA} - \vec{BA} + \vec{AC} - \vec{AM} = \vec{0}$;
- Trên cạnh AC lấy hai điểm E và F sao cho $AE = EF = FC$; BE cắt AM tại N . Chứng minh $\vec{NA}$ và $\vec{NM}$ là hai vec tơ đối nhau.

Ví dụ 9. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng $\vec{MQ} = \vec{NP}$.

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA và AB ; O là một điểm bất kì. Chứng minh rằng

- $\vec{BM} + \vec{CN} + \vec{AP} = \vec{0}$;
- $\vec{AP} + \vec{AN} - \vec{AC} + \vec{BM} = \vec{0}$;
- $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}$.

Ví dụ 11. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O ; M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh

- $\vec{BA} + \vec{DA} + \vec{AC} = \vec{0}$;
- $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$;
- $\vec{OA} + \vec{DC} = \vec{CO} - \vec{CD}$;
- $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD}$.

Ví dụ 12. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và AD . Chứng minh rằng

- $\vec{AM} + \vec{AN} = \vec{AB} + \vec{AD}$;
- $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$;
- $\vec{OB} + \vec{AD} = \vec{AC} + \vec{OA}$;
- $\vec{ND} - \vec{AB} = \vec{BC} - \vec{AM}$.

KN

3

Tìm độ dài vectơ

Định nghĩa: Độ dài của vectơ $\vec{AB}$, kí hiệu là $|\vec{AB}|$. Ta có $|\vec{AB}| = AB$ (1).

Chú ý:

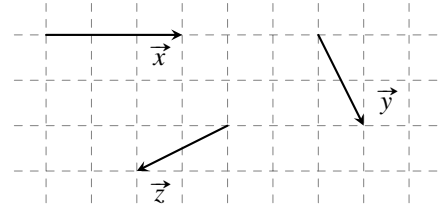
- Nếu đề cho tính độ dài của một vectơ là tổng (hiệu) của nhiều vectơ khác, trước tiên ta sử dụng các quy tắc để tính toán tổng các vec tơ đó về 1 vec tơ, rồi áp dụng công thức (1).
- Các công thức tính toán cần nhớ:

* Đường cao trong tam giác đều bằng $\boxed{\text{cạnh} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

* Đường chéo của hình vuông bằng $\boxed{\text{cạnh} \cdot \sqrt{2}}$.

Ví dụ 13.

Cho ba véc tơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ được minh họa như hình bên dưới. Tính độ lớn của véc tơ tổng $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$, giả sử mỗi ô vuông có kích thước 1 cm x 1 cm.

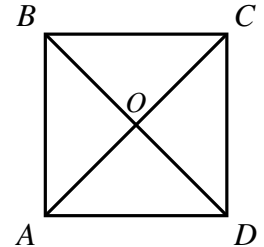
**Ví dụ 14.**

Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh bằng a . Tính

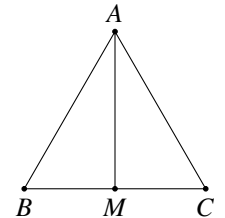
a) $|\vec{AB} + \vec{BC}|$.

b) $|\vec{AB} - \vec{AC}|$.

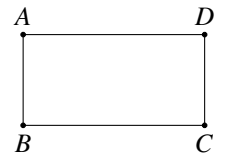
c) $|\vec{AB} + \vec{OD} - \vec{BC}|$.

**Ví dụ 15.**

Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a . Tính độ dài véc-tơ $\vec{AB} - \vec{AC}$, $\vec{AB} + \vec{AC}$ theo a .

**Ví dụ 16.**

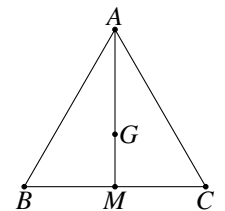
Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4$, $BC = 3$. Tính $|\vec{AB} + \vec{AD}|$, $|\vec{AB} - \vec{AC}|$.

**C VẬN DỤNG, THỰC TIỄN****KN****4****Tổng hợp tính toán nâng cao****Ví dụ 17.**

Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a , trọng tâm G .

a) Tính độ dài véc-tơ $\vec{AB} + \vec{AG}$ theo a .

b) Tính độ dài véc-tơ $\vec{AB} - \vec{GC}$ theo a .



Ví dụ 18. Cho hình thang vuông $ABCD$, vuông tại A và D . Biết $AB = AD = 2$ cm, $CD = 4$ cm. Tính độ dài véc-tơ $\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC}$.

Ví dụ 19. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , d là đường thẳng qua A , song song với BD . Gọi M là điểm thuộc đường thẳng d sao cho $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MD}|$ nhỏ nhất. Tính theo a độ dài véc-tơ $\vec{MD}$.

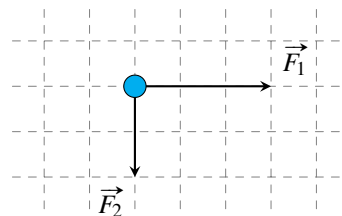
KN 5 Ứng dụng của vectơ trong vật lý

Phép cộng vectơ tương ứng với các quy tắc tổng hợp lực, tổng hợp vận tốc:

- Nếu hai lực cùng tác động vào chất điểm A và được biểu diễn bởi các vectơ $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ thì hợp lực tác động vào A được biểu diễn bởi vectơ $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$.
- Nếu một con thuyền di chuyển trên sông với vận tốc riêng (vận tốc so với dòng nước) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v}_r$ và vận tốc của dòng nước (so với bờ) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v}_n$ thì vận tốc thực tế của thuyền (so với bờ) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v}_r + \vec{v}_n$.

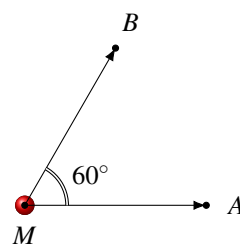
Ví dụ 20.

Cho hai lực đồng quy $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ như hình vẽ. Biết độ lớn của $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ lần lượt là 3N và 2N. Tính độ lớn hợp lực của $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$.



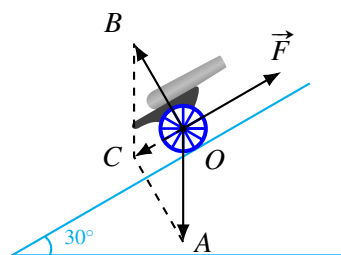
Ví dụ 21.

Cho hai lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}, \vec{F}_2 = \vec{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều bằng 300 (N) và $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.



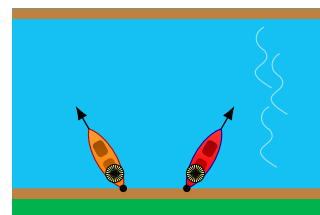
Ví dụ 22.

Tính lực kéo cần thiết để kéo một khẩu pháo có trọng lượng 22 148 N (xấp xỉ 2 260 kg) lên một con dốc nghiêng 30° so với phương nằm ngang (hình bên). Nếu lực kéo của mỗi người bằng 100 N thì cần tối thiểu bao nhiêu người để kéo pháo (bỏ qua ma sát trượt giữa bánh xe và mặt phẳng nghiêng)?



Ví dụ 23.

Hai con tàu xuất phát cùng lúc từ bờ bên này để sang bờ bên kia của dòng sông (hai bờ song song nhau) với vận tốc riêng không đổi và có độ lớn bằng nhau. Hai tàu luôn giữ lái sao cho chúng tạo với bờ cùng một góc nhọn nhưng một tàu hướng xuống hạ lưu, một tàu hướng lên thượng nguồn. Vận tốc dòng nước là đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng tới vận tốc của các tàu. Hỏi tàu nào sang bờ bên kia trước?



D BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O và điểm M tùy ý. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA}$.

c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$.

d) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$.

e) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$.

f) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

2 Cho 7 điểm A, B, C, D, E, F, G . Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$.

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{GF}$.

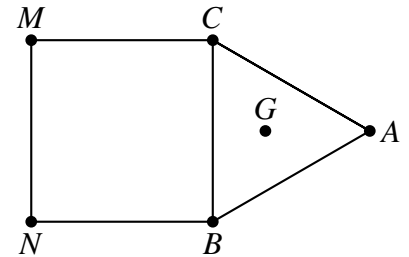
c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED} = \vec{0}$.

3 Cho 8 điểm A, B, C, D, E, F, G, H . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{HF}$.

4 Cho hai tam giác ABC và AEF có cùng trọng tâm G . Chứng minh $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FC}$.

5 Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Tính $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}|$ theo a .

6 Cho tam giác ABC đều cạnh a , dựng hình vuông $BCM N$ như hình vẽ. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Tính theo a độ dài véc-tơ $\vec{u} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}$.



7 Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC = 12$. Tính độ dài của vectơ tổng $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

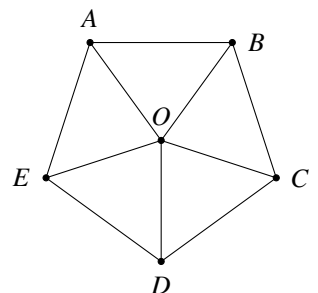
8 Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi H là trực tâm của $\triangle ABC$, B' là điểm đối xứng với B qua O . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$.

9 Cho hai tam giác ABC và AEF có cùng trọng tâm G . Chứng minh $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FC}$.

10 Cho hình chữ nhật $ABCD$, kẻ $AH \perp BD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DH và BC . Kẻ $BK \perp AM$ và cắt AH tại E . Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EB}$.

11 Cho ngũ giác đều $ABCDE$ có tâm O . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}.$$



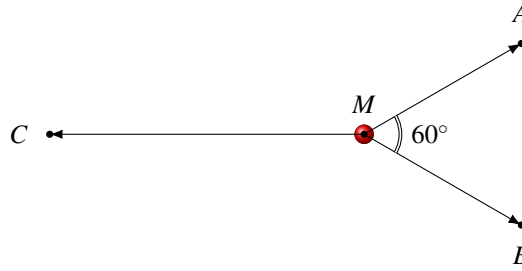
- 12 Cho $\triangle ABC$. Vẽ D đối xứng với A qua B , E đối xứng với B qua C và F đối xứng với C qua A . Gọi G là giao điểm giữa trung tuyến AM của $\triangle ABC$ với trung tuyến DN của $\triangle DEF$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của GA và GD . Chứng minh

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NM}$.

b) $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{NI}$.

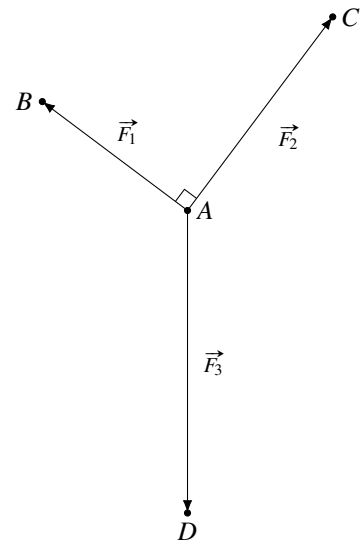
- 13 Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 1 m. Gọi M là trung điểm của AB , P, Q, R theo thứ tự là các điểm thay đổi thuộc các cạnh BC, CA, AD sao cho $\widehat{PMR}$ vuông. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR}|$.

- 14 Cho ba lực $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{MC}$ cùng điểm đặt M , cùng tác động vào một vật và vật đó đứng yên (như hình vẽ).



Biết cường độ của $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều bằng 30 N và $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Tính cường độ của lực $\overrightarrow{F_3}$.

- 15 Trên hình bên biểu diễn ba lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ cùng tác động vào vật ở vị trí cân bằng A. Cho biết $|\overrightarrow{F_1}| = 30N$, $|\overrightarrow{F_2}| = 40N$. Tính cường độ của lực $\overrightarrow{F_3}$.



E BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. C. $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$. D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

Câu 2. Cho hai điểm A và B phân biệt. Điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB là

- A. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$. B. $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$. C. $IA = IB$. D. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Câu 3. Cho ba điểm bất kỳ A, B, C . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CA}$. B. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$. C. $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}$.

Câu 4. Cho 4 điểm bất kỳ A, B, C, O . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$. B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$. C. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO}$. D. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$.

Câu 5. Cho véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$. Với điểm O bất kỳ, dựng véc-tơ $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$. Chọn mệnh đề đúng.

- A. A là trung điểm đoạn OB .
C. B là trung điểm đoạn OA .

- B. $\vec{OA} = \vec{OB}$.
D. O là trung điểm đoạn AB .

Câu 6. Cho ba điểm A, B, C bất kỳ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\vec{CB} = \vec{CA} + \vec{AB}$. B. $\vec{BC} = \vec{AB} - \vec{AC}$. C. $\vec{AC} = \vec{CB} + \vec{BA}$. D. $\vec{CA} - \vec{CB} = \vec{AB}$.

Câu 7. Tổng $\vec{NM} + \vec{PQ} + \vec{RN} + \vec{QR}$ bằng

- A. $\vec{MP}$. B. $\vec{PM}$. C. $\vec{MQ}$. D. $\vec{MN}$.

Câu 8. Cho ba điểm M, N, P phân biệt. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

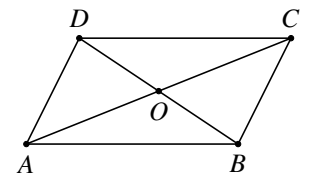
- A. $\vec{MP} - \vec{MN} = \vec{NP}$. B. $\vec{NM} + \vec{PM} = \vec{NP}$. C. $\vec{NM} - \vec{NP} = \vec{PM}$. D. $\vec{PM} + \vec{MN} = \vec{PN}$.

Câu 9. Nếu $\vec{MN}$ là một véc-tơ cho trước thì với điểm O bất kỳ ta luôn có

- A. $\vec{MN} = \vec{OM} + \vec{ON}$. B. $\vec{MN} = \vec{OM} - \vec{ON}$. C. $\vec{MN} = \vec{NO} - \vec{MO}$. D. $\vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM}$.

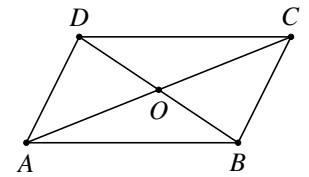
Câu 10. Cho O là tâm của hình bình hành $ABCD$. Hỏi véc-tơ $\vec{AO} - \vec{DO}$ bằng véc-tơ nào dưới đây?

- A. $\vec{DC}$. B. $\vec{BA}$. C. $\vec{BC}$. D. $\vec{AC}$.



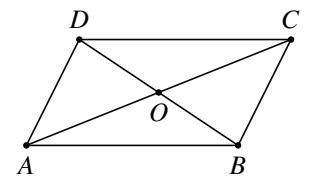
Câu 11. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Khi đó $\vec{OA} + \vec{BO}$ bằng

- A. $\vec{OC} + \vec{DO}$. B. $\vec{CD}$. C. $\vec{OC} + \vec{OB}$. D. $\vec{AB}$.



Câu 12. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{0}$. B. $\vec{OA} - \vec{OC} = \vec{0}$.
C. $\vec{OA} + \vec{CO} = \vec{0}$. D. $\vec{AO} + \vec{OC} = \vec{0}$.



Câu 13. Cho hình bình hành $ABCD$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

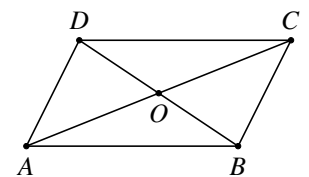
- A. $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{BD}$. B. $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$. C. $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{BC}$. D. $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{CD}$.

Câu 14. Cho hình bình hành $ABCD$. Tính tổng $\vec{BC} + \vec{DA}$.

- A. $\vec{AC}$. B. $\vec{CD}$. C. $\vec{0}$. D. $\vec{BD}$.

Câu 15. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O , G là trọng tâm tam giác BCD . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A. $\vec{GC} + 2\vec{GO} = \vec{0}$. B. $\vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$.
C. $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{CA}$. D. $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{0}$.



Câu 16. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A. $\vec{BC} - \vec{BA} = \vec{DC} - \vec{DA}$. B. $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DB}$.
C. $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{OD} - \vec{OA}$. D. $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{CD}$.

Câu 17. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A. $|\vec{BO} - \vec{DO}| = AC$. B. $\vec{AO} + \vec{DO} = \vec{CD}$. C. $\vec{DA} + \vec{OC} = \vec{OB}$. D. $\vec{AB} = \vec{DC}$.

Câu 18. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O . Tính độ dài của véc-tơ $\vec{OA} + \vec{OB}$.

- A. a . B. $2a$. C. $\frac{a}{2}$. D. $3a$.

Câu 19. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4a$ và $AD = 3a$. Độ dài của véc-tơ $\vec{BA} + \vec{DA}$ bằng

- A. $7a$. B. $6a$. C. $5a$. D. $2a\sqrt{3}$.

Câu 20. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Khi đó $|\vec{AB} + \vec{AC}|$ bằng

- A. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2a$. B. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = a\sqrt{3}$. C. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = a$. D. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 21. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 4a$ và $AD = 3a$. Tính $T = |\vec{AD} - \vec{AB}|$.

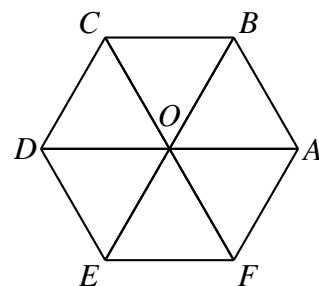
- A. $T = a$. B. $T = 5a$. C. $T = 7a$. D. $T = 25a^2$.

Câu 22. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{BC} - \vec{CD}$. B. $|\vec{AB} + \vec{AD}| = |\vec{CB} + \vec{CD}|$.
C. $\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{CB} + \vec{CD}$. D. $\vec{AD} - \vec{AC} = \vec{CD}$.

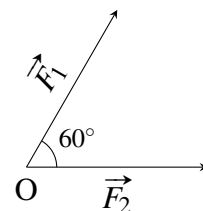
Câu 23. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Véc-tơ $\vec{v} = \vec{AF} + \vec{BC} + \vec{DE}$ bằng véc-tơ nào dưới đây?

- A. $\vec{CF}$. B. $\vec{DA}$.
C. $\vec{0}$. D. $\vec{BE}$.



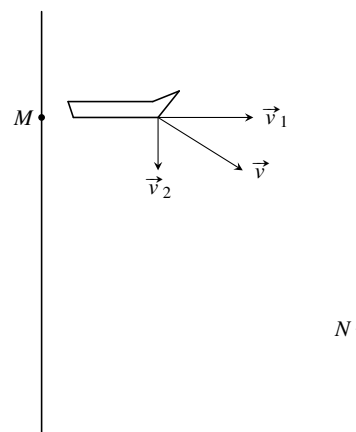
Câu 24. Cho hai lực $F_1 = F_2 = 100N$, có điểm đặt tại O và tạo với nhau góc 60° . Cường độ lực tổng hợp của hai lực ấy bằng bao nhiêu?

- A. $100\sqrt{3}$ N. B. 100 N. C. $50\sqrt{3}$ N. D. 200 N.



Câu 25. Người ta thiết kế một bến phà như hình vẽ bên. Khi phà di chuyển từ bờ M sang bờ N với vận tốc $v_1 = 10$ m/s theo hướng vuông góc với bờ, do nước chảy với vận tốc $v_2 = 6$ m/s cùng phương với bờ nên phà sẽ đi theo hướng của véc-tơ $\vec{v}$ là véc-tơ tổng của hai véc-tơ $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$. Hãy tính vận tốc v của phà khi đi từ bờ M sang bờ N .

- A. $v = 8$ m/s. B. $v = 4$ m/s.
C. $v = 2\sqrt{34}$ m/s. D. $v = 16$ m/s.



—HẾT—

Bài 3

TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ THỰC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

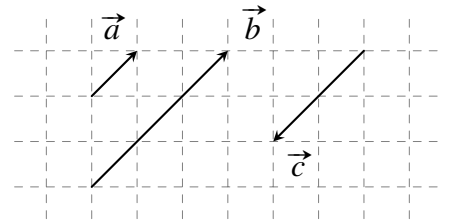
Cho số thực $k \neq 0$ và $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Tích của vec tơ $\vec{a}$ với số thực $k > 0$ là một vec tơ, kí hiệu $k\vec{a}$, **cùng hướng** với $\vec{a}$ và có độ dài bằng $k|\vec{a}|$

Tích của vec tơ $\vec{a}$ với số thực $k < 0$ là một vec tơ, kí hiệu $k\vec{a}$, **ngược hướng** với $\vec{a}$ và có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$

Ví dụ: Theo hình vẽ bên, thì $\vec{b} = 3\vec{a}$; $\vec{c} = -2\vec{a}$; $\vec{c} = -\frac{2}{3}\vec{b}$.

! Quy ước: $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.



2. Điều kiện để hai vectơ cùng phương

- ① Điều kiện cần và đủ để $\vec{a}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương là có một số thực k để $\vec{a} = k\vec{b}$.
- ② Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi có số thực k để $\vec{AB} = k\vec{AC}$.

3. Tính chất

Với hai vec tơ $\vec{a}, \vec{b}$ và hai số thực k, t ta luôn có

- $k(t\vec{a}) = (k \cdot t)\vec{a}$.
- $(k+t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$.
- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.
- $k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$.
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.
- $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.

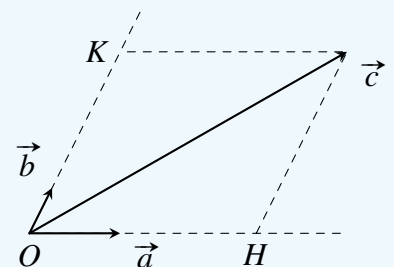
4. Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó mọi vectơ $\vec{c}$ đều phân tích được một cách duy nhất theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số h, k sao cho $\vec{c} = h\vec{a} + k\vec{b}$

- Theo quy tắc hình bình hành, ta có

$$\vec{c} = \vec{OH} + \vec{OK}$$

- Giả sử $\vec{OH} = h\vec{a}$ và $\vec{OK} = k\vec{b}$ thì $\vec{c} = h\vec{a} + k\vec{b}$.



KN

1

So sánh hai vectơ theo tỉ số k tương ứng

✍ Muốn so sánh được 2 vectơ theo một tỉ số $k \neq 0$ tương ứng thì giá của hai véc tơ đó phải song song hoặc trùng nhau.

✍ Xét hai vectơ cùng phương $\vec{AB}$ và $\vec{CD}$.

- Bước 1. Tính tỉ lệ đoạn thẳng $\frac{AB}{CD} = m$.
- Bước 2. Xem xét, nếu
 - $\vec{AB}$ cùng hướng với $\vec{CD}$ thì $\vec{AB} = m\vec{CD}$.
 - $\vec{AB}$ ngược hướng với $\vec{CD}$ thì $\vec{AB} = -m\vec{CD}$.

≡ **Ví dụ 1.** Cho đoạn thẳng AB và M là trung điểm của đoạn AB . Tìm số k trong các đẳng thức sau:

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| a) $\vec{AB} = k\vec{MB}$. | b) $\vec{MA} = k\vec{MB}$. |
| c) $\vec{MA} = k\vec{AB}$. | d) $\vec{MB} = k\vec{AB}$. |

≡ **Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi M là trung điểm của BC . Tìm số k trong các đẳng thức sau:

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| a) $\vec{AG} = k\vec{MG}$. | b) $\vec{AM} = k\vec{GA}$. |
| c) $\vec{GM} = k\vec{GA}$. | d) $\vec{GM} = k\vec{AM}$. |

KN

2

Chứng minh đẳng thức vectơ

≡ **Ví dụ 3.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Chứng minh

- | | |
|--|---|
| a) $\vec{AB} + \vec{AD} = 2\vec{AO}$; | b) $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 2\vec{AC}$; |
| c) $\vec{AB} + \vec{OD} - \frac{1}{2}\vec{AC} = \vec{0}$; | d) $\vec{GA} + \vec{GC} = \frac{1}{3}\vec{BD}$. |

≡ **Ví dụ 4.** Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O , M là điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

- | | |
|--|--|
| a) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$; | b) $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MO}$. |
|--|--|

≡ **Ví dụ 5.** Cho tam giác ABC Gọi M là trung điểm BC , D là trung điểm AM ; O là điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

- | | |
|--|--|
| a) $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM}$; | b) $\vec{BA} + \vec{BM} + 2\vec{DB} = \vec{0}$; |
| c) $2\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC} = \vec{0}$; | d) $2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 4\vec{OD}$. |

Ví dụ 6. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB, CD . Chứng minh

$$a) 2\vec{IJ} = \vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{BC};$$

$$b) \vec{AD} + \vec{BD} + \vec{AC} + \vec{BC} = 4\vec{IJ}.$$

Ví dụ 7. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC, BD . Gọi I là trung điểm MN . Chứng minh rằng

$$a) \vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0};$$

$$b) \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = 4\vec{OI}$$

Ví dụ 8. Cho ΔABC . Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm cạnh AB, BC, CA ; G là trọng tâm tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$a) \vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CK} = \vec{0};$$

$$b) \vec{AK} + \vec{CN} + \vec{BM} = \vec{0};$$

$$c) \vec{AN} + \vec{BK} + \vec{CM} = \vec{0};$$

$$d) \vec{GM} + \vec{GN} + \vec{GK} = \vec{0}.$$

Ví dụ 9. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD . Giả sử DM, BN cắt AC lần lượt tại I, K . Chứng minh

$$a) \vec{IB} + \vec{ID} + \vec{KB} + \vec{KD} = \vec{0};$$

$$b) 3\vec{IK} + \vec{AC} = \vec{0}.$$

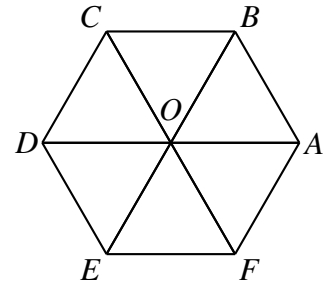
Ví dụ 10.

Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O .

$$a) \text{ Chứng minh } \vec{CD} + \vec{AO} - \vec{AB} = \vec{BE}.$$

$$b) \text{ Chứng minh } \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AE} + \vec{AF} = 2\vec{AD}.$$

$$c) \text{ Gọi } M, N, P, Q, R, S \text{ lần lượt là trung điểm của } AB, BC, CD, DE, EF, FA. \text{ Chứng minh } \vec{MN} + \vec{PQ} + \vec{RS} = \vec{0}.$$



Ví dụ 11. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của ΔABC và $\Delta A'B'C'$. Chứng minh rằng $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = 3\vec{GG'}$. Từ đây, nêu điều kiện để hai tam giác có cùng trọng tâm.

Ví dụ 12. Cho ΔABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm cạnh AB, BC, CA . Chứng minh ΔABC và ΔMNP có cùng trọng tâm.

KN

3

Phân tích (biểu diễn) một vector theo hai vector không cùng phương cho trước

Ví dụ 13. Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $\vec{MB} = -3\vec{MC}$. Phân tích vector $\vec{AM}$ theo 2 vector $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$.

Ví dụ 14. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm BC , D là trung điểm AM . Phân tích $\vec{AD}$ theo 2 vector $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$.

Ví dụ 15. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Gọi I là trung điểm BO . Phân tích vectơ $\overrightarrow{AI}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

Ví dụ 16. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và I là giao điểm của AD và EF .

- Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}$ theo $\overrightarrow{AE}$ và $\overrightarrow{AF}$.
- Phân tích $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{GC}$ theo $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GB}$.

Ví dụ 17. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA . Đặt $\overrightarrow{AN} = \vec{a}, \overrightarrow{BK} = \vec{b}$. Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ theo $\vec{a}, \vec{b}$.

Ví dụ 18. Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MC}$. Chứng minh $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Ví dụ 19. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm cạnh AB và N là điểm trên đoạn AC sao cho $NA = 2NC$, K là trung điểm của MN .

- Phân tích $\overrightarrow{AK}$ theo 2 vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
- Chứng minh $\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BN} + 3\overrightarrow{NM} = \vec{0}$.

KN

4

Tìm điều kiện hoặc chứng minh tính chất song song, thẳng hàng

Ví dụ 20. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm của cạnh BC . Các điểm D, E thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$. Chứng minh $DE \parallel AM$.

Ví dụ 21. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa: $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AD}$. Chứng minh B, C, D thẳng hàng.

Ví dụ 22. Cho hình bình hành $ABCD$, tâm O . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD và P là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$. Chứng minh 3 điểm B, P, N thẳng hàng.

Ví dụ 23. Cho hình bình hành $ABCD$ có G là trọng tâm $\triangle BMN$. Gọi M, N là điểm sao cho $\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{ND} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

- Phân tích $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AG}$ theo 2 vectơ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ và $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.
- Gọi I là điểm trên BC sao cho $\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BC}$. Tìm k để A, G, I thẳng hàng.

KN

5

Xác định điểm thỏa mãn một đẳng thức vector cho trước

Ví dụ 24. Cho tam giác ABC . Hãy xác định điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

≡ Ví dụ 25. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I , M là điểm tùy ý không nằm trên đường thẳng AB . Trên MI kéo dài, lấy một điểm N sao cho $IN = MI$.

- a) Chứng minh $\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MB}$.
 b) Tìm các điểm D, C sao cho $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NI} = \overrightarrow{ND}$; $\overrightarrow{NM} - \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC}$.

≡ Ví dụ 26. Cho hình bình hành $ABCD$.

- a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.
 b) Xác định điểm M thỏa mãn điều kiện $3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

≡ Ví dụ 27. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC .

- a) Chứng minh $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.
 b) Xác định điểm O sao cho $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

≡ Ví dụ 28. Cho tam giác ABC . Hãy xác định các điểm I, J, K, L thỏa các đẳng thức sau

- a) $2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{BC}$.
 b) $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$.
 c) $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{BC}$.
 d) $\overrightarrow{LA} - 2\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

≡ Ví dụ 29. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Hãy xác định các điểm I, F, K thỏa các đẳng thức sau

- a) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{ID}$.
 b) $2\overrightarrow{FA} + 2\overrightarrow{FB} = 3\overrightarrow{FC} - \overrightarrow{FD}$.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AC, BD . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$.
- Cho tam giác ABC . Gọi A' là điểm đối xứng của B qua A , B' là điểm đối xứng của C qua B , C' là điểm đối xứng của A qua C . Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$ với O là điểm bất kỳ.
- Cho tam giác ABC . Gọi E là trung điểm đoạn BC . Các điểm M, N theo thứ tự đó nằm trên các cạnh BC sao cho E là trung điểm đoạn MN . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$.
- Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , lấy điểm M tùy ý. Chứng minh các véc-tơ sau đây không đổi và tính độ dài của chúng.
 a) $\vec{u} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$;
 b) $\vec{v} = 4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$.
- Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn là AB . Gọi M, N theo thứ tự là các trung điểm của AD và BC .
 a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.
 b) Chứng minh $MN \parallel DC$.

- 6 Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Gọi M là trung điểm của BC và I là điểm thỏa mãn hệ thức $4\vec{CI} + \vec{AC} = \vec{0}$. Chứng minh $MI \parallel BG$.
- 7 Cho tam giác ABC và các điểm M, N xác định bởi $\vec{BM} = \vec{BC} - 2\vec{AB}$ và $\vec{CN} = -\frac{1}{2}\vec{AC} - \vec{BC}$. Chứng minh ba điểm A, M, N thẳng hàng.
- 8 Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Hãy biểu diễn các véc-tơ $\vec{AC}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{DA}$ theo hai véc-tơ $\vec{AO}, \vec{BO}$.
- 9 Cho tam giác ABC và các điểm J, K lần lượt thỏa mãn $\vec{JA} + 4\vec{JC} = \vec{0}; \vec{CB} = -\frac{3}{4}\vec{BK}$.
- a) Biểu diễn $\vec{JK}$ theo $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$.
- b) Gọi I là trung điểm AB . Chứng minh I, J, K thẳng hàng.
- 10 Cho $\triangle ABC$. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$ và J là điểm trên BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$. Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$.
- a) Tính $\vec{AI}, \vec{AJ}$ theo $\vec{AB}, \vec{AC}$.
- b) Tính $\vec{AG}$ theo $\vec{AI}$ và $\vec{AJ}$.
- 11 Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD và P là điểm thỏa mãn hệ thức $\vec{OP} = -\frac{1}{3}\vec{OA}$.
- a) Chứng minh rằng $3\vec{AP} - 2\vec{AC} = \vec{0}$
- b) Chứng minh 3 điểm B, P, N thẳng hàng.
- c) Chứng minh 3 đường AC, BD và MN đồng quy.
- 12 Cho ABC, M là trung điểm của cạnh AB và D, E, F theo thứ tự được xác định bởi các hệ thức $3\vec{DB} - 2\vec{DC} = \vec{0}, \vec{EA} + 3\vec{EB} - 2\vec{EC} = \vec{0}, 5\vec{AF} - 2\vec{AC} = \vec{0}$.
- a) Chứng minh rằng $EM \parallel BC$.
- b) Chứng minh rằng ba điểm A, D, E thẳng hàng.
- c) Chứng minh rằng ba đường thẳng AD, BC, MF đồng quy tại một điểm.
- 13 Cho đoạn AB . Trên đoạn AB lấy điểm C sao cho $\frac{CA}{CB} = \frac{m}{n}$ và S là điểm bất kì. Chứng minh rằng
- $$\vec{SC} = \frac{n}{m+n}\vec{SA} + \frac{m}{m+n}\vec{SB}.$$
- 14 Cho $\triangle ABC$. Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Gọi K, D lần lượt là trung điểm của MN và BC . Chứng minh rằng
- a) $\vec{AK} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}$.
- b) $\vec{KD} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$.
- 15 Cho tam giác ABC có G là trọng tâm tam giác và I là điểm đối xứng của B qua G, M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng:
- a) $2\vec{AC} - \vec{AB} = 3\vec{AI}$.
- b) $2\vec{AB} + 3\vec{AC} = 6\vec{IC}$.
- c) $\vec{AC} - 5\vec{AB} = 6\vec{MI}$.

- 16 Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm nằm trên cạnh BC . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- 17 Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC , H là trực tâm, O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác. Chứng minh rằng
- a) $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$. b) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$.
- 18 Cho lục giác $ABCDEF$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, CD, EF .
- a) Chứng minh $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF})$ với I bất kì.
- b) Hãy tìm điểm G sao cho $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = \vec{0}$.
- c) Gọi $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$ tương ứng là trọng tâm của $\triangle ABC, \triangle DEF, \triangle BCD, \triangle EFA, \triangle CDE, \triangle FAB$. Chứng minh rằng G_1G_2, G_3G_4, G_5G_6 cùng đồng qui tại một điểm.

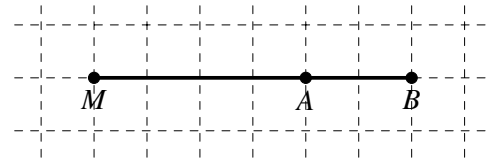
D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho vec tơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Xét vec tơ $-3\vec{a}$, khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- A. $-3\vec{a}$ cùng phương với $\vec{a}$. B. $-3\vec{a}$ cùng hướng với $-3\vec{a}$.
C. $|-3\vec{a}| = 3|\vec{a}|$. D. $-3\vec{a}$ có giá trị trùng với $\vec{a}$.

Câu 2. Cho ba điểm A, B, M được xác định như hình bên. Tìm đẳng thức đúng.

- A. $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MB}$. B. $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB}$.
C. $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$. D. $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MB}$.



Câu 3. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là các vec-tơ khác $\vec{0}$ sao cho $\vec{a} = \frac{2018}{2019}\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $|\vec{a}| = \left|\frac{2018}{2019}\vec{b}\right|$. B. $\vec{a}$ và $-\vec{b}$ ngược hướng.
C. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương. D. $|\vec{a}| > |\vec{b}|$.

Câu 4. Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Nếu $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ thì đẳng thức nào dưới đây đúng?

- A. $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AC}$. C. $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{AC}$.

Câu 5. Cho I là trung điểm của đoạn AB . Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

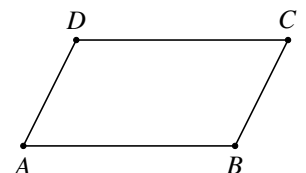
- A. $IA + IB = 0$. B. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. C. $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{IB}$. D. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$.

Câu 6. Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Điều kiện cần và đủ để ba điểm A, B, C thẳng hàng là

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.
C. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương. D. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

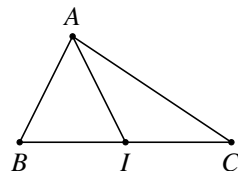
Câu 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$. B. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$.
C. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. D. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.



Câu 8. Cho G là trọng tâm tam giác ABC , gọi I là trung điểm của BC . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

- A. $\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GI}$.
 B. $\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{GA}$.
 C. $\vec{GA} = 2\vec{GI}$.
 D. $\vec{IG} = -\frac{1}{3}\vec{IA}$.



Câu 9. Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm và M là trung điểm của BC . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GM}$.
 B. $\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AG}$.
 C. $\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GA}$.
 D. $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AG}$.

Câu 10. Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GA}$.
 B. $3\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AC}$.
 C. $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.
 D. $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$, $\forall M$.

Câu 11. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. $2\vec{AM} = 2\vec{AB} + \vec{BC}$.
 B. $2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC}$.
 C. $2\vec{AM} = 2\vec{AC} + \vec{BC}$.
 D. $2\vec{AM} = 2\vec{AC} - \vec{BC}$.

Câu 12. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , $AB = a$. Tính độ dài véc-tơ $\vec{AB} + 4\vec{AC}$.

- A. $17a$.
 B. $\sqrt{17}a$.
 C. $5a$.
 D. $\sqrt{20}a$.

Câu 13. Cho tam giác ABC . Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và M là trung điểm của BC . Tìm mệnh đề đúng?

- A. $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AM}$.
 B. $\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GA}$.
 C. $\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GM}$.
 D. $\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{GA}$.

Câu 14. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của AC và BD . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $\vec{OB} + \vec{OA} = \vec{DA}$.
 B. $\vec{OA} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{CB})$.
 C. $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC} + \vec{OD}$.
 D. $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$.

Câu 15. Cho $\vec{u} \neq \vec{0}$ và điểm A cố định. Tập hợp tất cả điểm M trong mặt phẳng thoả mãn $\vec{u}$ và $\vec{AM}$ cùng phương là

- A. một điểm cố định.
 B. một đường tròn.
 C. tập hợp rỗng.
 D. một đường thẳng.

Câu 16. Cho hai điểm phân biệt A, B và hai số thực α, β khác 0 thoả mãn $\alpha + \beta = 0$. Có bao nhiêu điểm M thoả mãn $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} = \vec{0}$?

- A. 1.
 B. 2.
 C. 3.
 D. 0.

Câu 17. Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của AB . Tìm điểm M thoả mãn hệ thức $\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{0}$.

- A. M là trung điểm của BC .
 B. M là trung điểm của IA .
 C. M là điểm trên cạnh IC sao cho $IM = 2MC$.
 D. M là trung điểm của IC .

Câu 18. Cho tam giác ABC , với M là trung điểm của BC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\vec{AM} + \vec{MB} + \vec{BA} = \vec{0}$.
 B. $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MC}$.
 C. $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AM}$.
 D. $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{AB}$.

Câu 19. Cho tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AB, AC . Gọi K là trung điểm của MN . Hãy biểu diễn $\vec{AK}$ theo hai véc-tơ $\vec{AB}, \vec{AC}$.

- A. $\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$.
 B. $\vec{AK} = -\frac{5}{6}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$.
 C. $\vec{AK} = -\frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}$.
 D. $\vec{AK} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}$.

Câu 20. Cho tam giác ABC với G là trọng tâm. Đặt $\vec{CA} = \vec{a}$, $\vec{CB} = \vec{b}$. Khi đó, $\vec{AG}$ được biểu diễn theo hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ là

A. $\vec{AG} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$. B. $\vec{AG} = \frac{-2\vec{a} + \vec{b}}{3}$. C. $\vec{AG} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{3}$. D. $\vec{AG} = \frac{2\vec{a} - \vec{b}}{3}$.

Câu 21. Cho tam giác ABC có trung tuyến AD . Xét các điểm M, N, P cho bởi $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB}$, $\vec{AN} = \frac{1}{4}\vec{AC}$, $\vec{AP} = k\vec{AD}$. Tìm k để M, N, P thẳng hàng.

A. $k = \frac{1}{6}$. B. $k = \frac{1}{2}$. C. $k = \frac{1}{3}$. D. $k = \frac{1}{4}$.

Câu 22. Cho tam giác ABC và điểm D thỏa mãn $\vec{AD} = m\vec{AB} + n\vec{AC}$. Điều kiện cần và đủ để điểm D thuộc đường thẳng BC là

A. $m - n = 1$. B. $mn = 1$. C. $m + n = 1$. D. $m = n = \frac{1}{2}$.

Câu 23. Cho tam giác vuông cân OAB với $OA = OB = a$. Độ dài của $\vec{u} = \frac{21}{4}\vec{OA} + \frac{5}{2}\vec{OB}$ là

A. $\frac{\sqrt{140}}{4}a$. B. $\frac{\sqrt{541}}{4}a$. C. $\frac{\sqrt{520}}{4}a$. D. $\frac{\sqrt{321}}{4}a$.

Câu 24. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng $2a$. Gọi AH là đường cao của tam giác ABC . Khi đó $|\vec{AB} + \vec{HC}|$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. a . C. $a\sqrt{3}$. D. $2a$.

Câu 25. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G , H là chân đường cao kẻ từ A sao cho $\vec{BH} = \frac{1}{3}\vec{HC}$. Điểm M di động trên BC sao cho $\vec{BM} = x\vec{BC}$. Tìm x sao cho $|\vec{MA} + \vec{GC}|$ nhỏ nhất.

A. $\frac{5}{6}$. B. $\frac{6}{5}$. C. $\frac{5}{4}$. D. $\frac{4}{5}$.

—HẾT—

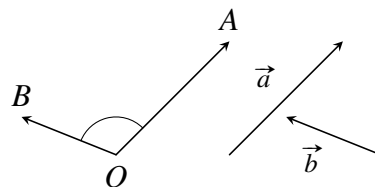
Bài 4

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Góc giữa hai véc tơ:

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\vec{OA} = \vec{a}$ và $\vec{OB} = \vec{b}$. Góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0° đến 180° được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $(\vec{a}, \vec{b})$.



- Từ định nghĩa ta có $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.
- Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.
- $\vec{a}$ cùng hướng $\vec{b}$ thì $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$; $\vec{a}$ ngược hướng $\vec{b}$ thì $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$.

Trường hợp có ít nhất $\vec{a}$ hoặc $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$ thì ta quy ước số đo góc của chúng là tùy ý (từ 0° đến 180°)

2. Tích vô hướng của hai vectơ:

Định nghĩa: Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác véc-tơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Trường hợp ít nhất một trong hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng véc-tơ $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Lưu ý:

- Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác véc-tơ $\vec{0}$ ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.
- Khi $\vec{a} = \vec{b}$ tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và số này được gọi là bình phương vô hướng của véc-tơ $\vec{a}$. Ta có:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$$

3. Tính chất của tích vô hướng:

Với ba véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì và mọi số k ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối);
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$.

KN

1

Tính tích vô hướng bằng định nghĩa

Chú ý các công thức sau đây:

$$\textcircled{1} \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\textcircled{2} \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

$$\textcircled{3} AB \text{ vuông góc với } CD \text{ khi } \vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0.$$

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$. Tính các tích vô hướng

$$\text{a) } \vec{AB} \cdot \vec{AC}.$$

$$\text{b) } \vec{AC} \cdot \vec{CB}.$$

$$\text{c) } \vec{AB} \cdot \vec{BC}.$$

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh bằng a . Tính các tích vô hướng

$$\text{a) } \vec{AB} \cdot \vec{AC}.$$

$$\text{b) } \vec{AC} \cdot \vec{CB}.$$

$$\text{c) } \vec{AB} \cdot \vec{BC}.$$

Ví dụ 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính giá trị của biểu thức sau

$$\text{a) } \vec{AB} \cdot \vec{AC}.$$

$$\text{b) } \vec{AB} \cdot \vec{CD}.$$

$$\text{c) } \vec{AC} \cdot (\vec{AB} + \vec{AD}).$$

Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 8$.

$$\text{a) Tính } \vec{AB} \cdot \vec{AC}, \text{ rồi suy ra giá trị của góc } A.$$

$$\text{b) Tính } \vec{CA} \cdot \vec{CB}.$$

$$\text{c) Gọi } D \text{ là điểm trên } CA \text{ sao cho } CD = 3. \text{ Tính } \vec{CD} \cdot \vec{CB}.$$

KN

2

Ứng dụng tích vô hướng để tính toán độ dài, tính góc

Tính độ dài: Chú ý công thức $\vec{AB}^2 = AB^2$. Khi muốn tính độ dài AB , ta phân tích vectơ $\vec{AB}$ theo hai vec tơ khác (để tính độ lớn và góc), sau đó bình phương vô hướng 2 vế.

Tính góc:

$$\textcircled{1} \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\textcircled{2} \cos A = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \cdot AC}.$$

$$\textcircled{3} AB \perp CD \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0.$$

Ví dụ 5. Cho hai vec tơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ vuông góc và có độ dài bằng 1. Tính góc giữa hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong các trường hợp sau:

$$\text{a) } \vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j}, \vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j}.$$

$$\text{b) } \vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j}, \vec{b} = \vec{i} + 7\vec{j}.$$

$$\text{c) } \vec{a} = 6\vec{i} - 8\vec{j}, \vec{b} = 12\vec{i} + 9\vec{j}.$$

$$\text{d) } \vec{a} = 2\vec{i} - 6\vec{j}, \vec{b} = 6 - 3\vec{i} + 9\vec{j}$$

Ví dụ 6. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 3a$, $AC = a$, $\hat{A} = 60^\circ$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Suy ra độ dài cạnh BC và độ dài đường trung tuyến AM .

Ví dụ 7. Cho hình vuông $ABCD$ có M là trung điểm của AB và N là trung điểm của BC . Chứng minh rằng $DM \perp AN$.

Ví dụ 8. Cho hình vuông $ABCD$ có M là trung điểm của đoạn thẳng AB và N là điểm thuộc đoạn AC sao cho $AN = 3NC$.

- Phân tích $\overrightarrow{DN}$, $\overrightarrow{MN}$ theo 2 vec-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.
- Chứng minh rằng $DN \perp MN$.

Ví dụ 9. Cho hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai vec-tơ $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc giữa hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

KN

3

Chứng minh một đẳng thức liên quan đến tích vô hướng

Ví dụ 10. Cho đoạn thẳng AB và I là trung điểm của AB . Chứng minh rằng với mỗi điểm O ta có

- $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$.
- $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2)$.

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M là điểm tùy ý. Chứng minh rằng

- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
- $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

Ví dụ 12. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD , M là điểm tùy ý. Chứng minh rằng $4\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + BD^2 = 4MO^2$.

Ví dụ 13. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$.

KN

4

Tìm tập hợp điểm

Cho A, B là các điểm cố định, M là điểm di động

- Nếu $|\overrightarrow{AM}| = k$ với k là số thực dương cho trước thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A , bán kính $R = k$.
- Nếu $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB .
- Nếu $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{a} = 0$ với $\vec{a} \neq \vec{0}$ cho trước thì tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với giá của vectơ $\vec{a}$.

Ví dụ 14. Cho hai điểm A, B cố định có độ dài bằng a , vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$. Tìm tập hợp điểm M sao cho

a) $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \frac{3a^2}{4}$

b) $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MA^2$

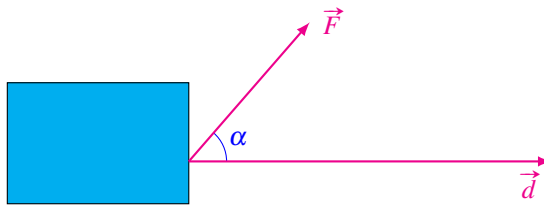
Ví dụ 15. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp điểm M sao cho $(\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{CB}) \cdot \vec{BC} = 0$.

KN**5****Ứng dụng tích vô hướng trong thực tế**

Tính công sinh ra bởi lực $\vec{F}$: Tác dụng một lực $\vec{F}$ vào một vật và làm cho vật đó dịch chuyển theo véc-tơ $\vec{d}$ thì sẽ sinh ra một công là A (đơn vị J) được tính theo công thức

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos \alpha.$$

Trong đó α là góc giữa hai véc-tơ $\vec{F}$ và $\vec{d}$.



Ví dụ 16. Tính công sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ lớn 20 N kéo một vật dịch chuyển theo một véc-tơ $\vec{d}$ có độ dài 50 m và cho biết $(\vec{F}, \vec{d}) = 60^\circ$.

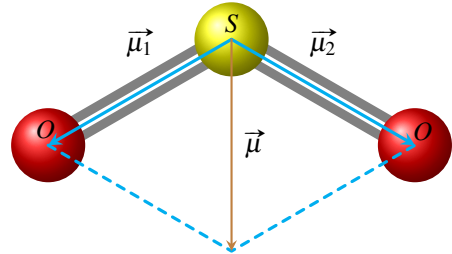
C**BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

- 1 Cho tam giác ABC có $AB = 3$ cm, $AC = 2\sqrt{2}$ cm, $\widehat{BAC} = 135^\circ$. Tính tích vô hướng $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$.
- 2 Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $2a\sqrt{2}$. Tính tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
- 3 Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 60^\circ$, $AB = a$. Tính tích vô hướng $\vec{AC} \cdot \vec{CB}$.
- 4 Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$, góc $\widehat{BAC}$ bằng 120° . Gọi E là điểm thỏa mãn $\vec{AC} = 4\vec{AE}$.
 - a) Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ và $\vec{BC} \cdot \vec{AE}$.
 - b) Tính độ dài trung tuyến AM của tam giác ABC .
- 5 Cho hình thoi $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a và $\widehat{ADC} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của CD . Tính
 - a) $\vec{DA} \cdot \vec{DC}$.
 - b) $\vec{MA} \cdot \vec{CB}$.
- 6 Cho hai véc-tơ $\vec{i}, \vec{j}$ vuông góc, cùng có độ dài bằng 1. Cho $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ và tính góc $(\vec{a}, \vec{b})$.
- 7 Một người dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn là 90 N làm một vật dịch chuyển một đoạn 100 m. Biết lực $\vec{F}$ hợp với hướng dịch chuyển một góc 60° . Tính công sinh bởi lực $\vec{F}$.

- 8 Cho tam giác ABC đều cạnh a . Trên 3 cạnh AB, BC, AC lần lượt lấy ba điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AP} = x \cdot \overrightarrow{AC}$ với $x > 0$.

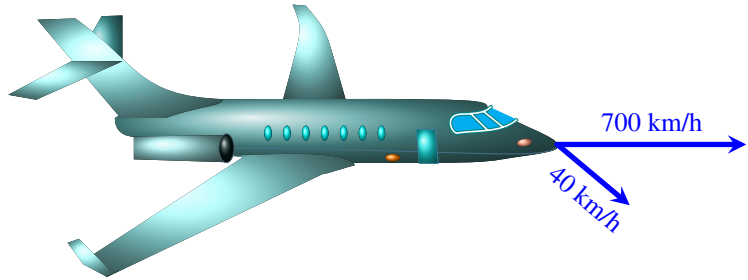
- Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
- Tìm x để MP vuông góc với AN .

- 9 Phân tử sulfur dioxide (SO_2) có cấu tạo hình chữ V, góc liên kết $\widehat{OSO}$ gần bằng 120° . Người ta biểu diễn sự phân cực giữa nguyên tử S với mỗi nguyên tử O bằng các véc-tơ $\vec{\mu}_1$ và $\vec{\mu}_2$ có cùng phương với liên kết cộng hoá trị, có chiều từ nguyên tử S về mỗi nguyên tử O và cùng có độ dài là 1,6 đơn vị (Hình 6). Cho biết véc-tơ tổng $\vec{\mu} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2$ được dùng để biểu diễn sự phân cực của cả phân tử SO_2 . Tính độ dài của $\vec{\mu}$.



Hình 6

- 10 Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ 700 km/h thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ 40 km/h. Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tính tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị km/h).



- 11 Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = \sqrt{3}, AD = 1$ và $\widehat{BAD} = 30^\circ$.

- Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
- Tính độ dài hai đường chéo AC và BD .
- Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$.

- 12 Cho hình chữ nhật $ABCD$, M là một điểm bất kì. Chứng minh $MA^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}$ (O là tâm của hình chữ nhật).

- 13 Cho điểm M thay đổi trên đường tròn tâm O bán kính R ngoại tiếp tam giác đều ABC cho trước. Chứng minh $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$.

- 14 Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O , M là điểm bất kì. Chứng minh

- $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$;
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$.

- 15 Cho tam giác ABC , chứng minh rằng $AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$.

- 16 Cho tam giác ABC đều cạnh a . M, N là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{NA} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh BN vuông góc với CM .

17 Cho tam giác ABC có $AB = a$, $AC = 2a$. Gọi D là trung điểm cạnh AC , M là điểm thỏa $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Chứng minh BD vuông góc với AM .

18 Cho tam giác ABC và k là số thực cho trước. Tìm tập hợp những điểm M sao cho

$$MA^2 - MB^2 = k.$$

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

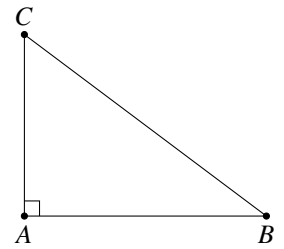
Câu 1. Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\widehat{B} = 50^\circ$. Hệ thức nào sau đây sai?

A. $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 40^\circ$.

B. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^\circ$.

C. $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$.

D. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$.



Câu 2. Cho hai véc tơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ vuông góc và có độ dài bằng 1. Xét hai véc-tơ $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$ và $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$.

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 43$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$.

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -30$.

Câu 3. Cho hai véc tơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ vuông góc và có độ dài bằng 1. Xét hai véc-tơ $\vec{a} = -\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$. Độ dài của véc-tơ $\vec{a}$ bằng

A. $\frac{7}{5}$.

B. $\frac{1}{5}$.

C. 1.

D. $\frac{6}{5}$.

Câu 4. Cho hai véc tơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ vuông góc và có độ dài bằng 1. Xét hai véc-tơ $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ và $\vec{b} = \vec{i} + 7\vec{j}$. Tính góc α giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 45^\circ$.

B. $\alpha = 90^\circ$.

C. $\alpha = 30^\circ$.

D. $\alpha = 60^\circ$.

Câu 5. Cho hai véc tơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ vuông góc và có độ dài bằng 1. Xét hai véc-tơ $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$ và $\vec{b} = 2\vec{i}$. Tính cosin của góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$.

C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Câu 6. Cho hai véc tơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ vuông góc và có độ dài bằng 1. Xét hai véc-tơ $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$ và $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$. Tìm k để véc-tơ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

A. $k = -20$.

B. $k = -40$.

C. $k = 20$.

D. $k = 40$.

Câu 7. Cho hai véc tơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ vuông góc và có độ dài bằng 1. Xét hai véc-tơ $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$ và $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$. Tìm k để véc-tơ $\vec{u}$ và véc-tơ $\vec{v}$ có độ dài bằng nhau.

A. $k = \pm \frac{\sqrt{37}}{2}$.

B. $k = \frac{5}{8}$.

C. $k = \frac{37}{4}$.

D. $k = \frac{\sqrt{37}}{2}$.

Câu 8. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai véc-tơ cùng hướng và đều khác véc-tơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$.

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Câu 9. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Xác định góc α giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- A. $\alpha = 45^\circ$. B. $\alpha = 60^\circ$. C. $\alpha = 120^\circ$. D. $\alpha = 30^\circ$.

Câu 10. Cho hai véc-tơ có độ dài lần lượt là 3 và 4 và có tích vô hướng là -6 . Tính góc giữa hai véc-tơ đó.

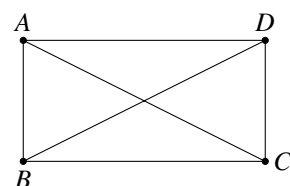
- A. 60° . B. 120° . C. 45° . D. 90° .

Câu 11. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

- A. $\alpha = 45^\circ$. B. $\alpha = 90^\circ$. C. $\alpha = 0^\circ$. D. $\alpha = 180^\circ$.

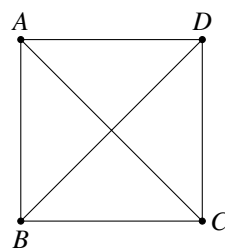
Câu 12. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8$, $AD = 5$. Tính $\vec{AB} \cdot \vec{BD}$.

- A. $\vec{AB} \cdot \vec{BD} = -64$. B. $\vec{AB} \cdot \vec{BD} = 64$.
C. $\vec{AB} \cdot \vec{BD} = 62$. D. $\vec{AB} \cdot \vec{BD} = -62$.



Câu 13. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

- A. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = a^2\sqrt{2}$. B. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2$.
C. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = a^2$. D. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}a^2$.



Câu 14. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$, $BC = 7$. Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

- A. 10. B. -20 . C. 20. D. 40.

Câu 15. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua C . Tính $\vec{AE} \cdot \vec{AB}$.

- A. $\vec{AE} \cdot \vec{AB} = 5a^2$. B. $\vec{AE} \cdot \vec{AB} = \sqrt{5}a^2$. C. $\vec{AE} \cdot \vec{AB} = \sqrt{3}a^2$. D. $\vec{AE} \cdot \vec{AB} = 2a^2$.

Câu 16. Nếu hai điểm M, N thỏa mãn $\vec{MN} \cdot \vec{NM} = -4$ thì độ dài đoạn thẳng MN bằng bao nhiêu?

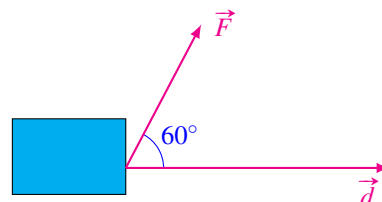
- A. $MN = 4$. B. $MN = 2$. C. $MN = 16$. D. $MN = 256$.

Câu 17. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

- A. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. B. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -\frac{a^2}{2}$. C. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2a^2$. D. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2}{2}$.

Câu 18. Một người dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn là 90 N làm một vật dịch chuyển một đoạn 100 m. Biết lực $\vec{F}$ hợp với hướng dịch chuyển một góc 60° . Tính công sinh bởi lực $\vec{F}$.

- A. 4500 J. B. 4200 J.
C. 4700 J. D. 5400 J.



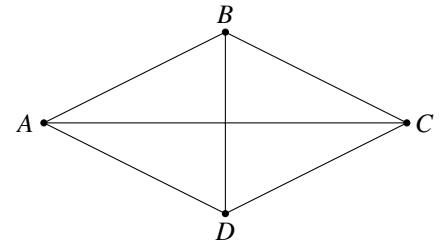
Câu 19. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 8$ và $BD = 6$. Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

A. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 24$.

B. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 26$.

C. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 28$.

D. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 32$.



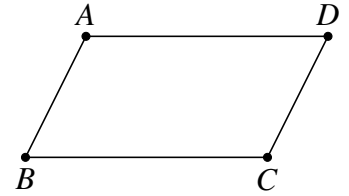
Câu 20. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 8$ cm, $AD = 12$ cm, góc $\widehat{ABC}$ nhọn và diện tích bằng 54 cm^2 . Tính $\cos(\vec{AB}, \vec{BC})$.

A. $\cos(\vec{AB}, \vec{BC}) = \frac{2\sqrt{7}}{16}$.

B. $\cos(\vec{AB}, \vec{BC}) = -\frac{2\sqrt{7}}{16}$.

C. $\cos(\vec{AB}, \vec{BC}) = \frac{5\sqrt{7}}{16}$.

D. $\cos(\vec{AB}, \vec{BC}) = -\frac{5\sqrt{7}}{16}$.



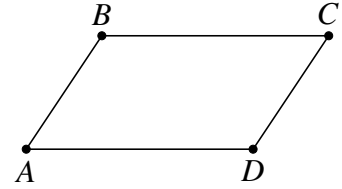
—HẾT—

ĐỀ TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG

1. Đề số 1

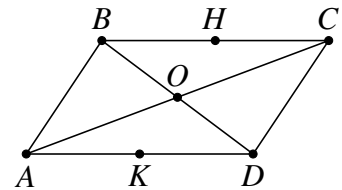
Câu 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Chọn khẳng định đúng?

- A. $\vec{AB}, \vec{CD}$ là hai vectơ cùng phương.
- B. $\vec{AD}, \vec{CB}$ là hai vectơ cùng hướng.
- C. $\vec{AD}, \vec{BC}$ là hai vectơ ngược hướng.
- D. $\vec{AB}, \vec{CD}$ là hai vectơ cùng hướng.



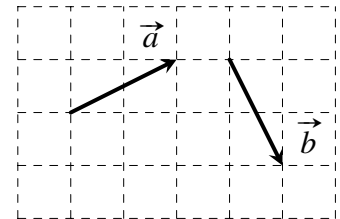
Câu 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Gọi H, K lần lượt là trung điểm của BC, AD . Chọn khẳng định đúng?

- A. $\vec{OK} = \vec{OH}$.
- B. $\vec{OK} = \vec{HO}$.
- C. $\vec{HK} = \vec{DC}$.
- D. $\vec{HK} = \vec{AB}$.



Câu 3. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ như hình bên. Biết mỗi ô vuông có kích thước $1\text{cm} \times 1\text{cm}$. Tính độ lớn véc-tơ $\vec{a} + \vec{b}$.

- A. $2\sqrt{2}\text{ cm}$.
- B. 4 cm .
- C. 8 cm .
- D. $\sqrt{10}\text{ cm}$.



Câu 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4, AD = 3$. Độ dài vectơ $\vec{AC} - \vec{DB}$ bằng

- A. 7.
- B. 8.
- C. 5.
- D. 6.

Câu 5. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a . Khẳng định nào sau đây đúng?

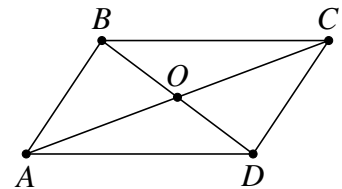
- A. $\vec{AB} = \vec{AC}$.
- B. $|\vec{AC}| = |\vec{BC}|$.
- C. $|\vec{AB}| = a$.
- D. $\vec{AC} = a$.

Câu 6. Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\vec{BA} - \vec{BC} = \vec{AC}$.
- B. $\vec{CA} - \vec{CB} = \vec{AB}$.
- C. $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{BC}$.
- D. $\vec{CB} - \vec{CA} = \vec{AB}$.

Câu 7. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\vec{OB} + \vec{OD} = \vec{0}$.
- B. $\vec{AB} + \vec{CD} = 2\vec{AB}$.
- C. $\vec{DA} - \vec{DB} + \vec{DC} = \vec{0}$.
- D. $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$.



Câu 8. Cho tam giác ABC vuông tại B và $AB = 6\text{ cm}, BC = 8\text{ cm}$. Tính $|\vec{BA} - \vec{BC}|$.

- A. 3 cm .
- B. 4 cm .
- C. 10 cm .
- D. 6 cm .

Câu 9. Tổng $\vec{MN} + \vec{PQ} + \vec{RN} + \vec{NP} + \vec{QR}$ bằng

- A. $\vec{MR}$.
- B. $\vec{MP}$.
- C. $\vec{MQ}$.
- D. $\vec{MN}$.

Câu 10. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $A(-2; -2)$ và $B(5; -4)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác OAB .

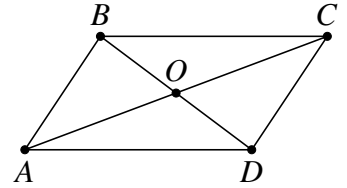
- A. $G(1; -2)$.
- B. $G(\frac{7}{3}; \frac{2}{3})$.
- C. $G(-\frac{7}{2}; 1)$.
- D. $G(-\frac{3}{2}; -3)$.

Câu 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(3; -5), B(1; 7)$. Trung điểm I của đoạn thẳng AB có tọa độ là

- A. $I(2; -1)$. B. $I(-2; 12)$. C. $I(4; 2)$. D. $I(2; 1)$.

Câu 12. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm là điểm O . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BO}$. B. $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BD}$.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.



Câu 13. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Khi đó $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ bằng vec-tơ nào?

- A. $\overrightarrow{AB}$. B. $\overrightarrow{CD}$. C. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$. D. $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$.

Câu 14. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a . Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

- A. $2a$. B. a . C. $a\sqrt{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 15. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC = 3NA$. Gọi K là trung điểm của MN . Khi đó:

- A. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. C. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Câu 16. Cho hình bình hành $ABCD$, M là điểm trên cạnh AB sao cho $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$, N là trung điểm của cạnh CD , G là trọng tâm tam giác MNB . Khi đó

- A. $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{15}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{15}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Câu 17. Cho tam giác đều ABC có M là trung điểm BC . Tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MA})$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 18. Cho tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $BC = 2a$. Tích vô hướng $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng bao nhiêu?

- A. $3a^2$. B. $-3a^2$. C. $a^2\sqrt{3}$. D. $-a^2\sqrt{3}$.

Câu 19. Cho M là trung điểm AB , tìm mệnh đề sai.

- A. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -MA \cdot AB$. B. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$.
C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB$. D. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB$.

Câu 20. Cho hai vec-tơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ vuông góc và có độ dài bằng 1. Biết rằng $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1a_2 + b_1b_2$.
C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_2 + b_1a_2$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$.

Câu 21. Cho hai vec-tơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ vuông góc và có độ dài bằng 1. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ và $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.

- A. 0. B. 1. C. $-\frac{5}{13}$. D. $\frac{5}{13}$.

Câu 22. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 5$, $BC = 6$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- A. 7. B. -7. C. $\frac{7}{2}$. D. $-\frac{7}{2}$.

Câu 23. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là a . Giá trị của biểu thức $(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$ là

- A. 0. B. $2a^2$. C. $-2a^2$. D. $-2\sqrt{2}a^2$.

Câu 24. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 30^\circ$, $AC = 2$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính giá trị của biểu thức $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$.

- A. $P = -2\sqrt{3}$. B. $P = 2\sqrt{3}$. C. $P = -2$. D. $P = 2$.

Câu 25. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 4$; $|\vec{b}| = 3$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Chọn phát biểu **đúng**.

- A. $\alpha = 30^\circ$. B. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. C. $\alpha = 60^\circ$. D. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$.

—HẾT—

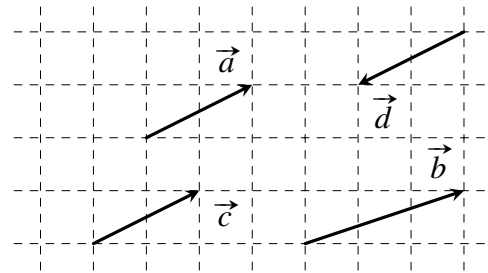
2. Đề số 2

Câu 1. Hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng nhau nếu chúng

- A. cùng hướng. B. cùng hướng và cùng độ dài.
C. cùng độ dài. D. cùng phương và cùng độ dài.

Câu 2. Cho bốn véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ và $\vec{d}$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- A. $\vec{a}$ và $\vec{c}$ bằng nhau.
B. $\vec{a}$ và $\vec{d}$ đối nhau.
C. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.
D. $\vec{c}$ và $\vec{d}$ đối nhau.



Câu 3. Cho bốn điểm bất kỳ A, B, C, O . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$. B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$. C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO}$.

Câu 4. Tính $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CA}$.

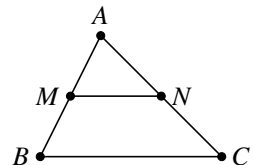
- A. $\vec{u} = \vec{0}$. B. $\vec{u} = \overrightarrow{MA}$. C. $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$. D. $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$.

Câu 5. Cho bốn điểm bất kỳ A, B, C, D . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}$.

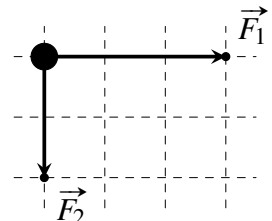
Câu 6. Cho tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, AC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CB}$. B. $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{MB}$.
C. $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$. D. $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{MN}$.



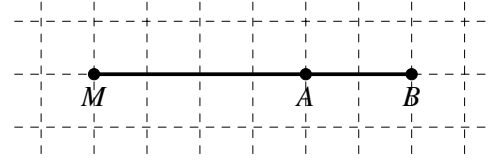
Câu 7. Cho hai lực đồng quy $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ như hình vẽ bên. Biết độ lớn của $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ lần lượt là 3 N và 2 N. Tính độ lớn hợp lực của $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$

- A. 5 N. B. $\sqrt{5}$ N.
C. $\sqrt{13}$ N. D. $\sqrt{11}$ N.



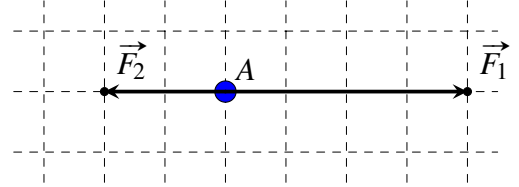
Câu 8. Cho ba điểm A, B, M được xác định như hình bên. Tìm đẳng thức đúng.

- A. $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MB}$. B. $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB}$.
C. $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$. D. $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MB}$.



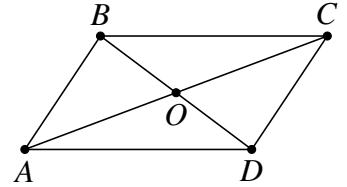
Câu 9. Cho vật A chịu tác dụng của hai lực đồng quy, ngược chiều nhau như hình bên. Bỏ qua ma sát của mặt phẳng, hãy tìm khẳng định đúng?

- A. Vật sẽ đứng yên.
B. $\vec{F}_1 = -2\vec{F}_2$.
C. Vật sẽ dịch chuyển sang phải.
D. $\vec{F}_1 = 2\vec{F}_2$.



Câu 10. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.
B. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$.
D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.



Câu 11. Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM . Hãy phân tích véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

- A. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$.
C. $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. D. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Câu 12. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Khi đó, $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $a\sqrt{5}$.

Câu 13. Cho tam giác ABC với trung tuyến AM và trọng tâm G . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$. B. $\overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GM}$. C. $\overrightarrow{GA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. D. $\overrightarrow{GA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

Câu 14. Cho hình bình hành $ABCD$. Tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ bằng

- A. $\overrightarrow{AC}$. B. $\vec{0}$. C. $2\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AD}$.

Câu 15. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai véc-tơ ngược hướng. Trong các đẳng thức sau, hãy chọn đẳng thức đúng?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{0}$. C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Câu 16. Cho tam giác ABC vuông tại A , có số đo góc B là 60° và $AB = a$. Kết quả nào sau đây là sai?

- A. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -3\sqrt{2}a$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$. C. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 3a^2$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Câu 17. Cho ΔABC vuông tại A , có số đo góc B là 60° và $AB = a$. Kết quả nào sau đây là sai?

- A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 3a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$. D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -3\sqrt{2}a$.

Câu 18. Cho tam giác ABC có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 4$ và $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 9$. Tính $AB^2 - AC^2$.

- A. -16 . B. 16 . C. 5 . D. -5 .

Câu 19. Cho ΔABC vuông tại A , góc B bằng 30° và $AB = 10$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- A. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 50\sqrt{3}$. B. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 50$. C. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 100$. D. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{100}{\sqrt{3}}$.

Câu 20. Cho tam giác ABC với độ dài ba cạnh là $AB = 5a$, $AC = 8\sqrt{2}a$, $BC = 7a$. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

- A. $-76a^2$. B. $76a$. C. $76a^2$. D. 76 .

Câu 21. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của CD và G là trọng tâm của tam giác BCI . Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Hãy tìm đẳng thức đúng trong các đẳng thức dưới đây.

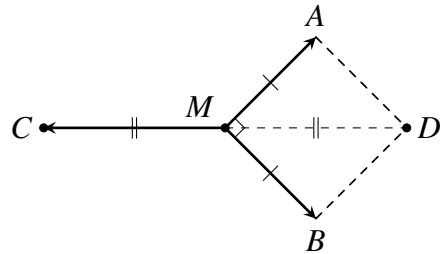
- A. $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$. B. $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{6}\vec{a} + \vec{b}$. C. $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}$. D. $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.

Câu 22. Cho tam giác ABC có AK , BM là hai trung tuyến. Đặt $\overrightarrow{AK} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BM} = \vec{b}$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{BC}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- A. $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$. B. $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}$. C. $\overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$. D. $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$.

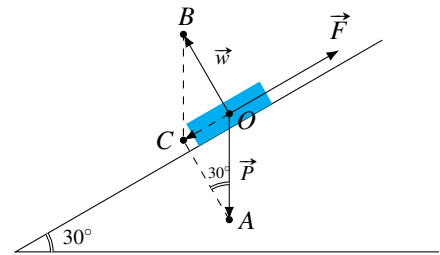
Câu 23. Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$, $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều bằng 60 N và tam giác MAB vuông tại M . Tìm cường độ lực $\vec{F}_3$.

- A. 84,58 N. B. 84,86 N. C. 84,85 N. D. 120 N.



Câu 24. Tính lực kéo cần thiết để kéo một vật có trọng lượng 2 148 N lên một con dốc nghiêng 30° so với phương nằm ngang (hình bên). Nếu lực kéo của mỗi người bằng 100 N thì cần tối thiểu bao nhiêu người để kéo vật (bỏ qua ma sát trượt giữa bánh xe và mặt phẳng nghiêng)?

- A. 19 người. B. 15 người. C. 23 người. D. 17 người.



Câu 25. Cho tam giác ABC có $a = 8$, $b = 4$ và $c = 6$. Biết tập hợp các điểm M thỏa mãn

$$(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0$$

là một đường tròn cố định. Tìm đường kính d của đường tròn đó.

- A. $d = 1$. B. $d = 2$. C. $d = 3$. D. $d = 4$.

—HẾT—

Bài 1

SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Số gần đúng

Trong nhiều trường hợp, ta không biết hoặc khó biết số đúng (kí hiệu $\bar{a}$) mà chỉ tìm được giá trị khác xấp xỉ nó. Giá trị này được gọi là **số gần đúng**, kí hiệu là a .

Ví dụ: Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 3. Khi đó, độ dài đường chéo hình vuông được tính theo công thức là $\text{cạnh} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

- Kết quả $3\sqrt{2}$ là số đúng khi tính đường chéo hình vuông.
- Các kết quả 4, 2; 4, 24; 4, 23; ... là các số gần đúng.

2. Sai số tuyệt đối và sai số tương đối

Sai số tuyệt đối: Cho $\bar{a}$ là số đúng và a là số gần đúng của $\bar{a}$. Giá trị $\Delta_a = |a - \bar{a}|$ phản ánh mức độ sai lệch giữa số đúng $\bar{a}$ và số gần đúng a , được gọi là **sai số tuyệt đối** của số gần đúng a .

- Trên thực tế, nhiều khi ta không biết $\bar{a}$ nên cũng không biết được Δ_a . Tuy nhiên ta có thể đánh giá được $\Delta_a \leq d$, với d là một số dương nào đó.
- Nếu $\Delta_a \leq d$ thì $|a - \bar{a}| \leq d \Leftrightarrow a - d \leq \bar{a} \leq a + d$. Khi đó, ta có thể viết $\bar{a} = a \pm d$ và hiểu là số đúng $\bar{a}$ nằm trong đoạn $[a - d; a + d]$.
- Với d càng nhỏ thì a càng gần $\bar{a}$ nên d gọi là **độ chính xác của số gần đúng**.

Sai số tương đối: Sai số tương đối của số gần đúng a , kí hiệu là δ_a và được tính bởi công thức $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$.

- Nếu $\bar{a} = a \pm d$ thì $\Delta_a \leq d$, suy ra $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \leq \frac{d}{|a|}$. Nếu $\frac{d}{|a|}$ càng nhỏ thì chất lượng của phép đo càng cao.
- Người ta thường viết sai số tương đối dưới dạng phần trăm.

3. Quy tròn số gần đúng

Số thu được sau khi thực hiện làm tròn số được gọi là **số quy tròn**. Số quy tròn là một số gần đúng của số ban đầu.

Quy tắc quy tròn số:

① Đối với chữ số hàng làm tròn:

- + Giữ nguyên nếu chữ số ngay bên phải nó nhỏ hơn 5;
- + Tăng 1 đơn vị nếu chữ số ngay bên phải nó lớn hơn hoặc bằng 5.

② Đối với chữ số sau hàng làm tròn:

- + Bỏ đi nếu ở phần thập phân;
- + Thay bởi các chữ số 0 nếu ở phần số nguyên.

Nhận xét:

- ① Khi thay số đúng bởi số quy tròn đến một hàng nào đó thì sai số tuyệt đối của số quy tròn không vượt quá nửa đơn vị của hàng làm tròn.
- ② Khi quy tròn số đúng $\bar{a}$ đến một hàng nào đó thì ta nói số gần đúng a nhận được là chính xác đến hàng đó. Ví dụ, số gần đúng của π chính xác đến hàng phần trăm là 3,14.
- ③ Cho số gần đúng a với độ chính xác d . Khi được yêu cầu làm tròn số a mà không nói rõ làm tròn đến hàng nào thì ta làm tròn số a đến hàng thấp nhất mà d nhỏ hơn 1 đơn vị của hàng đó.

B RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN

KN 1 Sai số tuyệt đối và sai số tương đối

Cho $\bar{a}$ là số đúng và a là số gần đúng của $\bar{a}$.

- ① Sai số tuyệt đối được tính theo công thức: $\Delta_a = |a - \bar{a}|$.
- ② Sai số tương đối được tính theo công thức: $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$.
- ② Nếu $\bar{a} = a \pm d$ thì
 - Số đúng $\bar{a}$ nằm trong đoạn $[a - d; a + d]$.
 - Đánh giá sai số tương đối $\delta_a \leq \frac{d}{|a|}$.

 **Ví dụ 1.** Một bao gạo ghi thông tin khối lượng là $5 \pm 0,2$ kg.

- a) Xác định khối lượng đúng, khối lượng gần đúng và độ chính xác của bao gạo.
- b) Khối lượng thực của bao gạo nằm trong đoạn nào?

 **Ví dụ 2.** Giả sử khối lượng đúng của một hộp kẹo là 0,85 kg. Bình và An cân hộp kẹo này và ghi nhận kết quả lần lượt là 0,8 kg và 1 kg.

- a) Tìm sai số tuyệt đối của kết quả cân của mỗi bạn.
b) Kết quả cân của bạn nào chính xác hơn? Vì sao?

Ví dụ 3. Cho $\bar{a} = \sqrt[19]{19} - \sqrt[23]{23}$. Số nào trong ba số sau : $\frac{1}{50}$, $\frac{7}{33}$ và $\frac{8}{37}$ xấp xỉ tốt nhất giá trị của $\bar{a}$.

Ví dụ 4. Kết quả đo chiều dài của một cây cầu được ghi là $152m \pm 0,2m$. Tìm sai số tương đối của phép đo chiều dài cây cầu.

Ví dụ 5. Hãy xác định sai số tuyệt đối của số $a = 123456$ biết sai số tương đối $\delta_a = 0,2\%$.

KN**2****Quy tròn số gần đúng**

Ví dụ 6. Viết giá trị gần đúng của mỗi số sau, chính xác đến hàng phần trăm và hàng phần nghìn.

a) $\sqrt{3}$.

b) π^2 .

Ví dụ 7. Biết $\sqrt{7} = 2,6457513 \dots$

- a) Làm tròn kết quả đến phần mười và ước lượng sai số tuyệt đối.
b) Làm tròn kết quả đến phần nghìn và ước lượng sai số tuyệt đối.

Ví dụ 8. Cho biết $\sqrt{3} = 1,7320508 \dots$. Hãy quy tròn $\sqrt{3}$ đến hàng phần trăm và ước lượng sai số tương đối.

Ví dụ 9. Hãy viết số quy tròn của số a với độ chính xác d được cho sau đây:

a) $\bar{a} = 17658 \pm 16$.

b) $\bar{a} = 15,318 \pm 0,056$.

Ví dụ 10. Cho số gần đúng $a = 6547$ với độ chính xác $d = 100$. Hãy viết số quy tròn của số a và ước lượng sai số tương đối của số quy tròn đó.

Ví dụ 11. Biết số gần đúng $a = 173,4592$ có sai số tuyệt đối không vượt quá $0,01$. Hãy viết số qui tròn của số a .

KN**3****Vận dụng, thực tiễn**

Ví dụ 12. Bạn A đo chiều dài của một sân bóng ghi được $250 \pm 0,2m$. Bạn B đo chiều cao của một cột cờ được $15 \pm 0,1m$. Trong hai bạn A và B, bạn nào có phép đo chính xác hơn tính theo sai số tương đối?

Ví dụ 13. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh đo được như sau $a = 12\text{ cm} \pm 0,2\text{ cm}$; $b = 10,2\text{ cm} \pm 0,2\text{ cm}$; $c = 8\text{ cm} \pm 0,1\text{ cm}$. Tính chu vi P của tam giác và đánh giá sai số tuyệt đối, sai số tương đối của số gần đúng của chu vi qua phép đo.

Ví dụ 14. Cho biết $1,731 < \sqrt{3} < 1,733$. Hãy tính độ dài đường cao của một tam giác đều có cạnh bằng 5 cm và ước lượng độ chính xác của kết quả vừa tìm được.

Ví dụ 15. Hai kỹ thuật viên trắc địa tham gia đo diện tích của một thửa đất hình tam giác. Người thứ nhất đo đáy tam giác với kết quả $65,58\text{ (m)}$ với sai số tương đối là 1% . Người thứ hai đo đường cao tương ứng của tam giác với kết quả $47,39\text{ (m)}$ với sai số tương đối là 3% . Hãy tính diện tích của tam giác và viết kết quả dưới dạng chuẩn.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- 1 Ước lượng sai số tuyệt đối và sai số tương đối ứng với mỗi câu sau đây
 - a) $\bar{a} = 10,8 \pm 1,4$.
 - b) $\bar{a} = 45,32 \pm 3,4$.
 - c) $\bar{a} = 0,02343 \pm 0,00007$.
 - d) $\bar{a} = 1,00235 \pm 0,00012$.
 - e) $\bar{a} = 2,3987 \pm 0,0045$.
 - f) $\bar{a} = 3,9886 \pm 0,12$.
- 2 Dùng các phân số $\frac{38}{17}$ và $\frac{293}{131}$ làm các số gần đúng của $\sqrt{5}$. Hãy đánh giá sai số tuyệt đối của mỗi số ấy?
- 3 Số nào trong các số sau đây xấp xỉ tốt nhất giá trị của $A = \sqrt[19]{19} - \sqrt[23]{23}$: $\frac{1}{50}$, $\frac{7}{33}$ và $\frac{8}{37}$.
- 4 Chiều dài một cái cầu là $\ell = 1745,25\text{ m} \pm 0,01\text{ m}$.
 - a) Xác định chiều dài đúng, chiều dài gần đúng và độ chính xác của của cái cầu.
 - b) Chiều dài thực của cái cầu nằm trong đoạn nào?
- 5 Một phép đo đường kính nhân tế bào cho kết quả là $5 \pm 0,3\text{ }\mu\text{m}$. Đường kính thực của nhân tế bào thuộc đoạn nào?
- 6 Độ dài của một cây cầu người ta đo được là $996\text{ m} \pm 0,5\text{ m}$. Sai số tương đối tối đa trong phép đo là bao nhiêu.
- 7 Cho số $x = \frac{2}{7}$ và các giá trị gần đúng của x là $0,28$; $0,29$; $0,286$. Hãy xác định sai số tuyệt đối trong từng trường hợp và cho biết giá trị gần đúng nào là tốt nhất.
- 8 Số $\bar{a}$ được cho bởi số gần đúng $a = 5,7824$ với sai số tương đối không vượt quá $0,5\%$. Hãy đánh giá sai số tuyệt đối của $\bar{a}$.
- 9 Làm tròn các số sau theo yêu cầu bài toán
 - a) $12424,167$ tới hàng chục.
 - b) $22832,2338$ tới hàng đơn vị.
 - c) $87,8943323$ tới hàng phần trăm.
 - d) $2343,3827443$ tới hàng phần chục ngàn.
- 10 Các nhà vật lí sử dụng ba phương pháp đo hằng số Hubble lần lượt cho kết quả như sau:

$$67,31 \pm 0,96; \quad 67,90 \pm 0,55; \quad 67,74 \pm 0,46$$

Phương pháp nào chính xác nhất tính theo sai số tương đối?

- 11) Làm tròn các số sau theo yêu cầu bài toán
- a) 1,2837438 tới hàng phần trăm. b) 9,3923298 tới hàng phần ngàn.
- 12) Cho số gần đúng $a = 23748023$ với độ chính xác $d = 101$.
Hãy viết số quy tròn của số a và ước lượng sai số tương đối của số quy tròn đó.
- 13) Một trái banh có đường kính đo được là $d = 32,5 \pm 0,05$ (cm). Tính thể tích của trái banh đó, biết $\pi = 3,1415 \pm 0,0001$.
- 14) Biết chiều dài của một bức tranh là $a = 0,5 \pm 0,1$ (m) và chiều rộng của bức tranh là $b = 0,2 \pm 0,03$ m. Hỏi
- a) Chu vi của bức tranh là bao nhiêu?
- b) Diện tích của bức tranh là bao nhiêu?
- 15) Diện tích của một khung cửa sổ hình vuông là $S = 100,13 \pm 0,05$ (cm²). Tìm cạnh của khung cửa sổ?

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho a là số gần đúng của số đúng $\bar{a}$. Khi đó $\Delta_a = |\bar{a} - a|$ được gọi là

- A. số quy tròn của $\bar{a}$. B. sai số tuyệt đối của số gần đúng a .
C. sai số tương đối của số gần đúng a . D. số quy tròn của a .

Câu 2. Cho số a là số gần đúng của $\bar{a}$ với độ chính xác d . Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. $\bar{a} = a + d$. B. $\bar{a} = a \pm d$. C. $\bar{a} = a - d$. D. $\bar{a} = a$.

Câu 3. Chiều cao của một ngọn đồi là $\bar{h} = 347,13m \pm 0,2m$. Độ chính xác d của phép đo trên là:

- A. $d = 347,33m$. B. $d = 347,13m$. C. $d = 0,2m$. D. $d = 346,93m$.

Câu 4. Sử dụng máy tính bỏ túi, hãy viết giá trị gần đúng của π^2 chính xác đến hàng phần nghìn.

- A. 9,869. B. 9,8696. C. 9,871. D. 9,870.

Câu 5. Kết quả làm tròn số $a = 10\sqrt{13}$ đến hàng đơn vị là

- A. $a \approx 36,06$. B. $a \approx 40$. C. $a \approx 36$. D. $a \approx 36,1$.

Câu 6. Cho số $a = 367653964 \pm 213$. Số quy tròn của số gần đúng 367653964 là

- A. 367654000. B. 367653960. C. 367653970. D. 367653000.

Câu 7. Hãy viết số quy tròn của số a với độ chính xác d được cho sau đây $\bar{a} = 17658 \pm 16$.

- A. 17700. B. 18000. C. 17800. D. 17600.

Câu 8. Khi sử dụng máy tính bỏ túi với 10 chữ số thập phân, ta được $\sqrt{8} = 2,828427215$. Giá trị gần đúng của $\sqrt{8}$ chính xác đến hàng phần trăm là

- A. 2,81. B. 2,80. C. 2,83. D. 2,82.

Câu 9. Cho số $\bar{a} = 4,1356 \pm 0,001$. Số quy tròn của số gần đúng 4,1356 là

- A. 4,135. B. 4,13. C. 4,14. D. 4,136.

Câu 10. Theo thống kê, dân số Việt Nam năm 2002 là 79715675 người. Giả sử sai số tuyệt đối của số liệu thống kê này nhỏ hơn 10000 người. Hãy viết số quy tròn của số trên.

- A. 79700000 người. B. 79716000 người. C. 79720000 người. D. 79710000 người.

Câu 11. Giả sử biết số đúng là 8217,3. Sai số tuyệt đối khi quy tròn số này đến hàng chục là

- A. 2,7. B. 7,3. C. 0,3. D. 2,3.

Câu 12. Cho phương trình $2x^2 + 5x - 8 = 0$. Gọi x_1 là nghiệm âm của phương trình. Số quy tròn nghiệm x_1 với độ chính xác $d = 0,002$ bằng

- A. -3,61. B. -3,608. C. -3,60. D. -3,6085.

Câu 13. Các nhà toán học cổ đại Trung Quốc đã dùng phân số $\frac{22}{7}$ để xấp xỉ số π . Hãy đánh giá sai số tuyệt đối Δ của giá trị gần đúng này, biết $3,1415 < \pi < 3,1416$.

- A. $\Delta < 0,0012$. B. $\Delta < 0,0011$. C. $\Delta < 0,0014$. D. $\Delta < 0,0013$.

Câu 14. Cho giá trị gần đúng của $\frac{3}{7}$ là 0,429 thì sai số tuyệt đối không vượt quá

- A. 0,002. B. 0,001. C. 0,003. D. 0,004.

Câu 15. Nếu lấy 3,1416 làm giá trị gần đúng cho π thì sai số tuyệt đối không vượt quá

- A. 0,0004. B. 0,0002. C. 0,0001. D. 0,0003.

Câu 16. Số $\bar{a}$ được cho bởi giá trị gần đúng $a = 5,7824$ với sai số tương đối không vượt quá 0,05%. Khi đó, sai số tuyệt đối của a không vượt quá

- A. 0,0026912. B. 0,0028912. C. 0,0025912. D. 0,0027912.

Câu 17. Độ dài của một cây cầu người ta đo được là $966\text{m} \pm 0,5\text{m}$. Sai số tương đối tối đa trong phép đo đó là bao nhiêu?

- A. 0,25%. B. 0,05%. C. 0,5%. D. 0,025%.

Câu 18. Khi kết thúc học kỳ I, điểm môn Toán của bạn Nam như sau:

Điểm hệ số 1: 8,7,10,8.

Điểm hệ số 2: 7,9.

Điểm hệ số 3: 9.

Điểm trung bình môn Toán học kỳ I của bạn Nam được làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất là

- A. 8. B. 8,3. C. 8,36. D. 8,4.

Câu 19. Đo độ dài ba cạnh a, b, c của một tam giác, được kết quả $a = 6,3\text{ cm} \pm 0,1\text{ cm}$, $b = 10\text{ cm} \pm 0,2\text{ cm}$, $c = 15\text{ cm} \pm 0,2\text{ cm}$. Chu vi của tam giác có thể có số đo lớn nhất là bao nhiêu cm?

- A. 32 cm. B. 30,8 cm. C. 31,3 cm. D. 31,8 cm.

Câu 20. Một cái ruộng hình chữ nhật có chiều dài là $x = 23\text{ m} \pm 0,01\text{ m}$ và chiều rộng là $y = 15\text{ m} \pm 0,01\text{ m}$. Diện tích của ruộng là

- A. $S = 345\text{ m} \pm 0,3801\text{ m}$. B. $S = 345\text{ m} \pm 0,03801\text{ m}$.
C. $S = 345\text{ m} \pm 0,38\text{ m}$. D. $S = 345\text{ m} \pm 0,3801\text{ m}$.

—HẾT—

Bài 2

MÔ TẢ VÀ BIỂU DIỄN DỮ LIỆU TRÊN CÁC BẢNG VÀ BIỂU ĐỒ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Biểu diễn dữ liệu trên các bảng và bằng biểu đồ cho ta cái nhìn trực quan về dữ liệu. Từ đó, tiến hành các thao tác đối chiếu, so sánh hoặc phát hiện ra những điều không hợp lý của mẫu số liệu.

1. Bảng số liệu

Ví dụ 1

Trong 6 tháng đầu năm, số sản phẩm bán ra mỗi tháng của một cửa hàng đều tăng khoảng 20% so với tháng trước đó. Biết rằng, trong bảng dưới đây, số sản phẩm bán ra của một tháng bị nhập sai. Hãy tìm tháng đó.

Tháng	1	2	3	4	5	6
Số sản phẩm bán ra	145	175	211	256	340	371

Hướng dẫn giải:

Tỉ lệ phần trăm tăng thêm của số sản phẩm bán ra mỗi tháng được tính như sau:

- Tháng thứ 2: $\frac{175 - 145}{1,45} = 20,7\%$.
- Tháng thứ 3: $\frac{211 - 175}{1,75} = 20,6\%$.
- Tháng thứ 4: $\frac{256 - 211}{2,11} = 21,3\%$.
- Tháng thứ 5: $\frac{340 - 256}{2,56} = 32,8\%$.
- Tháng thứ 6: $\frac{371 - 340}{3,40} = 9,1\%$.

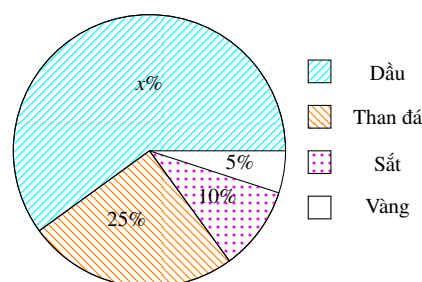
Ta thấy tỉ lệ tăng của tháng 5 và tháng 6 đều khác xa 20%. Do đó trong bảng số liệu đã cho, số sản phẩm của tháng 5 là không chính xác dẫn đến số liệu tháng 6 bị sai.

2. Biểu đồ

Ví dụ 2

Biểu đồ sau mô tả tỉ lệ về giá trị đạt được của khoáng sản xuất khẩu nước ngoài của nước ta.

- Dựa vào biểu đồ, cho biết loại khoáng sản nào đạt giá trị xuất khẩu lớn nhất?
- Biết rằng giá trị xuất khẩu của nước ta về dầu là 450 triệu USA. Hỏi giá trị xuất khẩu vàng là bao nhiêu triệu USA?



Hướng dẫn giải:

- a) Hình quạt biểu diễn giá trị đạt được của khoáng sản dầu là lớn nhất nên loại khoáng sản đạt giá trị xuất khẩu lớn nhất là dầu.
- b) Tỷ lệ phần trăm của dầu là $100\% - 25\% - 10\% - 5\% = 60\%$.
Suy ra giá trị xuất khẩu của vàng là $\frac{450}{60} \cdot 5 = 37,5$ triệu USA.

B RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN

KN

1

Phát hiện số liệu sai trên bảng số liệu hoặc trên biểu đồ

Ví dụ 1. Một đội 20 thợ thủ công được chia đều vào 5 tổ. Trong một ngày, mỗi người thợ làm được 4 hoặc 5 sản phẩm. Cuối ngày, đội trưởng thống kê lại số sản phẩm mà mỗi tổ làm được ở bảng sau:

Tổ	1	2	3	4	5
Số sản phẩm	17	19	19	21	20

Đội trưởng đã thống kê đúng chưa? Tại sao?

Ví dụ 2. Tâm ghi lại số liệu từ trang web của Tổng cục Thống kê bảng nhiệt độ không khí trung bình các tháng trong năm 2020 tại một trạm quan trắc đặt ở thành phố Vinh.

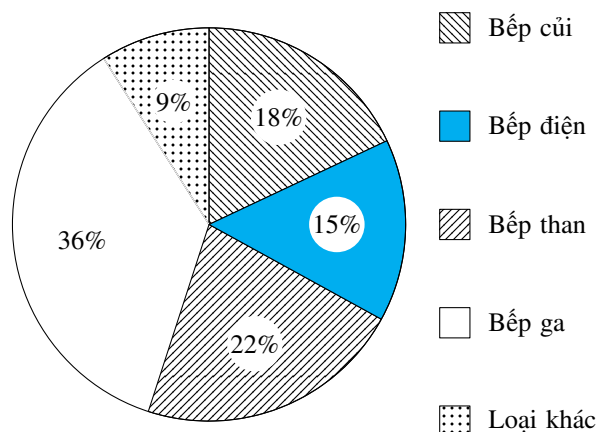
Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nhiệt độ (°C)	20,9	20,7	23,7	23	29,5	32,2	4,5	29,6	28,9	23,8	23,1	18,4

Bạn Tâm đã ghi nhầm nhiệt độ của một tháng trong bảng trên. Theo em bạn Tâm đã ghi nhầm số liệu của tháng mấy? Tại sao?

Ví dụ 3.

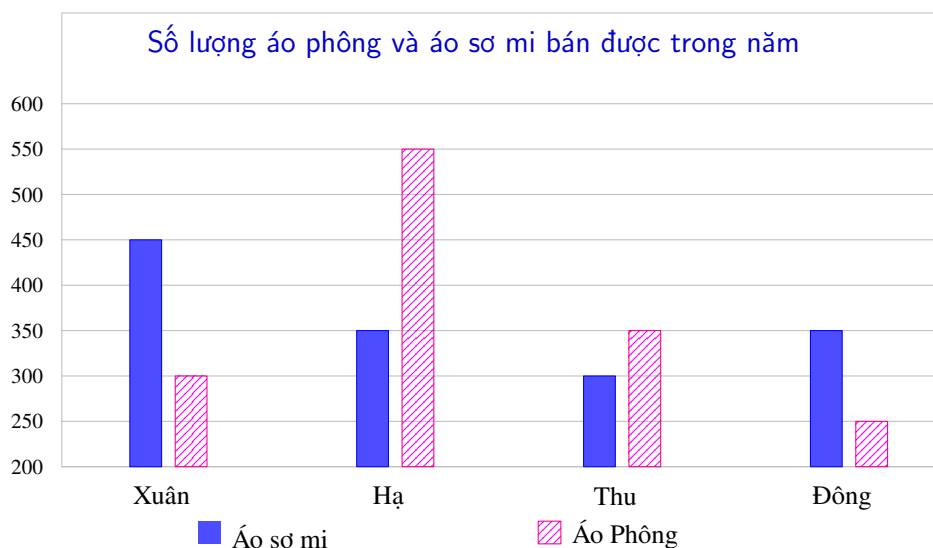
Phương vẽ biểu đồ biểu thị tỉ lệ số lượng mỗi loại bếp mà gia đình các bạn trong lớp sử dụng thường xuyên để đun nấu theo bảng thống kê dưới đây.

Loại bếp	Số gia đình
Bếp củi	10
Bếp điện	12
Bếp than	8
Bếp ga	20
Loại khác	5



Hãy cho biết Phương vẽ biểu đồ chính xác chưa. Nếu chưa thì cần điều chỉnh lại như thế nào cho đúng?

Ví dụ 4. Biểu đồ dưới đây biểu diễn số áo phông và áo sơ mi một cửa hàng bán được theo bốn mùa trong năm.



Hãy kiểm tra xem các phát biểu sau là đúng hay sai?

- Vào mùa hạ, số lượng áo phông bán được gấp 3 lần số lượng áo sơ mi.
- Vào mùa xuân, số áo sơ mi bán được nhiều gấp 1,5 lần số áo phông.
- Trong cả năm, tổng số áo sơ mi bán được nhiều hơn tổng số áo phông.
- Tổng số áo sơ mi và áo phông bán được vào mùa thu là thấp nhất so với các mùa khác.

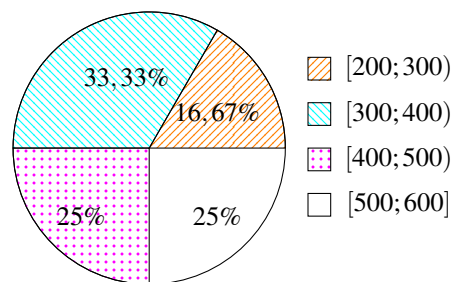
Ví dụ 5. Số liệu thống kê tình hình việc làm của sinh viên ngành Toán sau khi tốt nghiệp của các khóa tốt nghiệp 2018 và 2019 được trình bày trong bảng sau:

STT	Lĩnh vực việc làm	Khóa tốt nghiệp 2018		Khóa tốt nghiệp 2019	
		Nữ	Nam	Nữ	Nam
1	Giảng dạy	25	45	25	65
2	Tài chính	23	186	20	32
3	Lập trình	25	120	12	58
4	Bảo hiểm	12	100	3	5

- Trong số nữ sinh có việc làm ở Khóa tốt nghiệp 2018, tỷ lệ phần trăm của nữ làm trong lĩnh vực Giảng dạy là bao nhiêu?
- Tính cả hai khóa tốt nghiệp 2018 và 2019, số sinh viên làm trong lĩnh vực Tài chính nhiều hơn số sinh viên làm trong lĩnh vực Giảng dạy là bao nhiêu phần trăm?
- Tính cả hai khóa tốt nghiệp 2018 và 2019, lĩnh vực nào có tỷ lệ phần trăm nữ cao hơn các lĩnh vực còn lại?
- Tính cả hai khóa tốt nghiệp 2018 và 2019, ở các lĩnh vực trong bảng số liệu, số sinh viên nam có việc làm nhiều hơn số sinh viên nữ có việc làm là bao nhiêu phần trăm?

Ví dụ 6.

Số lượng khách đến tham quan tại Đà Nẵng trong 12 tháng được cho bởi biểu đồ như hình bên. Tính số tháng mà số người tham quan không dưới 400 người.

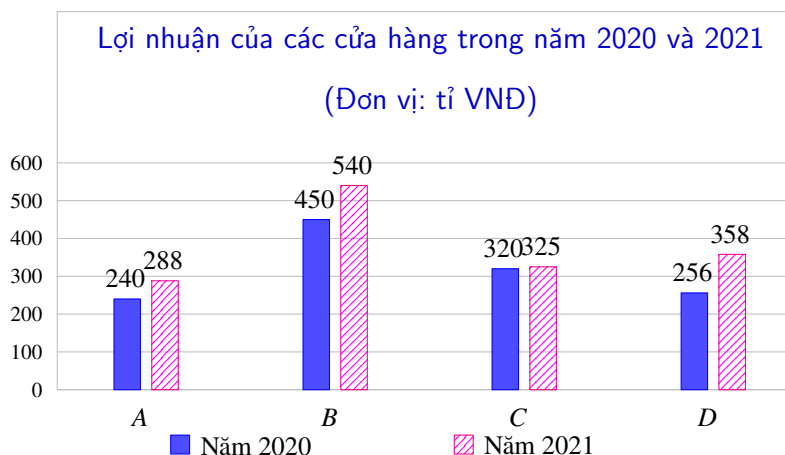


C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- 1 Mỗi học sinh lớp 10A đóng góp 2 quyển sách cho thư viện trường. Lớp trưởng thống kê lại số sách mà mỗi tổ trong lớp đóng góp ở bảng bên. Hãy cho biết lớp trưởng thống kê đã chính xác chưa. Tại sao?

Tổ	Tổng số sách
1	16
2	20
3	20
4	19
5	18

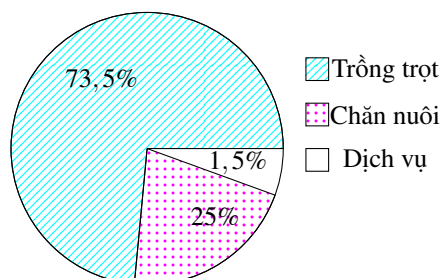
- 2 Biểu đồ dưới đây biểu diễn lợi nhuận mà 4 chi nhánh A, B, C, D của một doanh nghiệp thu được trong năm 2020 và 2021.



Hãy kiểm tra xem các phát biểu sau là đúng hay sai?

- Lợi nhuận thu được của các chi nhánh trong năm 2021 đều cao hơn 2020.
- So với năm 2020, lợi nhuận của các chi nhánh thu được trong năm 2021 đều tăng trên 10%.
- Chi nhánh B có tỉ lệ lợi nhuận tăng cao nhất.

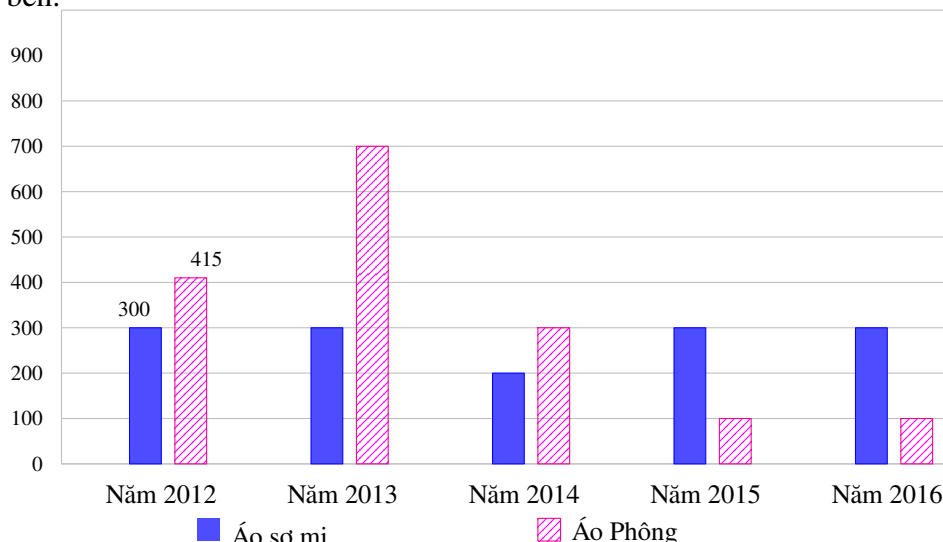
- 3 Giá trị sản xuất nông nghiệp phân theo ngành của nước ta năm 2010 với tổng giá trị 540,2 nghìn tỉ đồng được thể hiện qua biểu đồ như hình bên. Giá trị sản xuất ngành trồng trọt của nước ta là bao nhiêu?



D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dựa vào các thông tin được cung cấp ở biểu đồ bên, hãy trả lời các câu từ 1 đến câu 3:

Theo báo cáo thường niên năm 2017 của ĐHQG-HCM, trong giai đoạn từ năm 2012 đến năm 2016, ĐHQG-HCM có 5.708 công bố khoa học, gồm 2.629 công trình được công bố trên tạp chí quốc tế và 3.079 công trình được công bố trên tạp chí trong nước. Bảng số liệu chi tiết được mô tả ở hình bên.



Câu 1. Trong giai đoạn 2012-2016, trung bình mỗi năm ĐHQG-HCM có bao nhiêu công trình được công bố trên tạp chí quốc tế?

- A. 526. B. 616. C. 571. D. 582.

Câu 2. Năm nào số công trình được công bố trên tạp chí quốc tế chiếm tỷ lệ cao nhất trong số các công bố khoa học của năm?

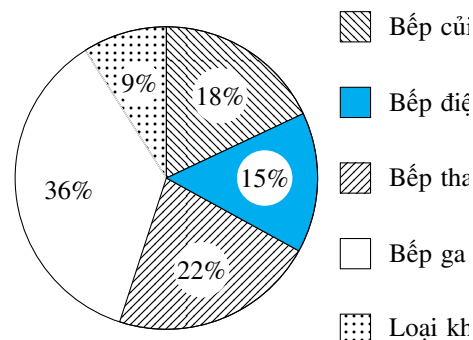
- A. Năm 2013. B. Năm 2014. C. Năm 2015. D. Năm 2016.

Câu 3. Trong năm 2015, số công trình công bố trên tạp chí quốc tế ít hơn số công trình công bố trên tạp chí trong nước bao nhiêu phần trăm?

- A. 7,7%. B. 16,6%. C. 116,6%. D. 14,3%.

Dựa vào các thông tin được cung cấp ở bên dưới, hãy trả lời các câu từ 4 đến câu 6

Theo thống kê của Sở GD&ĐT Hà Nội, năm học 2018-2019, dự kiến toàn thành phố có 101.460 học sinh xét tốt nghiệp THCS, giảm khoảng 4.000 học sinh so với năm học 2017-2018. Kỳ tuyển sinh vào THPT công lập năm 2019-2020 sẽ giảm 3.000 chỉ tiêu so với năm 2018-2019. Số lượng học sinh kết thúc chương trình THCS năm học 2018-2019 sẽ được phân luồng trong năm học 2019-2020 như biểu đồ hình bên



Câu 4. Theo dự kiến trong năm học 2019-2020, Sở GD&ĐT Hà Nội sẽ tuyển khoảng bao nhiêu học sinh vào trường THPT công lập?

- A. 62900 học sinh. B. 65380 học sinh. C. 60420 học sinh. D. 61040 học sinh.

Câu 5. Chỉ tiêu vào THPT công lập nhiều hơn chỉ tiêu vào THPT ngoài công lập bao nhiêu phần trăm?

- A. 24%. B. 42%. C. 63%. D. 210%.

Câu 6. Trong năm 2018-2019 Hà Nội đã dành bao nhiêu phần trăm chỉ tiêu vào THPT công lập?

- A. 62,0% . B. 60,7%. C. 61,5% . D. 63,1% .

—HẾT—

Bài 3

CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Số trung bình và trung vị

⚙ **Số trung bình:** Kí hiệu là $\bar{x}$.

- Với mẫu số liệu kích thước n là $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ thì

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

- Với mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần số thì

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n}$$

Trong đó, n_k là tần số của giá trị x_k và $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

- Với mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần suất (tần số tương đối) thì

$$\bar{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_k x_k$$

Trong đó, $f_k = \frac{n_k}{n}$ là tần suất (tần số tương đối) của giá trị x_k .

Ý nghĩa của số trung bình: Số trung bình cộng cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu. Khi các số liệu trong mẫu ít sai lệch với số trung bình cộng ta có thể lấy số trung bình cộng làm đại diện cho mẫu số liệu.

⚙ **Số trung vị:** Trong trường hợp mẫu số liệu có giá trị bất thường (rất lớn hoặc rất bé so với đa số các giá trị khác), người ta không dùng số trung bình để đo xu thế trung tâm mà dùng **số trung vị**, được xác định như sau:

Giả sử có một mẫu gồm n số liệu được sắp xếp theo thứ tự không giảm (hoặc không tăng). Khi đó **số trung vị** M_e là

- Số liệu ở vị trí thứ $\frac{n+1}{2}$ nếu n là lẻ.
- Trung bình cộng của hai số đứng giữa (số thứ $\frac{n}{2}$ và $\frac{n}{2} + 1$) nếu n là chẵn.

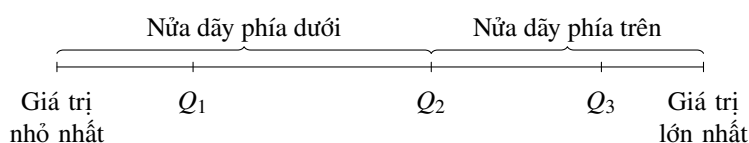
Ý nghĩa của số trung vị:

- Trung vị là giá trị chia đôi trong mẫu số liệu. Trung vị không bị ảnh hưởng bởi giá trị bất thường trong khi đó số trung bình cộng bị ảnh hưởng bởi giá trị bất thường.
- Nếu những số liệu trong mẫu có sự chênh lệch lớn thì ta nên chọn thêm trung vị làm đại diện cho mẫu số liệu đó nhằm điều chỉnh một số hạn chế khi sử dụng số trung bình cộng. Những kết luận về đối tượng thống kê rút ra khi đó sẽ tin cậy hơn.

2. Tứ phân vị

Trung vị chia mẫu ra làm hai phần. Trong thực tế người ta cũng quan tâm đến trung vị của mỗi phần đó. Ba trung vị này được gọi là **tứ phân vị** của mẫu. Để tìm tứ phân vị của mẫu số liệu có n giá trị, ta làm như sau:

- Sắp thứ tự mẫu số liệu gồm n số liệu thành một dãy không giảm.
- Tìm trung vị. Giá trị này là Q_2 .
- Tìm trung vị của nửa số liệu bên trái Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ). Giá trị này là Q_1 .
- Tìm trung vị của nửa số liệu bên phải Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ). Giá trị này là Q_3 .



Q_1, Q_2, Q_3 được gọi là các **tứ phân vị** của mẫu số liệu.

3. Mốt

Mốt của mẫu số liệu là giá trị xuất hiện với tần số lớn nhất và được kí hiệu là M_O .

Lưu ý:

- Một mẫu số liệu có thể có nhiều mốt.
- Khi tất cả các giá trị trong mẫu số liệu có tần số xuất hiện bằng nhau thì mẫu số liệu đó không có mốt.

B RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN

KN 1 Tìm số trung bình của bảng số liệu

Ví dụ 1. Hãy tính trung bình cộng của các mẫu số liệu sau (Kết quả làm trong đến hai chữ số thập phân)

- a) 5 6 6 4 10 17 8 13. b) 50 36 61 43 36 97 61.

Ví dụ 2. Cho biết nhiệt độ trung bình các tháng trong năm ở Hà Nội.

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nhiệt độ (°C)	16,4	17,0	20,2	23,7	27,3	28,8	28,9	28,2	27,2	24,6	21,4	18,2

- a) Nhiệt độ trung bình trong năm ở Hà Nội là bao nhiêu?
b) Nhiệt độ trung bình của tháng có giá trị thấp nhất; cao nhất là bao nhiêu độ C?

Ví dụ 3. Khối lượng 30 chi tiết máy được cho bởi bảng sau

Khối lượng(gam)	250	300	350	400	450	500	Cộng
Tần số	4	4	5	6	4	7	30

Tính số trung bình $\bar{x}$ (làm tròn đến chữ số thứ hai sau dấu phẩy) của bảng nói trên.

Ví dụ 4. Bảng liệt kê điểm thi học kì của Nam như sau

Môn	Toán	Lí	Hóa	Anh	Văn	Sử	Địa	Công nghệ	Tin học
Điểm	7	5	3	3	5	6	7	3	x

Biết rằng điểm thi các môn đều là hệ số 1. Hỏi Nam sẽ phải thi môn tin học bao nhiêu điểm thì sẽ có điểm trung bình học kì là 5 điểm (điểm số cho làm tròn thành số tự nhiên)?

Ví dụ 5. Một cửa hàng bán xe đạp thống kê số xe bán được hàng tháng trong năm 2021 như sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số xe	8	10	7	10	22	28	28	25	20	10	9	7

- Hãy tính số xe trung bình cửa hàng bán được mỗi tháng?
- Tính xem trong bốn quý (I, II, III, IV), quý nào cửa hàng bán được nhiều xe nhất?

KN

2

Tìm trung vị và tứ phân vị của bảng số liệu

Ví dụ 6. Điểm học kì một của một học sinh được cho bởi bảng số liệu sau (Đơn vị: điểm)

5	6	6	7	7	8	8	8,5	9
---	---	---	---	---	---	---	-----	---

- Tìm số trung vị của mẫu số liệu trên..
- Tìm các tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

Ví dụ 7. Điều tra về tuổi nghề của 30 công nhân được chọn ra từ 150 công nhân của một nhà máy A. Người ta thu được bảng số liệu ban đầu như sau:

7	2	5	9	7	4	3	8	10	4
2	4	4	5	6	7	7	5	4	1
9	4	14	2	8	5	5	7	3	8

- Tìm số trung vị của bảng số liệu trên
- Tìm các tứ phân vị của bảng số liệu trên.

Ví dụ 8. Thống kê GDP năm 2020 (đơn vị: tỉ đô la Mỹ) của 10 nước tại khu vực Đông Nam Á được kết quả như sau:

Brunei	Campuchia	Indonesia	Lào	Malaysia
12,02	25,95	1059,64	19,08	338,28
Myanma	Philippines	Singapore	Thái Lan	Việt Nam
81,26	362,24	339,98	501,89	340,82

- Hãy tìm các tứ phân vị của dãy số liệu trên.
- Giải thích ý nghĩa của các tứ phân vị này. Việt Nam có thuộc nhóm 25% quốc gia có GDP năm 2020 cao nhất trong vùng Đông Nam Á không?

KN

3

Tìm một cửa bảng số liệu

Ví dụ 9. Tuổi thọ của 30 bóng đèn được thắp thử (đơn vị: giờ) được cho bởi bảng số liệu thống kê dưới đây

1180	1150	1190	1170	1180	1170	1160	1170	1160	1150
1190	1180	1170	1170	1170	1190	1170	1170	1170	1180
1170	1160	1160	1160	1170	1160	1180	1180	1150	1170

Hãy tính một cửa bảng số liệu thống kê trên.

Ví dụ 10. Số đôi giày bán ra trong Quý IV năm 2020 của một cửa hàng được thống kê trong bảng tần số sau:

Cỡ giày	37	38	39	40	41	42	43	44
Tần số (Số đôi giày bán được)	40	48	52	70	54	47	28	3

- Một cửa mẫu số liệu trên là bao nhiêu?
- Cửa hàng đó nên nhập về nhiều hơn cỡ giày nào để bán trong tháng tiếp theo?

C

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Điểm kiểm tra môn Toán cuối học kỳ 1 của một nhóm 17 học sinh là:

8, 9, 7, 0, 2, 7, 9, 10, 4, 5, 7, 8, 8, 9, 10, 8, 3.

Tìm một và số trung vị của các số liệu thống kê đã cho.

- 2 Chiều cao (đơn vị: xăng-ti-mét) của các bạn tổ I ở lớp 10A lần lượt là:

165 155 171 167 159 175 165 160 158

Đối với mẫu số liệu trên, hãy tìm

- a) Số trung bình cộng. b) Trung vị.
c) Mốt. d) Tứ phân vị.

- 3 Tìm số trung bình, trung vị, mốt và tứ phân vị của mỗi mẫu số liệu sau đây:

- a) Số điểm mà năm vận động viên bóng rổ ghi được trong một trận đấu"

9 8 15 8 20

- b) Giá của một số loại giày (đơn vị nghìn đồng):

350 300 650 300 450 500 300 250

- c) Số kênh được chiếu của một số hãng truyền hình cáp:

36 38 33 34 32 30 34 35

- 4 Kết quả kiểm tra chất lượng đầu năm (thang điểm 30) của 41 học sinh của một lớp được cho bởi bảng số liệu thống kê dưới đây

Điểm	9	11	14	16	17	18	20	21	23	25	Tổng
Tần số	3	7	4	4	6	7	3	3	2	2	41

Hãy tìm số trung vị, tứ phân vị và mốt của bảng số liệu thống kê trên.

- 5 Hãy chọn số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mỗi mẫu số liệu sau. Giải thích và tính giá trị của số đặc trưng đó.

- a) Số mặt trăng đã biết của các hành tinh:

Hành tinh	Thủy tinh	Kim tinh	Trái đất	Hỏa tinh	Mộc tinh	Thổ tinh	Thiên vương tinh	Hải vương tinh
Số mặt trăng	0	0	1	2	63	34	27	13

- b) Số đường chuyền thành công trong một trận đấu của một cầu thủ bóng đá:

32 24 20 14 23.

- c) Chỉ số IQ của một nhóm học sinh: 60 72 63 83 68 74 90 86 74 80.

- d) Các sai số trong một phép đo: 10 15 18 15 14 13 42 15 12 14 42.

- 6 Số lượng học sinh giỏi Quốc gia năm học 2018 – 2019 của 10 trường Trung học phổ thông được cho như sau:

0 0 4 0 0 0 10 0 6 0.

- a) Tìm số trung bình, mốt, các tứ phân vị của mẫu số liệu trên.
b) Giải thích tại sao tứ phân vị thứ nhất và trung vị trùng nhau.

- 7 Bảng sau đây cho biết số chỗ ngồi của một số sân vận động được sử dụng trong Giải Bóng đá Vô địch Quốc gia Việt Nam năm 2018 (số liệu gần đúng).

Sân vận động	Cẩm Phả	Thiên Trường	Hàng Đẫy	Thanh Hóa	Mỹ Đình
Số chỗ ngồi	20 120	21 315	23 405	20 120	37 546

Các giá trị số trung bình, trung vị, một bị ảnh hưởng thế nào nếu bỏ đi số liệu chỗ ngồi của Sân vận động Quốc gia Mỹ Đình?

- 8 Bảng sau cho biết dân số của các tỉnh/thành phố Đồng bằng Bắc Bộ năm 2018 (đơn vị triệu người)

Tỉnh/thành phố	Hà Nội	Vĩnh Phúc	Bắc Ninh	Quảng Ninh	Hải Dương	Hải Phòng
Dân số	7,52	1,09	1,25	1,27	1,81	2,01

Tỉnh/thành phố	Hưng Yên	Thái Bình	Hà Nam	Nam Định	Ninh Bình
Dân số	1,19	1,79	0,81	1,85	0,97

- Tìm số trung bình và số trung vị của mẫu số liệu trên.
- Giải thích tại sao số trung bình và trung vị lại có sự sai khác nhiều.
- Nên sử dụng số trung bình hay số trung vị để đại diện cho dân số các tỉnh thuộc Đồng bằng Bắc Bộ?

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho mẫu số liệu: 23 41 71 29 48 45 72 41. Số trung bình của mẫu số liệu này là

- A. 43,89 . B. 46,25. C. 47,36 . D. 40,53 .

Câu 2. Cho mẫu số liệu: 23 41 71 29 48 45 72 41. Trung vị của mẫu số liệu này là

- A. 45. B. 41. C. 43,5 . D. 43.

Câu 3. Cho mẫu số liệu: 23 41 71 29 48 45 72 41. Tứ phân vị của mẫu số liệu này là

- A. $Q_1 = 29, Q_2 = 43, Q_3 = 71$. B. $Q_1 = 35, Q_2 = 43, Q_3 = 58$.
C. $Q_1 = 35, Q_2 = 43, Q_3 = 59,5$. D. $Q_1 = 23, Q_2 = 43, Q_3 = 72$.

Câu 4. Cho các số liệu thống kê được ghi trong bảng sau

Thời gian hoàn thành một sản phẩm ở một nhóm công nhân (đơn vị: phút)

3	4	3	4	6	7	8	10
2	3	5	4	3	2	4	7
2	3	4	6	5	7	8	5

Tính thời gian (làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy) trung bình hoàn thành một sản phẩm của nhóm công nhân đó.

A. $\bar{x} = 5,23$.

B. $\bar{x} = 6,79$.

C. $\bar{x} = 4,79$.

D. $\bar{x} = 3,79$.

Câu 5. Bảng số liệu sau đây thống kê thời gian hoàn thành sản phẩm ở một nhóm công nhân

Thời gian(phút)	42	44	45	48	50	54
Tần số	3	12	13	11	6	5

Tính giá trị trung bình $\bar{x}$ (làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy) về thời gian hoàn thành một sản phẩm của nhóm công nhân đó.

A. $\bar{x} = 46,74$.

B. $\bar{x} = 45,74$.

C. $\bar{x} = 47,74$.

D. $\bar{x} = 44,74$.

Câu 6. Cho các số liệu thống kê được ghi trong bảng sau

Điểm kiểm tra 45' môn toán của 30 học sinh lớp 11A1

1	2	6	5	8	8	9	10	6	5
2	8	7	5	5	4	9	10	3	4
3	6	4	2	1	7	8	7	2	1

Tính gần đúng (làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy) số trung bình cộng $\bar{x}$ điểm của 30 học sinh nói trên.

A. $\bar{x} \approx 5,27$.

B. $\bar{x} \approx 6,27$.

C. $\bar{x} \approx 4,27$.

D. $\bar{x} \approx 7,27$.

Câu 7. Cho mẫu số liệu 5; 13; 5; 7; 10; 2; 3. Tứ phân vị thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là

A. 3; 5; 10.

B. 5; 3; 10.

C. 10; 3; 5.

D. 10; 5; 3.

Câu 8. Cho mẫu số liệu 21; 35; 17; 43; 8; 59; 72; 119. Tứ phân vị thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là

A. 19; 39; 65,5.

B. 26; 43; 65,5.

C. 39; 19; 65,5.

D. 43; 26; 65,5.

Câu 9. Bạn An đạt được điểm môn Toán như sau: điểm hệ số 1 là 7; 9; 8; 8; 8, điểm hệ số 2 là 7; 8; 8, điểm thi học kỳ (hệ số 3) là 8. Điểm trung bình môn Toán của An là

A. $\bar{x} \approx 8,1$.

B. $\bar{x} \approx 7,6$.

C. $\bar{x} \approx 7,9$.

D. $\bar{x} \approx 7,7$.

Câu 10. Bảng liệt kê điểm thi học kỳ của Nam như sau

Môn	Toán	Lí	Hóa	Anh	Văn	Sử	Địa	Công nghệ	Tin học
Điểm	7	5	3	3	5	6	7	3	x

Nam sẽ phải cố môn tin học bao nhiêu điểm thì sẽ có điểm trung bình là 5 điểm (điểm số cho làm tròn thành số tự nhiên)?

A. $x = 4$.

B. $x = 5$.

C. $x = 6$.

D. $x = 7$.

Câu 11. Một cung thủ thực hiện 10 lần bắn, mong muốn của anh là đạt được điểm trung bình tối thiểu 7 điểm, kết quả 9 lần bắn đầu được cho bởi bảng sau

6	5	6	9	5	8	6	9	6	x
---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

Lần bắn cuối cùng cần thực hiện tối thiểu bao nhiêu điểm để đạt được mức trung bình đề ra (x là số tự nhiên)?

A. $x = 6$.

B. $x = 7$.

C. $x = 8$.

D. $x = 10$.

Câu 12. Số áo bán được của một cửa hàng được cho bởi bảng sau

Cỡ áo	36	37	38	39	40	41	42	Cộng
Tần số	13	45	126	110	126	40	5	465

Tính số trung vị M_e của áo bán được trong cửa hàng đó.

- A. $M_e = 37$. B. $M_e = 38$. C. $M_e = 39$. D. $M_e = 40$.

Câu 13. Khối lượng 30 quả trứng gà của được cho bởi bảng sau

Khối lượng(g)	25	30	35	40	45	50	Cộng
Tần số	3	5	10	6	4	2	30

Tính số trung vị M_e của bảng nói trên.

- A. $M_e = 30$. B. $M_e = 35$. C. $M_e = 40$. D. $M_e = 45$.

Câu 14. Cho các số liệu thống kê được ghi trong bảng sau

Điểm kiểm tra 45' môn toán của 30 học sinh lớp 11A1

1	2	6	5	8	8	9	10	6	5
2	8	7	5	5	4	9	10	3	4
3	6	4	2	1	7	8	7	2	1

Tìm số trung vị M_e điểm của 30 học sinh nói trên.

- A. $M_e = 3$. B. $M_e = 4$. C. $M_e = 5$. D. $M_e = 6$.

Câu 15. Kết quả của 100 học sinh dự kì thi học sinh giỏi Toán (thang điểm là 20) được cho trong bảng sau đây

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

Mốt M_O của bảng số liệu thống kê đã cho là

- A. $M_O = 9$. B. $M_O = 19$. C. $M_O = 15$. D. $M_O = 16$.

Câu 16. Điều tra tiền lương (nghìn đồng) hàng tháng của 30 công nhân của một xưởng may, ta có bảng phân bố tần số sau

Tiền lương	300	500	700	800	900	1000	Cộng
Tần số	3	5	6	5	6	5	30

Tìm tất cả các mốt M_O của bảng phân bố tần số đã cho.

- A. $M_O = 300$. B. $M_O = 1000$.
C. $M_O^{(1)} = 800$ và $M_O^{(2)} = 1000$. D. $M_O^{(1)} = 700$ và $M_O^{(2)} = 900$.

Câu 17. Tiền thưởng (triệu đồng) cho 43 cán bộ và nhân viên trong công ti X được thống kê như sau

Tiền thưởng	2	3	4	5	6	Cộng
Tần số	5	15	10	6	7	43

Mốt M_O của bảng phân bố tần số đã cho là

- A. $M_O = 2$. B. $M_O = 3$. C. $M_O = 5$. D. $M_O = 6$.

Câu 18. Người ta đã tiến hành thăm dò ý kiến của khách hàng về các mẫu 1, 2, 3, 4, 5 của một loại sản phẩm mới được sản xuất ở nhà máy X. Dưới đây là bảng phân bố tần số theo số phiếu tín nhiệm dành cho các mẫu kể trên.

Mẫu	1	2	3	4	5	Cộng
Tần số	2100	1860	1950	2000		10000

Trong sản xuất, nhà máy nên ưu tiên cho mẫu nào?

A. Mẫu 1.

B. Mẫu 3.

C. Mẫu 4.

D. Mẫu 5.

Câu 19. Bảng thống kê năng suất trong một ngày sản xuất của một công ty cho bởi bảng số liệu

Công xưởng	A	B	C	D
Số công nhân	30	40	x	y
Năng suất(sp/người)	40	30	20	15

Công xưởng C và D mất số liệu về số công nhân mỗi công xưởng. Biết rằng tổng số công nhân 2 xưởng đó là 80 và năng suất trung bình của bảng là 25 sp/người. Tìm $x; y$.

A. $x = 40; y = 40$.

B. $x = 30; y = 50$.

C. $x = 50; y = 30$.

D. $x = 60; y = 20$.

Câu 20. Để được cấp chứng chỉ A- Anh văn của một trung tâm ngoại ngữ, học viên phải trải qua 6 lần kiểm tra trắc nghiệm, thang điểm mỗi lần kiểm tra là 100, và phải đạt điểm trung bình từ 70 điểm trở lên. Qua 5 lần thi Minh đạt điểm trung bình là 64,5 điểm. Hỏi trong lần kiểm tra cuối cùng Minh phải đạt ít nhất là bao nhiêu điểm để được cấp chứng chỉ?

A. 97,5.

B. 96,5.

C. 94,5.

D. 93,5.

—HẾT—

Bài 4

CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO ĐỘ PHÂN TÁN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị

Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm. Ta có

⚙ **Khoảng biến thiên:** Kí hiệu là R , là hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong mẫu số liệu.

⚙ **Khoảng tứ phân vị:** Kí hiệu là Δ_Q , là hiệu số giữa tứ phân vị thứ ba và tứ phân vị thứ nhất, tức là

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1$$

Chú ý:

- Khoảng biến thiên dùng để đo độ phân tán của mẫu số liệu. Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.
- Khoảng tứ phân vị cũng là một số đo độ phân tán của mẫu số liệu. Khoảng tứ phân vị càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.
- Về bản chất, khoảng tứ phân vị là khoảng biến thiên của 50% số liệu chính giữa của mẫu số liệu đã sắp xếp.
- Một số tài liệu gọi khoảng biến thiên là biên độ và khoảng tứ phân vị là độ trải giữa.

2. Phương sai và độ lệch chuẩn

⚙ **Phương sai:** Để đo mức độ phân tán (so với số trung bình cộng) ta dùng phương sai s^2 . Cách tính như sau:

- Với mẫu số liệu kích thước n là $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ thì

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - \bar{x}^2$$

- Với mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần số thì

$$s^2 = \frac{n_1 (x_1 - \bar{x})^2 + n_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k (x_k - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n} (n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + \dots + n_k x_k^2) - \bar{x}^2$$

Trong đó n_k là tần số của giá trị x_k và $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

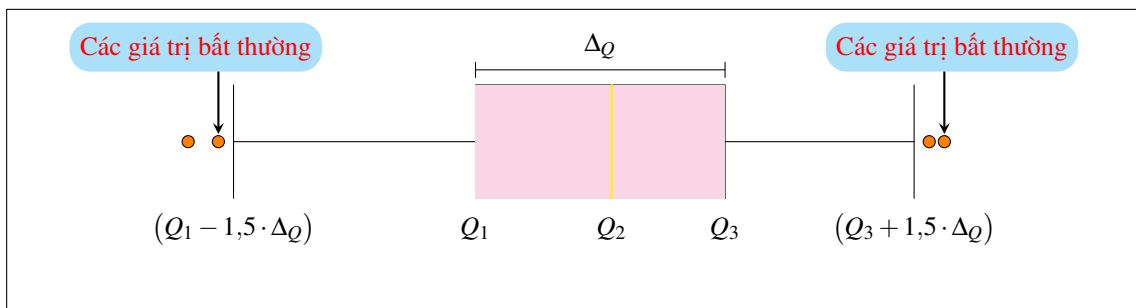
⚙ **Độ lệch chuẩn:** Căn bậc hai của phương sai gọi là độ lệch chuẩn, kí hiệu là s . Ta có $s = \sqrt{s^2}$.

Chú ý:

- Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì độ phân tán của các số liệu thống kê càng lớn.
- Phương sai s^2 và độ lệch chuẩn s đều được dùng để đánh giá mức độ phân tán của các số liệu thống kê (so với số trung bình cộng). Nhưng khi cần chú ý đến đơn vị đo thì ta dùng s vì s có cùng đơn vị đo với dấu hiệu được nghiên cứu.

3. Phát hiện số liệu bất thường hoặc không chính xác bằng biểu đồ hộp

Trong mẫu số liệu thống kê, có khi gặp những giá trị quá lớn hoặc quá nhỏ so với đa số các giá trị khác. Những giá trị này được gọi là **giá trị bất thường**. Ta có thể dùng biểu đồ hộp để phát hiện các giá trị bất thường này.



Các số liệu **lớn hơn** $Q_3 + 1,5 \cdot \Delta_Q$ hoặc **bé hơn** $Q_1 - 1,5 \cdot \Delta_Q$ được xem là giá trị bất thường. Hay nói cách khác, các số liệu **không** thuộc đoạn $[Q_1 - 1,5 \cdot \Delta_Q; Q_3 + 1,5 \cdot \Delta_Q]$ là các số liệu bất thường.

B**RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN****KN****1****Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu**

⚙️ **Phương pháp:** Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của mẫu số liệu. Khi đó, khoảng biến thiên của mẫu số liệu là $R = M - m$.

⚙️ **Lưu ý:** Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

≡ **Ví dụ 1.** Tuổi thọ trung bình người dân của 11 nước được thống kê như sau:

69 77 75 83 65 75 74 68 73 72 71

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên.

≡ **Ví dụ 2.** Điểm thi học kì 2 môn Toán và Ngữ văn của một nhóm học sinh được ghi lại như sau

Toán	9	8,5	7	6,3	5	9,5	8
Ngữ văn	6	6,5	8	7,3	5,5	8,3	6,5

Hãy tìm khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu trên. Từ đó chỉ ra mẫu số liệu có độ phân tán lớn hơn.

Phương pháp: Ta xác định các tứ phân vị Q_1, Q_2, Q_3 . Khi đó khoảng tứ phân vị là

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1.$$

Lưu ý: Khoảng tứ phân vị càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

Ví dụ 3. Mẫu số liệu sau đây cho biết cân nặng của 10 trẻ sơ sinh (đơn vị kg)

2,977 3,155 3,920 3,412 4,236

2,593 3,270 3,813 4,042 3,387

Hãy tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu này.

Ví dụ 4. Nhiệt độ trung bình các tháng trong năm 2019 của hai tỉnh Lai Châu và Lâm Đồng được ghi lại trong bảng sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lai Châu	14,8	18,8	20,3	23,5	24,7	24,2	23,6	24,6	22,7	21,0	18,6	14,2
Lâm Đồng	16,3	17,4	18,7	19,8	20,2	20,3	19,5	19,3	18,6	18,5	17,5	16,0

- Tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên.
- Hãy cho biết trong một năm, nhiệt độ địa phương nào ít thay đổi hơn?

Tìm phương sai s^2 :

- Tính số trung bình $\bar{x}$ của mẫu số liệu.
- Thay vào công thức: $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$

Tìm độ lệch chuẩn s : Tính phương sai s^2 của mẫu số liệu, suy ra độ lệch chuẩn $s = \sqrt{s^2}$.

Ví dụ 5. Bảng dưới đây thống kê tổng số giờ nắng trong năm 2019 theo từng tháng được đo bởi hai trạm quan sát khí tượng đặt ở Tuyên Quang và Cà Mau.

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tuyên Quang	25	89	72	117	106	117	156	203	227	146	117	145
Cà Mau	180	223	257	245	191	111	141	134	130	122	157	173

- a) Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của dữ liệu từng tỉnh.
b) Nếu nhận xét về sự thay đổi tổng số giờ nắng theo từng tháng ở mỗi tỉnh.

Ví dụ 6. Sản lượng lúa (đơn vị là tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng tần số dưới đây:

Sản lượng (x)	20	21	22	23	24	Tổng
Tần số (n)	5	8	11	10	6	$n = 40$

- a) Tính sản lượng trung bình của 40 thửa ruộng?
b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

KN**4****Tìm các số liệu bất thường của mẫu số liệu**

Để tìm các số liệu bất thường của một mẫu số liệu ta thực hiện các bước giải như sau:

- Tìm khoảng tứ phân vị $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$ của mẫu số liệu.
- Xác định đoạn $[Q_1 - 1,5 \cdot \Delta_Q; Q_3 + 1,5 \cdot \Delta_Q]$.
- Tìm các số liệu **không** thuộc đoạn $[Q_1 - 1,5 \cdot \Delta_Q; Q_3 + 1,5 \cdot \Delta_Q]$ là **các số liệu bất thường**

Ví dụ 7. Một cảnh sát giao thông ghi tốc độ (đơn vị: km/h) của 25 chiếc xe qua trạm như sau:

20 41 41 80 40 52 52 52 60 55 60 60 62
60 65 60 65 135 70 70 65 75 75 70 55

Hãy tìm các số liệu bất thường trong mẫu số liệu trên.

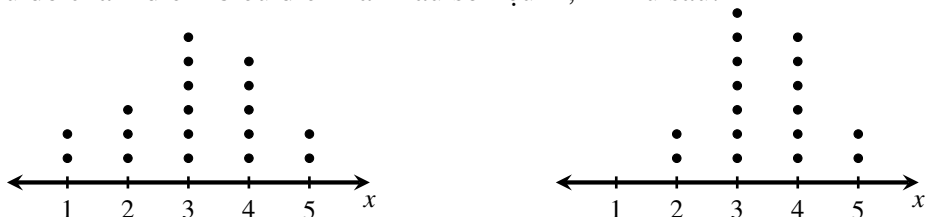
Ví dụ 8. Bình dùng đồng hồ đo thời gian để một vật rơi tự do (đơn vị: giây) từ vị trí A đến vị trí B trong 10 lần, cho kết quả như sau:

Lần đo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Số giây	0,398	0,399	0,408	0,410	0,406	0,405	0,402	0,401	0,290	0,402

Bình nghĩ là giá trị 0,290 ở lần đo thứ 9 không chính xác. Hãy kiểm tra nghi ngờ của Bình.

C**BÀI TẬP TỰ LUYỆN****1**

Cho hai biểu đồ chấm điểm biểu diễn hai mẫu số liệu A, B như sau:



Trong đó, mỗi chấm biểu diễn một giá trị trong mẫu số liệu.
Không tính, hãy cho biết

- a) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu nào lớn hơn.

b) Khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu có như nhau không?

- 2 Số máy tính bán được trong 7 tháng liên tiếp của một cửa hàng được ghi lại trong bảng sau:

83	79	92	71	69	83	74
----	----	----	----	----	----	----

Tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn.

- 3 Kết quả thi kết thúc học kì một của bạn Hoa được ghi lại trong bảng sau:

Văn	Địa	Lý	Hóa	Toán	Anh văn
6,0	8,0	7,5	8,5	7,0	7,5

Tìm số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn.

- 4 Số liệu sau đây cho ta số lãi mỗi tháng của một cửa hàng năm 2004 (đơn vị: triệu đồng).

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lãi	12	15	18	13	13	16	18	19	15	17	20	17

Tìm số trung bình. Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

- 5 Điều tra thời gian hoàn thành một sản phẩm của 20 công nhân, người ta thu được mẫu số liệu sau (thời gian tính bằng phút)

7	12	13	15	11	13	16	18	19	21
23	21	15	17	16	15	20	13	16	29

Hãy tìm các số liệu bất thường trong mẫu số liệu trên.

- 6 Thống kê điểm thi môn Toán của 450 học sinh trong một kì thi ở một trường trung học phổ thông. Người ta được bảng số liệu như sau

Điểm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Số học sinh	1	1	1	1	120	200	119	5	1	1

Hãy tìm các số liệu bất thường trong mẫu số liệu trên.

- 7 Kiểm tra khối lượng của một số quả măng cụt của hai lô hàng A và B được kết quả như sau (đơn vị: gam)

Lô A	85	82	84	83	80	82	84	85	80	81	80	82	85	85
Lô B	81	80	82	84	82	82	85	80	80	83	84	86	78	87

- Hãy tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của khối lượng măng cụt ở mỗi lô.
- Hãy tìm phương sai và độ lệch chuẩn của khối lượng măng cụt ở mỗi lô.
- Khối lượng của măng cụt ở lô hàng nào đều hơn?

- 8 Kết quả bài thi môn Toán của các bạn học sinh tổ 1 và tổ 2 cho ở bảng sau:

Tổ 1	7	8	9	6	7	8	7	9	10	7	8	6	8	9	8
Tổ 2	6	7	8	7	9	5	8	8	9	10	7	8	0	9	7

- Sử dụng số trung bình, hãy so sánh điểm thi của các bạn tổ 1 và tổ 2.

- b) Sau khi bỏ đi các giá trị ngoại lệ (nếu có) ở các điểm thi mỗi tổ, hãy so sánh lại điểm thi của các bạn tổ 1 và tổ 2 .
- c) Nên dùng số trung bình hay trung vị để so sánh điểm thi của các bạn tổ 1 và tổ 2 .

- 9) Điểm số của hai vận động viên A và B bắn cung trong 10 lần bắn thử để chuẩn bị cho Olympic Tokyo 2020 được ghi lại như sau:

Lần bắn	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Điểm số A	10	9	8	10	9	9	9	10	9	8
Điểm số B	5	10	10	10	10	7	9	10	10	10

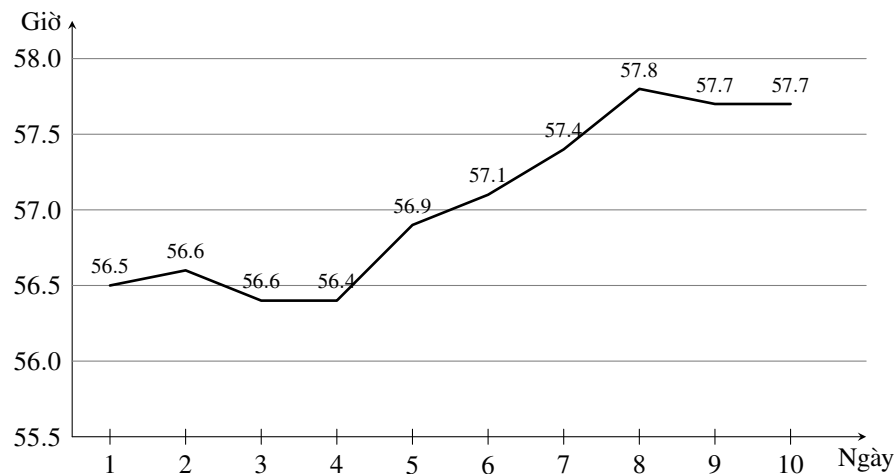
- a) Tìm khoảng biến thiên và độ lệch chuẩn của mỗi dãy số liệu trên.
- b) Vận động viên nào có thành tích bắn thử ổn định hơn?

- 10) Thông kê điểm của 100 học sinh tham gia kì thi học sinh giỏi toán (thang điểm là 20), kết quả được cho trong bảng sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2	$N = 100$

- a) Tính điểm thi trung bình của 100 học sinh ở bảng trên.
- b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

- 11) Giá bán lúc 10h sáng của một mã cổ phiếu A trong 10 ngày liên tiếp được ghi lại ở biểu đồ sau (đơn vị: nghìn đồng).



- a) Viết mẫu số liệu thống kê giá của mã cổ phiếu A từ biểu đồ trên.
- b) Tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó.
- c) Tính trung bình, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu.

- 12) Bảng sau ghi giá bán ra lúc 11 giờ trưa của 2 mã cổ phiếu A và B trong 10 ngày liên tiếp (đơn vị: nghìn đồng).

Ngày	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	45	45,1	45,3	35,5	45,6	45,5	45,4	45,5	45,4	45,2
B	47	47,4	47,8	68,4	49	48,8	48,8	48,8	48,6	49,2

- a) Biết có 1 trong 10 ngày trên có sự bất thường trong giá cổ phiếu. Hãy tìm ngày đó.
b) Sau khi bỏ đi ngày có giá bất thường, hãy cho biết giá cổ phiếu nào ổn định hơn. Tại sao?

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Khoảng tứ phân vị Δ_Q là

- A. $Q_3 - Q_1$. B. $Q_2 - Q_1$. C. $Q_3 - Q_2$. D. $(Q_1 + Q_3) : 2$.

Câu 2. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu 6; 7; 9; 4; 7; 5; 6; 6; 7; 9; 5; 6 là

- A. 3. B. 5. C. 4. D. 6.

Câu 3. Mẫu số liệu nào dưới đây có khoảng biến thiên là 13?

- A. 11, 28, 56, 12. B. 6, 12, 33, 23, 11. C. 25, 9, 13, 10. D. Tất cả đều sai.

Câu 4. Trong một tuần, nhiệt độ cao nhất trong ngày (đơn vị $^{\circ}\text{C}$) tại hai thành phố Hà Nội và TP Hồ Chí Minh được cho như sau:

Hà Nội:	28	27	30	29	27	24	25
TP Hồ Chí Minh:	31	33	32	33	29	32	34

Dựa vào khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu, hãy chỉ ra mẫu số liệu nào có độ phân tán lớn hơn.

- A. Mẫu số liệu “Hà Nội” có độ phân tán lớn hơn mẫu số liệu “TP Hồ Chí Minh”.
B. Mẫu số liệu “TP Hồ Chí Minh” có độ phân tán lớn hơn mẫu số liệu “Hà Nội”.
C. Hai mẫu số liệu có độ phân tán bằng nhau.
D. Tất cả đều sai.

Câu 5. Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu 2; 4; 5; 6; 6; 7; 3; 4 là

- A. 3. B. 3,5. C. 4. D. 4,5.

Câu 6. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu 4; 7; 5; 6; 6; 7; 9; 5; 6 là

- A. 2,5. B. 2. C. 1,5. D. 1.

Câu 7. Dãy số liệu 5; 6; 0; 3; 5; 10; 3; 4 có các giá trị ngoại lệ (giá trị bất thường) là

- A. 0. B. 10. C. 0, 10. D. Không có.

Câu 8. Mẫu số liệu mà tất cả các số trong mẫu này bằng nhau có phương sai là

- A. -1. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 9. Số giá trị trong mẫu số liệu nhỏ hơn tứ phân vị dưới Q_1 chiếm khoảng

- A. 50% số giá trị của dãy. B. 75% số giá trị của dãy.
C. 25% số giá trị của dãy. D. 100% số giá trị của dãy.

Câu 10. Cho mẫu số liệu sau: 156 158 160 162 164. Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu trên là

- A. 156. B. 157. C. 158. D. 159.

Câu 11. Nếu đơn vị của số liệu là kg thì đơn vị của phương sai là

- A. kg. B. kg^2 . C. Không có đơn vị. D. kg^3 .

Câu 12. Cho dãy số liệu thống kê: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Phương sai của các số liệu thống kê đã cho là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 13. Cho biết giá trị thành phẩm quy ra tiền (nghìn đồng) trong một tuần lao động của 7 công nhân là

180 190 190 200 210 210 220

Phương sai s^2 của dãy trên gần với số nào sau đây?

- A. 200. B. 171. C. 175. D. 190.

Câu 14. Cho dãy số liệu thống kê 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Độ lệch chuẩn của dãy số liệu thống kê gần bằng

- A. 2,30. B. 3,30. C. 4,30. D. 5,30.

Câu 15. Cho dãy số liệu thống kê 10, 8, 6, 2, 4. Độ lệch chuẩn của mẫu là

- A. 2,8. B. 8. C. 6. D. 2,4.

Câu 16. Sản lượng lúa (đơn vị là tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng tần số sau đây.

Sản lượng	20	21	22	23	24
Tần số	5	8	11	10	6

Tính độ lệch chuẩn.

- A. $s \approx 1,23$ (tạ). B. $s \approx 1,24$ (tạ). C. $s \approx 1,25$ (tạ). D. $s \approx 1,26$ (tạ).

Câu 17. Sản lượng lúa (đơn vị là tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng tần số sau đây

Sản lượng	20	21	22	23	24
Số thửa ruộng	5	8	11	10	6

Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu.

- A. 3. B. 4. C. 1. D. s^2 .

Câu 18. Điểm trung bình từng môn học của hai học sinh An và Bình trong năm học vừa qua được cho trong bảng sau.

Môn	Điểm của An	Điểm của Bình
Toán	8	8,5
Vật Lý	7,5	9,5
Hóa học	7,8	9,5
Sinh học	8,3	8,5
Ngữ văn	7	5
Lịch sử	8	5,5
Địa lý	8,2	6
Tiếng Anh	9	9
Thể dục	8	9
Công nghệ	8,3	8,5
Giáo dục công dân	9	10

Hỏi ai “học lệch” hơn?

- A. An. B. Bình.
C. Mức độ học lệch của hai người như nhau. D. Chưa đủ cơ sở kết luận.

Câu 19. Tiền thưởng (triệu đồng) cho cán bộ và nhân viên trong công ty được trình bày trong bảng tần số sau đây

Tiền thưởng (x)	2	3	4	5	6	
Tần số (n)	5	15	10	6	7	$n = 43$

Phương sai là

- A. 1,59. B. 1,58. C. 1,61. D. 1,57.

Câu 20. Bảng sau đây cho ta biết số cuốn sách mà học sinh của một lớp ở trường Trung học phổ thông đã đọc trong năm 2016.

Số sách	1	2	3	4	5	6	Cộng
Tần số	10	x	8	6	y	3	40

Tính x và y , biết rằng phương sai của bảng số liệu $s^2 \approx 2,52$.

- A. $x = 7, y = 6$. B. $x = 6, y = 7$. C. $x = 8, y = 5$. D. $x = 5, y = 8$.

—HẾT—