

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP HCM
TRƯỜNG THPT HÙNG VƯƠNG

BỘ MÔN: TOÁN - KHỐI LỚP: 10

TUẦN: 7,8/HK1 (từ 18/10/2021 đến 30/10/2021)

PHIẾU HƯỚNG DẪN HỌC SINH TỰ HỌC

I. Nhiệm vụ tự học, nguồn tài liệu cần tham khảo:

Nội dung 1: Các định nghĩa và tính chất tích của vectơ với một số. (*Đọc SGK bài 3 trang 14 và đề cương*)

Nội dung 2: Trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác (*Đọc SGK bài 3 trang 15 và đề cương*)

Nội dung 3: Điều kiện để hai vectơ cùng phương (*Đọc SGK bài 3 trang 15 và đề cương*)

Nội dung 4: Phân tích một vectơ theo hai vectơ cùng phương (*Đọc SGK bài 3 trang 15-16 và đề cương*)

Tham khảo thêm clip bài giảng...: *đường link (nếu có)*

II. Kiến thức cần ghi nhớ:

1. Định nghĩa: Tích của vectơ $\vec{a}$ với số thực $k \neq 0$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$

Quy ước: $0\vec{a} = \vec{0}$ và $k\vec{0} = \vec{0}$

2. Tính chất:

i) $(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ ii) $k(\vec{a} \pm \vec{b}) = k\vec{a} \pm k\vec{b}$

iii) $k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$ iv) $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ \vec{a} = \vec{0} \end{cases}$

v) $1\vec{a} = \vec{a}$, $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$

3. Điều kiện để hai vectơ cùng phương

- $\vec{b}$ cùng phương $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$) khi và chỉ khi có số k thỏa $\vec{b} = k\vec{a}$
- Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là có số k sao cho $\vec{AB} = k\vec{AC}$

4. Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương.

Cho $\vec{a}$ không cùng phương $\vec{b}$. Với mọi vectơ $\vec{x}$ luôn được biểu diễn $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$ với m, n là các số thực duy nhất.

III. BÀI TẬP:

➤ **DẠNG 1: Dựng và tính độ dài vectơ chứa tích một vectơ với một số.**

1. Phương pháp giải.

Sử dụng định nghĩa tích của một vectơ với một số và các quy tắc về phép toán vectơ để dựng vectơ chứa tích một vectơ với một số, kết hợp với các định lý pitago và hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính độ dài của chúng.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác đều ABC cạnh a . điểm M là trung điểm BC . tính độ dài của chúng.

a) $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MA}$

A. a

B. $2a$

C. $3a$

D. $4a$

b) $\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$

c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

A. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$

B. $\frac{a\sqrt{21}}{2}$

C. $\frac{a\sqrt{21}}{4}$

D. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$

d) $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA} - 2,5\overrightarrow{MB}$

A. $\frac{a\sqrt{127}}{4}$

B. $\frac{a\sqrt{127}}{8}$

C. $\frac{a\sqrt{127}}{3}$

D. $\frac{a\sqrt{127}}{2}$

Lời giải:

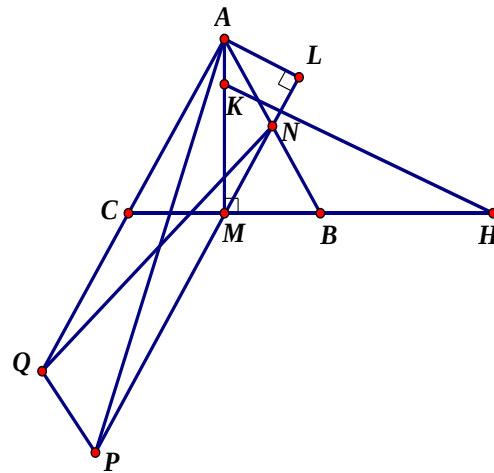
(Hình 1.14)

a) Do $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}$ suy ra theo quy tắc ba

điểm ta có

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CA}$$

Vậy $\left| \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MA} \right| = CA = a$



Hình 1.14

b) Vì $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM}$ nên theo quy tắc trừ ta có $\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MA}$

Theo định lý Pitago ta có

$$MA = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Vậy $\left| \overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \right| = MA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) Gọi N là trung điểm AB , Q là điểm đối xứng của A qua C và P là đỉnh của hình bình hành $AQPN$.

Khi đó ta có $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN}$, $2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AQ}$ suy ra theo quy tắc hình bình hành ta có

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP}$$

Gọi L là hình chiếu của A lên QN

Vì $MN \parallel AC \Rightarrow \angle ANL = \angle MNB = \angle CAB = 60^\circ$

Xét tam giác vuông ANL ta có $\sin \angle ANL = \frac{AL}{AN} \Rightarrow AL = AN \cdot \sin \angle ANL = \frac{a}{2} \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

$$\cos \angle ANL = \frac{NL}{AN} \Rightarrow NL = AN \cdot \cos \angle ANL = \frac{a}{2} \cos 60^\circ = \frac{a}{4}$$

Ta lại có $AQ = PN \Rightarrow PL = PN + NL = AQ + NL = 2a + \frac{a}{4} = \frac{9a}{4}$

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác ALP ta có

$$AP^2 = AL^2 + PL^2 = \frac{3a^2}{16} + \frac{81a^2}{16} = \frac{21a^2}{4} \Rightarrow AP = \frac{a\sqrt{21}}{2}$$

$$\text{Vậy } \left| \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \right| = AP = \frac{a\sqrt{21}}{2}$$

d) Gọi K là điểm nằm trên đoạn AM sao cho $MK = \frac{3}{4}MA$, H thuộc tia MB sao cho

$$MH = 2,5MB.$$

Khi đó $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MK}$, $2,5\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MH}$

Do đó $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA} - 2,5\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{HK}$

Ta có $MK = \frac{3}{4}AM = \frac{3}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a}{8}$, $MH = 2,5MB = 2,5 \cdot \frac{a}{2} = \frac{5a}{4}$

Áp dụng định lý Pitago cho tam giác vuông KMH ta có

$$KH = \sqrt{MH^2 + MK^2} = \sqrt{\frac{25a^2}{16} + \frac{27a^2}{64}} = \frac{a\sqrt{127}}{8}$$

$$\text{Vậy } \left| \frac{3}{4}\overrightarrow{MA} - 2,5\overrightarrow{MB} \right| = KH = \frac{a\sqrt{127}}{8}$$

Ví dụ 2: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a .

a) Chứng minh rằng $\vec{u} = 4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M .

b) Tính độ dài vectơ $\vec{u}$

A. $|\vec{u}| = a\sqrt{5}$

B. $|\vec{u}| = \frac{1}{2}a\sqrt{5}$

C. $|\vec{u}| = 3a\sqrt{5}$

D. $|\vec{u}| = 2a\sqrt{5}$

Lời giải:

(Hình 1.15)

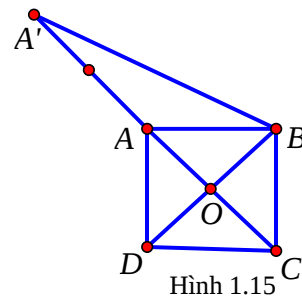
a) Gọi O là tâm hình vuông.

Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\begin{aligned}\vec{u} &= 4\vec{MO} + \vec{OA} - 3\vec{MO} + \vec{OB} + \vec{MO} + \vec{OC} - 2\vec{MO} + \vec{OD} \\ &= 4\vec{OA} - 3\vec{OB} + \vec{OC} - 2\vec{OD}\end{aligned}$$

Mà $\vec{OD} = -\vec{OB}$, $\vec{OC} = -\vec{OA}$ nên $\vec{u} = 3\vec{OA} - \vec{OB}$

Suy ra $\vec{u}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M



Hình 1.15

b) Lấy điểm A' trên tia OA sao cho $OA' = 3OA$ khi đó

$$\vec{OA'} = 3\vec{OA} \text{ do đó } \vec{u} = \vec{OA'} - \vec{OB} = \vec{BA'}$$

$$\text{Mặt khác } BA' = \sqrt{OB^2 + OA'^2} = \sqrt{OB^2 + 9OA^2} = a\sqrt{5}$$

$$\text{Suy ra } |\vec{u}| = a\sqrt{5}$$

➤ DẠNG 2: Chứng minh đẳng thức vectơ.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng các kiến thức sau để biến đổi vế này thành vế kia hoặc cả hai biểu thức ở hai vế cùng bằng biểu thức thứ ba hoặc biến đổi tương đương về đẳng thức đúng:

- Các tính chất phép toán vectơ
- Các quy tắc: quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành và quy tắc phép trừ
- Tính chất trung điểm:

M là trung điểm đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}$

M là trung điểm đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OM}$ (Với O là điểm tùy ý)

- Tính chất trọng tâm:

G là trọng tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

G là trọng tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$ (Với O là điểm tùy ý)

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD , O là trung điểm của IJ . Khẳng định nào sau đây đúng?

a)

A. $\vec{AC} + \vec{BD} = \vec{IJ}$

B. $\vec{AC} + \vec{BD} = \frac{1}{2}\vec{IJ}$

C. $\vec{AC} + \vec{BD} = 3\vec{IJ}$

D. $\vec{AC} + \vec{BD} = 2\vec{IJ}$

b)

A. $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{IJ}$

B. $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = 2\vec{OI}$

C. $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$

D. $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = 2\vec{OJ}$

c) với M là điểm bất kì

A. $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 3\vec{MO}$

B. $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 2\vec{MO}$

C. $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{MO}$

D. $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MO}$

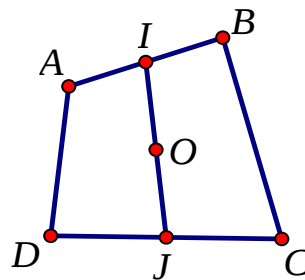
Lời giải:

(Hình 1.16)

a) Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC}$$

Tương tự $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD}$



Hình 1.16

Mà I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$, $\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$

Vậy $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} + 2\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IJ}$ đpcm

b) Theo hệ thức trung điểm ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OJ}$

Mặt khác O là trung điểm IJ nên $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$

Suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ} = \vec{0}$ đpcm

c) Theo câu b ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ do đó với mọi điểm M thì

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO} \text{ đpcm}$$

Ví dụ 2: Cho hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm G. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm tam giác BCA_1, ABC_1, ACB_1 . Chứng minh rằng $\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} = \vec{0}$

Lời giải:

Vì G_1 là trọng tâm tam giác BCA_1 nên $3\overrightarrow{GG_1} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA_1}$

Tương tự G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm tam giác ABC_1, ACB_1 suy ra

$$3\overrightarrow{GG_2} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC_1} \text{ và } 3\overrightarrow{GG_3} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GB_1}$$

Cộng theo vế với vế các đẳng thức trên ta có

$$\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} = 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC_1}$$

Mặt khác hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm G nên

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ và } \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC_1} = \vec{0}$$

Suy ra $\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} = \vec{0}$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Chọn khẳng định đúng?

a)

A. $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 4\overrightarrow{HO}$

B. $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$

C. $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HO}$

D. $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HO}$

b)

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$

B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$

C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$

D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OH}$

c)

A. $\overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GO} = \overrightarrow{OA}$

C. $\overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GO} = \overrightarrow{AB}$

B. $\overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GO} = \vec{0}$

D. $\overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GO} = \overrightarrow{AC}$

Lời giải:

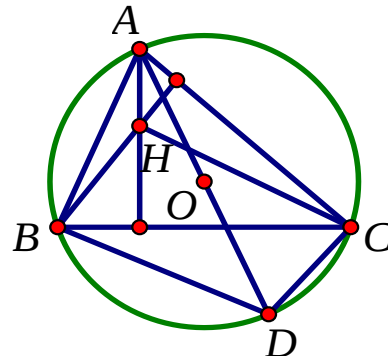
Hình 1.17)

a) Dễ thấy $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$ nếu tam giác ABC vuông

Nếu tam giác ABC không vuông gọi D là điểm đối xứng của A qua O khi đó

$BH \parallel DC$ (vì cùng vuông góc với AC)

$BD \parallel CH$ (vì cùng vuông góc với AB)



Hình 1.17

Suy ra $BDCH$ là hình bình hành, do đó theo quy tắc hình bình hành thì $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$ (1)

Mặt khác vì O là trung điểm của AD nên $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$

b) Theo câu a) ta có

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{HO}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} \text{ đpcm}$$

c) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$

Mặt khác theo câu b) ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GH} - 3\overrightarrow{OG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GO} = \vec{0}$$

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC với $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ và có trọng tâm G . Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu G lên cạnh BC, CA, AB .

Chứng minh rằng $a^2 \cdot \overrightarrow{GD} + b^2 \cdot \overrightarrow{GE} + c^2 \cdot \overrightarrow{GF} = \vec{0}$

Lời giải:

(hình 1.18)

Trên tia GD, GE, MF lần lượt lấy các điểm N, P, Q sao cho $GN = a$, $GP = b$, $GQ = c$ và dựng hình bình hành $GPRN$

$$\text{Ta có } a^2 \cdot \overrightarrow{GD} + b^2 \cdot \overrightarrow{GE} + c^2 \cdot \overrightarrow{GF} = \vec{0}$$

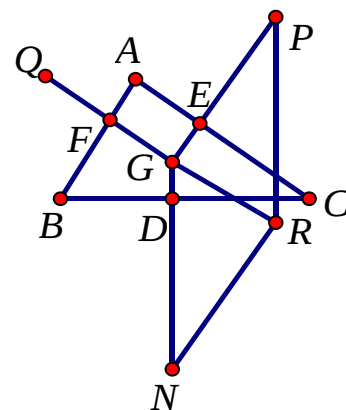
$$\Leftrightarrow a \cdot \overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{GN} + b \cdot \overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{GP} + c \cdot \overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{GQ} = \vec{0} (*)$$

Ta có $a \cdot \overrightarrow{GD} = 2S_{\triangle GBC}$, $b \cdot \overrightarrow{GE} = 2S_{\triangle GCA}$, $c \cdot \overrightarrow{GF} = 2S_{\triangle GAB}$, mặt trọng tâm tam giác ABC nên $S_{\triangle GBC} = S_{\triangle GCA} = S_{\triangle GAB}$ suy ra $a \cdot \overrightarrow{GD} = b \cdot \overrightarrow{GE} = c \cdot \overrightarrow{GF}$

$$\text{Vậy } (*) \Leftrightarrow \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}$$

Ta có $AC = GP = b$, $PR = BC = a$ và $\angle ACB = \angle GPR$ (góc có vuông góc với nhau)

Suy ra $\triangle ACB = \triangle GPR$ c.g.c



khác G là

cặp cạnh

Hình 1.18

$$\Rightarrow GR = AB = c \text{ và } PGR = BAC$$

Ta có $QGP + BAC = 180^\circ \Rightarrow QGP + GPR = 180^\circ \Rightarrow Q, G, R$ thẳng hàng do đó G là trung điểm của QR

Theo quy tắc hình bình hành và hệ thức trung điểm ta có

$$\overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} = \overrightarrow{GR} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}$$

$$\text{Vậy } a^2 \cdot \overrightarrow{GD} + b^2 \cdot \overrightarrow{GE} + c^2 \cdot \overrightarrow{GF} = \vec{0}.$$

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC với các cạnh $AB = c, BC = a, CA = b$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Lời giải:

Cách 1: (Hình 1.19) Gọi D là chân đường

phân giác góc A

Do D là đường phân giác trong góc A

nên ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \frac{c}{b} \overrightarrow{DC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IB} = \frac{c}{b} \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{ID}$$

$$\Leftrightarrow b + c \overrightarrow{ID} = b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} \quad (1)$$

Do I là chân đường phân giác nên ta có :

$$\frac{ID}{IA} = \frac{BD}{BA} = \frac{CD}{CA} = \frac{BD + CD}{BA + CA} = \frac{a}{b + c}$$

$$\Rightarrow b + c \overrightarrow{ID} = -a\overrightarrow{IA} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh

Cách 2: (hình 1.20) Qua C dựng đường thẳng song song với AI cắt BI tại B' ; song song với BI cắt AI tại A'

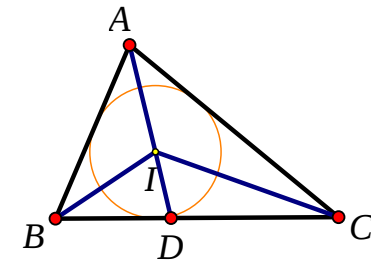
$$\text{Ta có } \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'} \quad (*)$$

Theo định lý Talet và tính chất đường

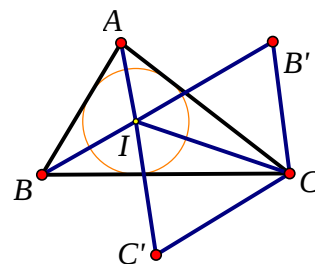
phân giác trong ta có :

$$\frac{IB}{IB'} = \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{c}{b} \Rightarrow \overrightarrow{IB'} = -\frac{b}{c} \overrightarrow{IB} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự : } \overrightarrow{IA'} = -\frac{a}{c} \overrightarrow{IA} \quad (2)$$



Hình 1.19



Hình 1.20

Từ (1) và (2) thay vào (*) ta có :

$$\overrightarrow{IC} = -\frac{a}{c} \overrightarrow{IA} - \frac{b}{c} \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

✎ **DẠNG 3: Xác định điểm M thỏa mãn một đẳng thức vector cho trước**

1. Phương pháp giải.

- Ta biến đổi đẳng thức vector về dạng $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$ trong đó điểm A và $\vec{a}$ đã biết. Khi đó tồn tại duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$, để dựng điểm M ta lấy A làm gốc dựng một vector bằng vector $\vec{a}$ suy ra điểm ngọn vector này chính là điểm M .

- Ta biến đổi về đẳng thức vectơ đã biết của trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho hai điểm A, B phân biệt. Xác định điểm M biết $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

Lời giải:

(hình 1.21)

$$\text{Ta có } 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$$

M nằm trên tia AB và $AM = 3AB$



Hình 1.21

Ví dụ 2: Cho tứ giác ABCD. Xác định điểm M, N, P sao cho

a) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

A. M là trung điểm AE, với E là trung điểm AC

B. M là trung điểm AF, với F là trung điểm AB

C. M là trung điểm AG, với G là trọng tâm ABC

D. M là trung điểm AI, với I là trung điểm BC

b) $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$

A. N là trung điểm của KH, K, H lần lượt là trung điểm của AC, BD

B. N là trung điểm của KH, K, H lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, BCD

C. N là trung điểm của KH, K, H lần lượt là trung điểm của AD, BC

D. N là trung điểm của KH, K, H lần lượt là trung điểm của AB, CD

c) $3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}$

A. P là trung điểm AG, G là trọng tâm tam giác ACD

B. P là trung điểm AG, G là trọng tâm tam giác BAD

C. P là trung điểm AG, G là trọng tâm tam giác BCD

D. P là trung điểm AG, G là trọng tâm tam giác ABC

Lời giải:

(hình 1.22)

a)

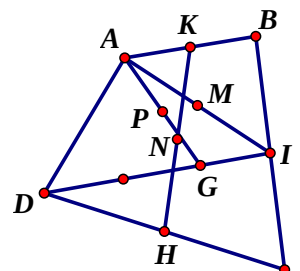
Gọi I là trung điểm BC suy ra

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$$

$$\text{Do đó } 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MI} = \vec{0}$$

Suy ra M là trung điểm AI



Hình 1.22

b) Gọi K, H lần lượt là trung điểm của AB, CD ta có

$$\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{NK} + 2\overrightarrow{NH} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{NK} + \overrightarrow{NH} = \vec{0} \Leftrightarrow N \text{ là trung điểm của } KH$$

c) Gọi G là trọng tâm tam giác BCD khi đó ta có $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 3\overrightarrow{PG}$

$$\text{Suy ra } 3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PG} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PG} = \vec{0} \Leftrightarrow P \text{ là trung điểm } AG.$$

Ví dụ 3: Cho trước hai điểm A, B và hai số thực α, β thỏa mãn $\alpha + \beta \neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Từ đó, suy ra với điểm bất kì M thì $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MI}$.

Lời giải:

Ta có: $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha \overrightarrow{IA} + \beta (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta) \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{AB} = \vec{0}. \Leftrightarrow (\alpha + \beta) \overrightarrow{AI} = \beta \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}.$$

Vì A, B cố định nên vector $\frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$ không đổi, do đó tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn điều kiện.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} &= \alpha (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + \beta (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\ &= (\alpha + \beta) \overrightarrow{MI} + (\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB}) = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MI} \quad \text{đpcm.} \end{aligned}$$

DẠNG 4: Phân tích một vector theo hai vector không cùng phương.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng các tính chất phép toán vector, ba quy tắc phép toán vector và tính chất trung điểm, trọng tâm trong tam giác.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

a) Hãy dựng các điểm M, N thỏa mãn: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = 2 \overrightarrow{BC}$

b) Hãy phân tích $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$ qua các véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{3} \vec{a} - \vec{b}$

B. $\overrightarrow{AN} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$

C. $\overrightarrow{MN} = -\frac{7}{3} \vec{a} + 3\vec{b}$

D. Cả A, B, C đều đúng

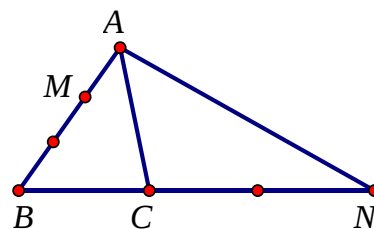
c) Gọi I là điểm thỏa: $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{CM}$. Chứng minh I, A, N thẳng hàng

Lời giải (hình 1.23)

a) Vì $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$ suy ra M thuộc cạnh AB và

$AM = \frac{1}{3} AB$; $\overrightarrow{CN} = 2 \overrightarrow{BC}$, suy ra N thuộc tia BC và $CN = 2BC$.

b) Ta có: $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3} \vec{a} - \vec{b}$



Hình 1.23

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + 3 \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -2\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3} \vec{a} - 2\vec{a} + 3\vec{b} = -\frac{7}{3} \vec{a} + 3\vec{b}.$$

$$\text{c) Ta có: } \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM} = \frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{a} - \vec{b} = -\frac{1}{3}(-2\vec{a} + 3\vec{b})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{AN} \Rightarrow A, I, N \text{ thẳng hàng.}$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC , trên cạnh BC lấy M sao cho $BM = 3CM$, trên đoạn AM lấy N sao cho $2AN = 5MN$. G là trọng tâm tam giác ABC .

a) Phân tích các vectơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ qua các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

A. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

B. $\overrightarrow{BN} = -\frac{23}{28}\overrightarrow{AB} + \frac{15}{28}\overrightarrow{AC}$

C. Cả A, B đều đúng

D. Cả A, B đều sai

b) Phân tích các vectơ $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{MN}$ qua các vectơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GB}$

A. $\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}$

B. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GA} + \frac{1}{7}\overrightarrow{GB}$

C. Cả A, B đều đúng

D. Cả A, B đều sai

Lời giải

(hình 1.24)

a) Theo giả thiết ta có: $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AN} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AM}$

suy ra $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{5}{7}\overrightarrow{AM}$

$= -\overrightarrow{AB} + \frac{5}{7}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{23}{28}\overrightarrow{AB} + \frac{15}{28}\overrightarrow{AC}$

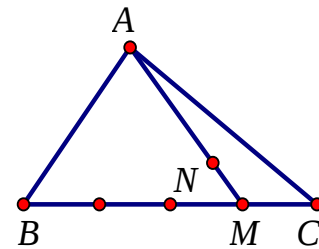
b) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ suy ra $\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}$

Ta có $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{7}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)$

$= -\frac{1}{14}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{14}\overrightarrow{AC}$

$= -\frac{1}{14}(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}) - \frac{3}{14}(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA})$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{GA} + \frac{1}{7}\overrightarrow{GB}$



Hình 1.24

Ví dụ 3: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M , N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AB và CD sao cho $AB = 3AM$, $CD = 2CN$ và G là trọng tâm tam giác MNB . Phân tích các vectơ

$\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AG}$ qua các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

A. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

B. $\overrightarrow{MN} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

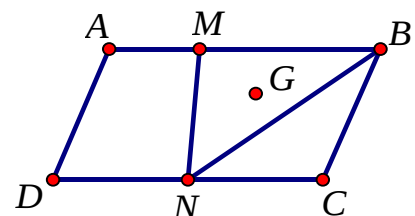
C. $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

D. Cả A, B, C đều đúng

Lời giải:

(hình 1.25)

Ta có: $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



Hình 1.25

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Vì G là trọng tâm tam giác MNB nên

$$3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{AB} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

IV. Nội dung chuẩn bị:

HS cần xem kỹ lý thuyết SGK trước khi tham khảo phần lý thuyết tóm lược và bài tập.

V. Đáp án bài tập tự luyện:

Nếu có thắc mắc HS liên hệ GVBM để được hỗ trợ.