

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP HCM**  
**TRƯỜNG THPT HÙNG VƯƠNG**

**BỘ MÔN: TOÁN - KHỐI LỚP: 12**

**TUẦN: 7,8/HK1 (từ 18/10/2021 đến 30/10/2021)**

**PHIẾU HƯỚNG DẪN HỌC SINH TỰ HỌC**

**I. Nhiệm vụ tự học, nguồn tài liệu cần tham khảo:**

Nội dung 1: Sơ đồ khảo sát hàm số. (*Đọc SGK bài 5 trang 31 và đề cương*)

Nội dung 2: Khảo sát một hàm đa thức và một hàm phân thức (*Đọc SGK bài 5 trang 32-41 và đề cương*)

Nội dung 3: Sự tương giao của đồ thị (*Đọc SGK bài 5 trang 42-43 và đề cương*)

Tham khảo thêm clip bài giảng...: *đường link (nếu có)*

**II. Kiến thức cần ghi nhớ:**

**A. TÓM TẮT GIÁO KHOA.**

**SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ**

**1. Tập xác định**

Tìm tập xác định của hàm số

**2. Sự biến thiên**

\* Xét chiều biến thiên của hàm số :

+ Tính đạo hàm  $y'$ ;

+ Tìm các điểm tại đó đạo hàm  $y'$  bằng 0 hoặc không xác định ;

+ Xét dấu đạo hàm  $y'$  và suy ra chiều biến thiên của hàm số

\* Tìm cực trị

\* Tìm các giới hạn tại vô cực, các giới hạn vô cực và tìm tiệm cận (nếu có)

\* Lập bảng biến thiên. (Ghi các kết quả tìm được vào bảng biến thiên)

**3. Tìm các khoảng lõm, lồi và điểm uốn của đồ thị hàm (bước này chỉ thực hiện với hàm bậc ba)**

+ Tính  $y''$

+ Giải phương trình  $y''=0$

+ Lập bảng xét dấu  $y''$

**4. Đồ thị**

Dựa vào bảng biến thiên và các yếu tố xác định ở trên để vẽ

**CHÚ Ý.**

1. Nếu hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T$  thì chỉ cần khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị trên một chu kỳ, sau đó tịnh tiến đồ thị song song với trục  $Ox$
2. Nên tính thêm tọa độ một số điểm, đặc biệt là giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ
3. Nên lưu ý đến tính đối xứng của đồ thị để vẽ cho chính xác

**HÀM SỐ BẬC BA :  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$**

**1. Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$**

**2. Đạo hàm:  $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ ,  $\Delta' = b^2 - 3ac$**

$\Delta' > 0$  : Hàm số có 2 cực trị.

$\Delta' \leq 0$  : Hàm số luôn tăng hoặc luôn giảm trên  $\mathbb{R}$ .

**3. Đạo hàm cấp 2:  $y'' = 6ax + 2b$ ,  $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$**

$x = -\frac{b}{3a}$  là hoành độ điểm uốn, đồ thị nhận điểm uốn làm tâm đối xứng.

4. Giới hạn: Nếu  $a > 0$  thì:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

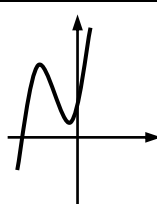
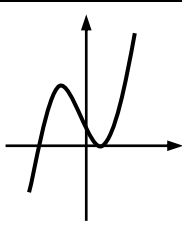
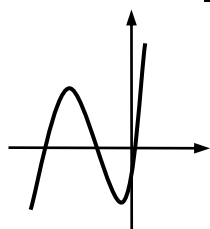
Nếu  $a < 0$  thì:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$

5. Bảng biến thiên và đồ thị:

**Trường hợp**  $a > 0$ :

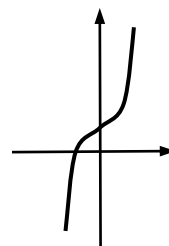
\*  $\Delta' = b^2 - 3ac > 0$ : Hàm số có 2 cực trị

|    |           |       |       |           |           |
|----|-----------|-------|-------|-----------|-----------|
| x  | $-\infty$ | $x_1$ | $x_2$ | $+\infty$ |           |
| y' | +         | 0     | -     | 0         | +         |
| y  | $-\infty$ | CĐ    |       | CT        | $+\infty$ |



\*  $\Delta' = b^2 - 3ac \leq 0 \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ : Hàm số luôn tăng trên  $\mathbb{R}$ .

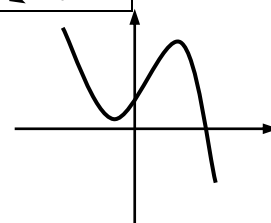
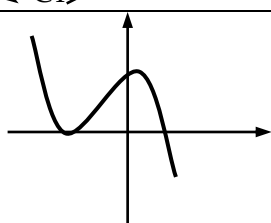
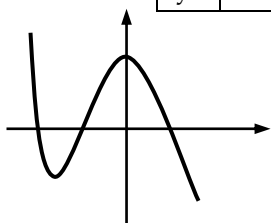
|      |           |                |
|------|-----------|----------------|
| x    | $-\infty$ | $+\infty$      |
| $y'$ | +         |                |
| y    | $-\infty$ | ↗<br>$+\infty$ |



**Trường hợp**  $a < 0$ :

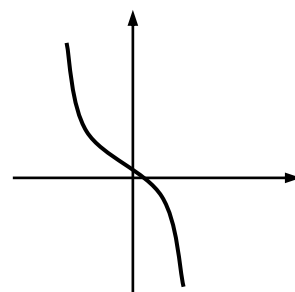
\*  $\Delta' = b^2 - 3ac > 0$ : Hàm số có 2 cực trị.

|    |           |                                                                                     |       |           |           |
|----|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------|-----------|-----------|
| x  | $-\infty$ | $x_1$                                                                               | $x_2$ | $+\infty$ |           |
| y' | -         | 0                                                                                   | +     | 0         | -         |
| y  | $+\infty$ |  |       |           | $-\infty$ |



\*  $\Delta' = b^2 - 3ac \leq 0 \Rightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ : Hàm số luôn giảm trên  $\mathbb{R}$ .

|      |           |                |
|------|-----------|----------------|
| x    | $-\infty$ | $+\infty$      |
| $y'$ | -         |                |
| y    | $+\infty$ | ↘<br>$-\infty$ |



**Một số tính chất của hàm số bậc ba**

1. Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi:  $\Delta' = b^2 - 3ac > 0$ .

2. Hàm số luôn đồng biến trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' = b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

3. Hàm số luôn nghịch biến trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' = b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

4. Để tìm giá cực trị ta lấy  $f(x)$  chia cho  $f'(x)$ :  $f(x) = f'(x).g(x) + rx + q$

Nếu  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của  $f'(x)$  thì:  $f(x_1) = rx_1 + q$ ;  $f(x_2) = rx_2 + q$

Khi đó đường thẳng đi qua các điểm cực trị là  $y = rx + q$ .

5. Đồ thị luôn có điểm uốn I và là tâm đối xứng của đồ thị.

6. Đồ thị cắt Ox tại 3 điểm phân biệt  $\Leftrightarrow$  hàm số có hai cực trị trái dấu nhau.

7. Đồ thị cắt Ox tại hai điểm phân biệt  $\Leftrightarrow$  đồ thị hàm số có hai cực trị và một cực trị nằm trên Ox.

8. Đồ thị cắt Ox tại một điểm  $\Leftrightarrow$  hoặc hàm số không có cực trị hoặc hàm số có hai cực trị cùng dấu.

9. Tiếp tuyến: Gọi I là điểm uốn. Cho  $M \in (C)$

\* Nếu  $M \equiv I$  thì ta có đúng một tiếp tuyến đi qua M và tiếp tuyến này có hệ số góc nhỏ nhất (nếu  $a > 0$ ), lớn nhất (nếu  $a < 0$ ).

\* Nếu M khác I thì có đúng 2 tiếp tuyến đi qua M.

**HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG**:  $y = ax^3 + bx^2 + c$

1. TXĐ:  $D = \mathbb{R}$

2. Đạo hàm:  $y' = 4ax^2 + 2bx = 2x(2ax + b) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$  hoặc  $x^2 = -\frac{b}{2a}$ .

\* Nếu  $ab \geq 0$  thì y có một cực trị  $x_0 = 0$

\* Nếu  $ab < 0$  thì y có 3 cực trị  $x_0 = 0$ ;  $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}}$

3. Đạo hàm cấp 2:  $y'' = 12ax^2 + 2b$ ,  $y'' = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{b}{6a}$

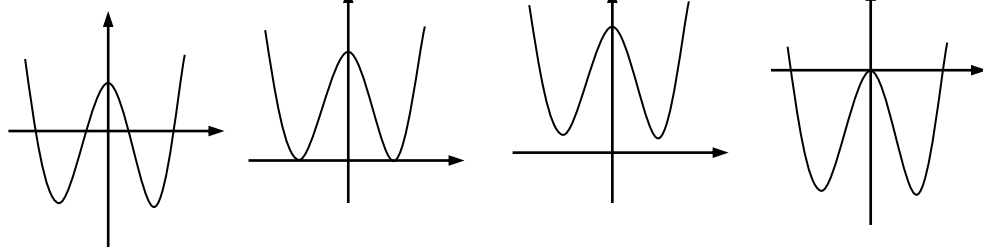
\* Nếu  $ab \geq 0$  thì đồ thị không có điểm uốn.

\* Nếu  $ab < 0$  thì đồ thị có 2 điểm uốn.

4. Bảng biến thiên và đồ thị:

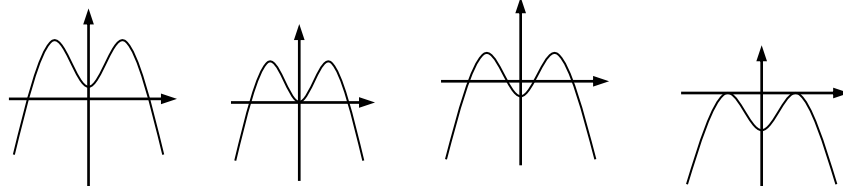
\*  $a > 0, b < 0$ : Hàm số có 3 cực trị.

|      |           |       |    |       |           |
|------|-----------|-------|----|-------|-----------|
| x    | $+\infty$ | $x_1$ | 0  | $x_2$ | $+\infty$ |
| $y'$ | -         | 0     | +  | 0     | -         |
| y    | $+\infty$ | CT    | CĐ | CT    | $+\infty$ |



\*  $a < 0, b > 0$ : Hàm số có 3 cực trị.

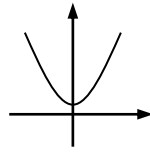
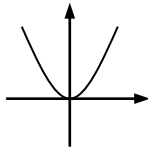
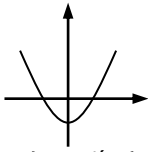
|      |           |       |    |       |           |
|------|-----------|-------|----|-------|-----------|
| x    | $+\infty$ | $x_1$ | 0  | $x_2$ | $+\infty$ |
| $y'$ | +         | 0     | -  | 0     | -         |
| y    | $-\infty$ | CĐ    | CT | CĐ    | $-\infty$ |



\*  $a > 0, b \geq 0$ : Hàm số có 1 cực trị.

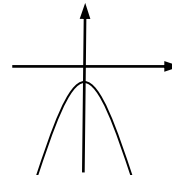
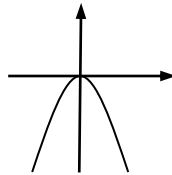
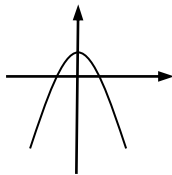
|      |           |   |           |
|------|-----------|---|-----------|
| x    | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $y'$ | -         | 0 | +         |

|   |           |    |           |
|---|-----------|----|-----------|
| y | $+\infty$ | CT | $+\infty$ |
|---|-----------|----|-----------|



\*  $a < 0, b \leq 0$ : Hàm số có 1 cực trị.

|    |           |    |           |
|----|-----------|----|-----------|
| x  | $-\infty$ | 0  | $+\infty$ |
| y' | +         | 0  | -         |
| y  | $-\infty$ | CĐ | $-\infty$ |



### Tính chất:

\* Đồ thị của hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$  ( $a \neq 0$ ) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt lập thành cấp số cộng khi phương trình:  $aX^2 + bX + c = 0$  có 2 nghiệm dương phân biệt thỏa  $X_1 = 9X_2$ .

\* Nếu đồ thị hàm số có ba điểm cực trị thì ba điểm cực trị tạo thành một tam giác cân có đỉnh nằm trên Oy.

\* Nếu đường thẳng d là tiếp tuyến của đồ thị thì đường thẳng d' đối xứng với d qua Ox cũng là tiếp tuyến của đồ thị.

**HÀM SỐ NHẤT BIẾN:**  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ,  $ac \neq 0$ .

1. TXĐ:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$

2. Đạo hàm:  $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ . Đặt  $m = ad - bc$ , ta có:

\* Nếu  $m > 0$  thì hàm số tăng trên từng khoảng xác định.

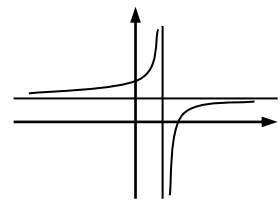
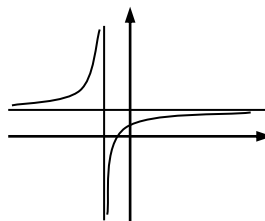
\* Nếu  $m < 0$  thì hàm số giảm trên từng khoảng xác định.

3. Các đường tiệm cận:  $x = -\frac{d}{c}$  là tiệm cận đứng và  $y = \frac{a}{c}$  là tiệm cận ngang.

4. Bảng biến thiên và đồ thị:

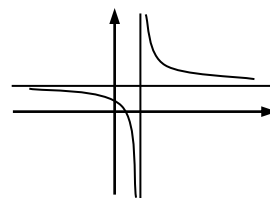
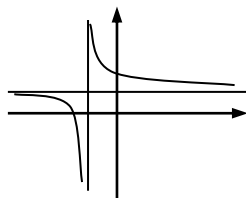
\*  $m > 0$

|    |               |                |               |
|----|---------------|----------------|---------------|
| x  | $-\infty$     | $-\frac{d}{c}$ | $+\infty$     |
| y' | +             |                | +             |
| y  | $\frac{a}{c}$ | $+\infty$      | $\frac{a}{c}$ |



\*  $m < 0$  :

|    |                                 |                                 |           |
|----|---------------------------------|---------------------------------|-----------|
| x  | $-\infty$                       | $-\frac{d}{c}$                  | $+\infty$ |
| y' | -                               |                                 | -         |
| y  | $\frac{a}{c}$<br>↘<br>$-\infty$ | $+\infty$<br>↘<br>$\frac{a}{c}$ |           |



5. Đồ thị của hàm số nhất biến gọi là một hypebol vuông góc có tâm đối xứng

$I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ , là giao điểm của 2 đường tiệm cận.

### III. BÀI TẬP:

#### Vấn đề 1 Hàm số bậc ba và vấn đề liên quan.

##### CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

**Ví dụ 1.1.6** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số:

1.  $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ .

2.  $y = -x^3 + 3x^2$

3.  $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x$

**Lời giải.**

1. Tập xác định :  $D = \mathbb{R}$

▪ Chiều biến thiên :

○ Ta có :  $y' = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$ ;

$y' = 0 \Leftrightarrow -3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  hoặc  $x = 2$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; 0)$  và  $(2; +\infty)$ , đồng biến trên khoảng  $(0; 2)$ .

Hàm số đạt cực đại tại điểm  $x = 2$ ; giá trị cực đại của hàm số là  $y(2) = 0$ .

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm  $x = 0$ ; giá trị cực tiểu của hàm số là  $y(0) = -4$

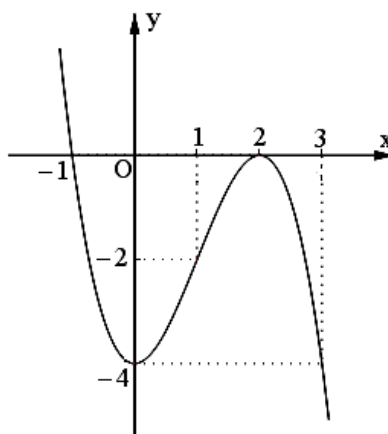
○ Giới hạn của hàm số tại vô cực :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$

▪ Bảng biến thiên :

|    |           |            |    |            |   |            |           |
|----|-----------|------------|----|------------|---|------------|-----------|
| x  | $-\infty$ | 0          | 2  | $+\infty$  |   |            |           |
| y' | -         | 0          | +  | 0          | - |            |           |
| y  | $+\infty$ | $\searrow$ | -4 | $\nearrow$ | 0 | $\searrow$ | $-\infty$ |

▪ Đồ thị :

○ Cho  $x = -1 \Rightarrow y = 0$ ;  $x = 3 \Rightarrow y = -4$



2. Tập xác định :  $D = \mathbb{R}$

▪ Chiều biến thiên:

○ Ta có :  $y' = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$ ;

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 2$$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; 0)$  và  $(2; +\infty)$ , đồng biến trên khoảng  $(0; 2)$ .

Hàm số đạt cực đại tại điểm  $x = 2$ ; giá trị cực đại của hàm số là  $y(2) = 4$

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm  $x = 0$ ; giá trị cực tiểu của hàm số là  $y(0) = 0$ .

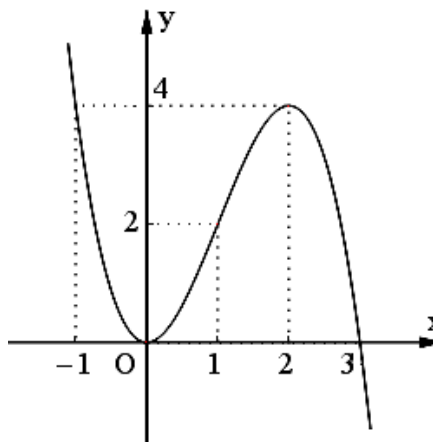
- Giới hạn của hàm số tại vô cực:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$

Bảng biến thiên:

|    |           |   |   |           |   |
|----|-----------|---|---|-----------|---|
| x  | $-\infty$ | 0 | 2 | $+\infty$ |   |
| y' | -         | 0 | + | 0         | - |
| y  | $+\infty$ | 0 | 4 | $-\infty$ |   |

▪ Đồ thị :

Cho  $x = -1 \Rightarrow y = 4$ ;  $x = 3 \Rightarrow y = 0$ .



3. Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$

▪ Chiều biến thiên:

- Giới hạn của hàm số tại vô cực:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

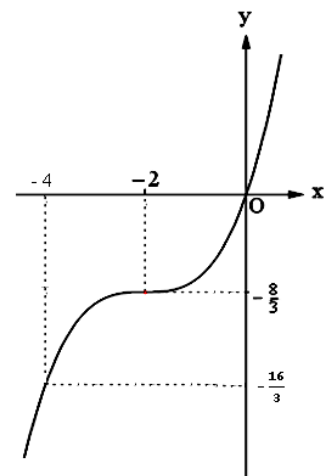
- Ta có:  $y' = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ , hàm số không có cực trị.

▪ Bảng biến thiên:

| x  | $-\infty$ | -2             | $+\infty$ |
|----|-----------|----------------|-----------|
| y' | +         | 0              | +         |
| y  | $-\infty$ | $-\frac{8}{3}$ | $+\infty$ |

▪ Đồ thị : Cho  $x = 0 \Rightarrow y = 0$



**Ví dụ 2.1.6** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 + 1$  có đồ thị (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số;
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại  $A(3;1)$ .

**Lời giải.****1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị:**

- Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$
- Chiều biến thiên:

Ta có:  $y' = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 2$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow x \in (0; 2); y' < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty).$$

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng  $(-\infty; 0)$  và  $(2; +\infty)$ , đồng biến trên khoảng  $(0; 2)$ .

Hàm số đạt cực đại tại điểm  $x = 2$ ; giá trị cực đại của hàm số là  $y(2) = 5$ . Hàm số đạt cực tiểu tại điểm  $x = 0$ ; giá trị cực tiểu của hàm số là  $y(0) = 1$ .

○ Giới hạn của hàm số tại vô cực:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ .

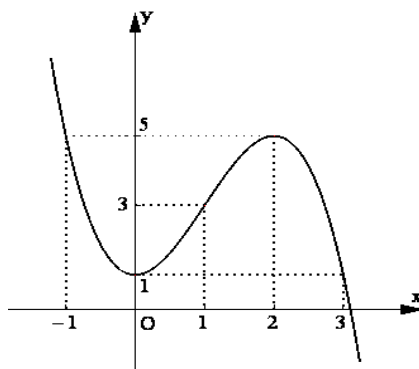
○ Bảng biến thiên:

|      |           |   |   |   |   |   |           |
|------|-----------|---|---|---|---|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ |   | 0 |   | 2 |   | $+\infty$ |
| $y'$ |           | - | 0 | + | 0 | - |           |
| $y$  | $+\infty$ |   |   |   | 5 |   | $-\infty$ |

○ Đồ thị:

Cho  $x = -1 \Rightarrow y = 5$ ;

$x = 3 \Rightarrow y = 1$ .

**2. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm  $A(3; 1)$  có dạng:**

$$y - 1 = y'(3) \cdot (x - 3) \Leftrightarrow y = -9(x - 3) + 1 \Leftrightarrow y = -9x + 28$$

**Ví dụ 3.1.6** Cho hàm số  $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$ , trong đó  $m$  là tham số

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho với  $m = 0$ ;

2. Với giá trị nào của  $m$  thì hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .

**Lời giải.****1. Khi  $m = 0$  thì hàm số là:  $y = x^3 + 3x^2 - 4$ .**

- Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$
- Chiều biến thiên:

○ Giới hạn của hàm số tại vô cực:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

○ Bảng biến thiên:

+ Ta có:  $y' = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = -2$$

Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; -2)$  và  $(0; +\infty)$ , nghịch biến trên khoảng  $(-2; 0)$ .

Hàm số đạt cực đại tại điểm  $x = -2$ ; giá trị cực đại của hàm số là  $y(-2) = 0$

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm  $x = 0$ ; giá trị cực tiểu của hàm số là  $y(0) = -4$

○ Giới hạn của hàm số tại vô cực:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ .

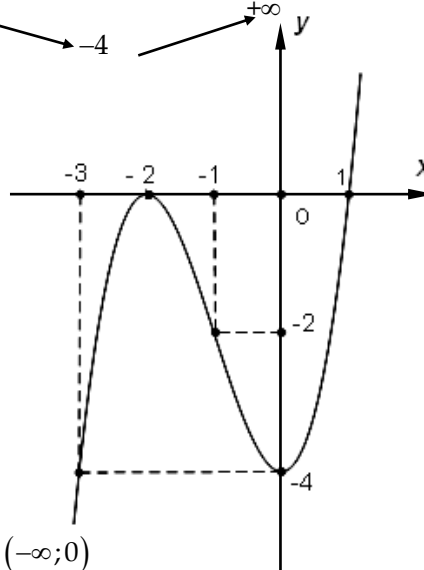
○ Bảng biến thiên:

|    |           |      |      |           |     |
|----|-----------|------|------|-----------|-----|
| x  | $-\infty$ | $-2$ | $0$  | $+\infty$ |     |
| y' | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $-$ |
| y  | $-\infty$ | $0$  | $-4$ | $+\infty$ |     |

$\nearrow$   $\searrow$   $\nearrow$   $\uparrow$  y

▪ Đồ thị :

Cho  $x = -3 \Rightarrow y = -4$  ;  $x = 1 \Rightarrow y = 0$



2. Hàm số  $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$

$$\Leftrightarrow y' = 3x^2 + 6x - m \geq 0, \forall x \in (-\infty; 0).$$

$$\text{Xét: } g(x) = 3x^2 + 6x - m, x \in (-\infty; 0)$$

$$g'(x) = 6x + 6 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Bảng biến thiên :

|         |           |          |      |  |
|---------|-----------|----------|------|--|
| x       | $-\infty$ | -1       | 0    |  |
| $g'(x)$ | -         | 0        | +    |  |
| $g(x)$  | $+\infty$ | $-3 - m$ | $-m$ |  |

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy:

$$y' = g'(x) = 3x^2 + 6x - m \geq 0, \forall x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow -3 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -3$$

Vậy khi  $m \leq -3$  thì yêu cầu của bài toán được thỏa mãn.

**Ví dụ 4.1.6** Cho hàm số  $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$  có đồ thị (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số;

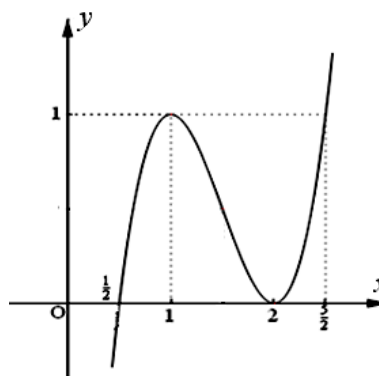
2. Tìm  $m$  để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt:  $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$

**Lời giải.**

+ Bảng biến thiên:

|    |           |   |   |           |   |
|----|-----------|---|---|-----------|---|
| x  | $-\infty$ | 1 | 2 | $+\infty$ |   |
| y' | +         | 0 | - | 0         | + |
| y  | $-\infty$ | 1 | 0 | $+\infty$ |   |

+ Đồ thị :



2. Ta có:  $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m \Leftrightarrow 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4 = m - 4$

Gọi  $(C): y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$  và  $(C'): y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4$

Ta thấy khi  $x \geq 0$  thì:  $(C'): y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

Mặt khác hàm số của đồ thị  $(C')$  là hàm số chẵn nên  $(C')$  nhận  $Oy$  là trục đối xứng. Từ đồ thị  $(C)$  ta suy ra đồ thị  $(C')$  như sau:

○ Giữ nguyên phần đồ thị  $(C)$  bên phải trục  $Oy$ , ta được  $(C'_1)$

○ Lấy đối xứng qua trục  $Oy$  phần  $(C'_1)$ , ta được  $(C'_2)$

○  $(C') = (C'_1) \cup (C'_2)$

Số nghiệm của phương trình:

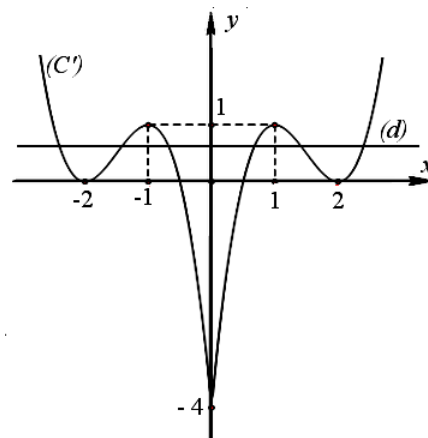
$$2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$$

$$\Leftrightarrow 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4 = m - 4$$

là số giao điểm của đồ thị  $(C')$  và đường thẳng  $(d): y = m - 4$ .

Từ đồ thị  $(C')$ , ta thấy yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow 0 < m - 4 < 1 \Leftrightarrow 4 < m < 5.$$



## Vấn đề 2 Hàm số bậc trùng phương và vấn đề liên quan.

### CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

**Ví dụ 1.2.6** Cho hàm số  $y = x^4 - 2x^2 - 1$  có đồ thị  $(C)$ .

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị  $(C)$  của hàm số;

2. Dùng đồ thị  $(C)$ , hãy biện luận theo  $m$  số nghiệm thực của phương trình

$$x^4 - 2x^2 - 1 = m \quad (*)$$

**Lời giải.**

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị:

▪ Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ .

▪ Chiều biến thiên:

Ta có:  $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$ ;

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \pm 1$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty); y' < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(0; 1)$ , đồng biến trên các khoảng  $(-1; 0)$  và  $(1; +\infty)$ .

Hàm số đạt cực đại tại điểm  $x = 0$ ; giá trị cực đại của hàm số là  $y(0) = -1$ .

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm  $x = \pm 1$ ; giá trị cực tiểu của hàm số là  $y(\pm 1) = -2$

○ Giới hạn của hàm số tại vô cực:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ .

○ Bảng biến thiên:

|      |           |      |      |     |           |     |      |     |           |
|------|-----------|------|------|-----|-----------|-----|------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$  | $1$ | $+\infty$ |     |      |     |           |
| $y'$ |           | $-$  | $0$  | $+$ | $0$       | $-$ | $0$  | $+$ |           |
| $y$  | $+\infty$ |      | $-2$ |     | $-1$      |     | $-2$ |     | $+\infty$ |

○ Đồ thị: Cho  $y = -1 \Rightarrow x = 0$ ;  $x = \pm \sqrt{2}$ .

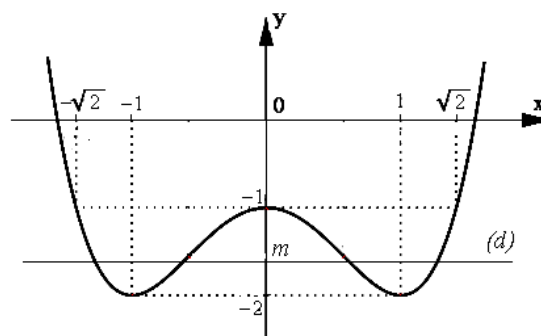
## 2. Biện luận theo $m$ số nghiệm

thực của phương trình:

Số nghiệm của (\*) là số giao điểm của (C) và (d):  $y = m$ .

Dựa vào đồ thị, ta thấy:

- + Khi  $m < -2$  thì (\*) vô nghiệm.
- + Khi  $\begin{cases} m = -2 \\ m > -1 \end{cases}$  thì (\*) có 2 nghiệm.
- + Khi  $-2 < m < -1$  thì (\*) có 4 nghiệm.
- + Khi  $m = -1$  thì (\*) có 3 nghiệm.



**Ví dụ 2.2.6** Cho hàm số  $y = \frac{1}{2}x^4 - mx^2 + \frac{3}{2}$  có đồ thị (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số  $m = 3$

2. Xác định  $m$  để đồ thị của hàm số có cực tiểu mà không có cực đại.

**Lời giải.**

1. Khi  $m = 3$  thì hàm số là:  $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$ .

▪ Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ .

▪ Chiều biến thiên:

○ Bảng biến thiên:

+ Ta có:  $y' = 2x^3 - 6x = 2x(x^2 - 3)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\sqrt{3}; 0)$  và  $(\sqrt{3}; +\infty)$ , nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; -\sqrt{3})$  và  $(0; \sqrt{3})$ .

Hàm số đạt cực đại tại điểm  $x = 0$ ; giá trị cực đại của hàm số là  $y(0) = \frac{3}{2}$ .

Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm  $x = \pm\sqrt{3}$ ; giá trị cực tiểu của hàm số là  $y(\pm\sqrt{3}) = -3$ .

○ Giới hạn của hàm số tại vô cực:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ .

+ Bảng biến thiên:

|    |           |             |      |               |           |   |           |
|----|-----------|-------------|------|---------------|-----------|---|-----------|
| x  | $-\infty$ | $-\sqrt{3}$ | 0    | $\sqrt{3}$    | $+\infty$ |   |           |
| y' | -         | 0           | +    | 0             | -         | 0 | +         |
| y  | $+\infty$ |             | $-3$ | $\frac{3}{2}$ | $-3$      |   | $+\infty$ |

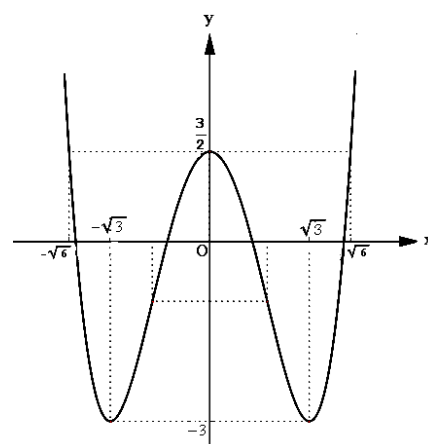
▪ Đồ thị:

○ Cho  $y = \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{6} \end{cases}$$

○ Vì hàm số đã cho là hàm số chẵn, nên đồ thị của nó nhận trục tung làm trục đối xứng.

○ Đồ thị (hình vẽ):



2. Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$

Đạo hàm:  $y' = 2x^3 - 2mx$ ;  $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$  hoặc  $x^2 = m$  (\*)

Hàm số có cực tiểu mà không có cực đại

$\Leftrightarrow y' = 0$  có một nghiệm duy nhất và  $y'$  đổi dấu từ âm sang dương khi  $x$  đi qua nghiệm đó

$\Leftrightarrow$  Phương trình (\*) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép  $x = 0 \Leftrightarrow m \leq 0$

Vậy giá trị cần tìm là:  $m \leq 0$ .

**Ví dụ 3.2.6** Cho hàm số  $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$  có đồ thị (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi  $m = 1$ ;

2. Tìm  $m$  để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho  $OA = BC$ ; trong đó O là gốc tọa độ, A là điểm cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

**Lời giải.**

1.  $y = x^4 - 4x^2 + 1$

• Tập xác định  $D = \mathbb{R}$

• Sự biến thiên :

o Chiều biến thiên :  $y' = 4x^3 - 8x$ ;  $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$  hoặc  $x = \pm\sqrt{2}$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; -\sqrt{2})$  và  $(0; \sqrt{2})$ ; đồng biến trên các khoảng  $(-\sqrt{2}; 0)$  và  $(\sqrt{2}; +\infty)$ .

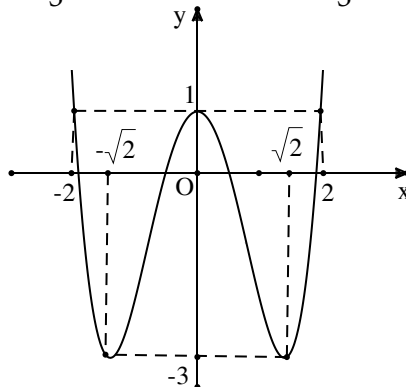
Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = \pm\sqrt{2}$ ;  $y_{CT} = -3$ , đạt cực đại tại  $x = 0$ ;  $y_{CD} = 1$

o Giới hạn:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

• Bảng biến thiên:

|      |           |             |     |            |           |
|------|-----------|-------------|-----|------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-\sqrt{2}$ | $0$ | $\sqrt{2}$ | $+\infty$ |
| $y'$ | -         | 0           | +   | 0          | -         |
| $y$  | $+\infty$ | $-3$        | $1$ | $-3$       | $+\infty$ |

- Đồ thị:



2. Xét  $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$  ( $C_m$ )

$\Rightarrow y' = 4x^3 - 4(m+1)x$

Đồ thị của hàm số ( $C_m$ ) có ba cực trị khi và chỉ khi phương trình  $y' = 0$  có ba nghiệm phân biệt.

Ta có:  $y' = 0 \Leftrightarrow 4x[x^2 - m - 1] = 0 \Leftrightarrow x = 0$  hoặc  $x^2 = m + 1$

Vì thế để thỏa mãn điều kiện trên thì phương trình  $x^2 = m + 1$

Cần có hai nghiệm phân biệt khác 0. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi :

$$m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1 \quad (1)$$

Kết luận thỏa mãn (1), ( $C_m$ ) có ba cực trị tại các điểm

$$A(0, m), B(-\sqrt{m+1}; -m^2 - m - 1), C(\sqrt{m+1}; -m^2 - m - 1)$$

Lúc đó:  $OA = OB \Leftrightarrow OA^2 = BC^2$  (do  $OA > 0$ ;  $BC > 0$ )

$$\Leftrightarrow m^2 = 4(m+1) \Leftrightarrow m^2 - 4m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \pm 2\sqrt{2}$$

**Ví dụ 4.2.6** Cho hàm số  $y = x^4 - mx^2 + m - 1$  (1) có đồ thị (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi  $m = 8$ ;

2. Xác định  $m$  sao cho đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

**Lời giải.**

1. Khi  $m = 8 \Rightarrow y = x^4 - 8x^2 + 7$ .

▪ Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ .

▪ Chiều biến thiên:

$$+ \text{Ta có: } y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4);$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \pm 2$$

Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-2; 0)$  và  $(2; +\infty)$ , nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; -2)$  và  $(0; 2)$ .

Hàm số đạt cực đại tại điểm  $x = 0$ ; giá trị cực đại của hàm số là  $y(0) = 7$ .

Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm  $x = \pm 2$ ; giá trị cực tiểu của hàm số là  $y(\pm 2) = -9$ .

○ Giới hạn của hàm số tại vô cực:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ .

○ Bảng biến thiên:

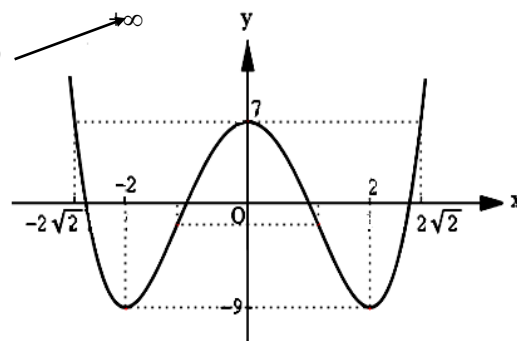
|      |           |      |     |      |           |
|------|-----------|------|-----|------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $2$  | $+\infty$ |
| $y'$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$  | $-$       |
| $y$  | $+\infty$ | $-9$ | $7$ | $-9$ | $+\infty$ |

▪ Đồ thị (hình vẽ):

○ Cho

$$y = 7 \Rightarrow x^4 - 8x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$$



○ Vì hàm số đã cho là hàm số chẵn nên đồ thị của nó nhận trục tung làm trục đối xứng.

2. Gọi  $(C_m): y = x^4 - mx^2 + m - 1$ .

Phương trình hoành độ giao điểm của  $(C_m)$  và trục  $Ox$ :

$$x^4 - mx^2 + m - 1 = 0 \quad (1).$$

Đặt  $t = x^2$ ,  $t \geq 0$ , suy ra  $(1) \Leftrightarrow t^2 - mt + m - 1 = 0 \quad (2).$

Yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow$  phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$  phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4m + 4 > 0 \\ S = m > 0 \\ P = m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq 2. \end{cases}$$

### Vấn đề 3 Hàm số hữu tỷ và vấn đề liên quan.

#### CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

**Ví dụ 3.3.6** Cho hàm số  $y = \frac{mx + 4}{x + m}$ , trong đó  $m$  là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số với  $m = 1$

2. Với giá trị nào của  $m$  thì hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$

**Lời giải.**

1. Khi  $m = 1$  thì hàm số là:  $y = \frac{x+4}{x+1}$ .

▪ Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

▪ Chiều biến thiên:

+ Ta có:  $y' = \frac{-3}{(x+1)^2} < 0, \forall x \neq -1$

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng  $(-\infty; -1), (-1; +\infty)$

○ Giới hạn vô cực, giới hạn tại vô cực và các đường tiệm cận:

+ Ta có:  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = +\infty$ , do đó đường thẳng  $x = -1$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

đã cho (khi  $x \rightarrow (-1)^-$  và khi  $x \rightarrow (-1)^+$ ).

+ Ta có:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$ , nên đường thẳng  $y = 1$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho (khi  $x \rightarrow +\infty$  và khi  $x \rightarrow -\infty$ )

○ Bảng biến thiên:

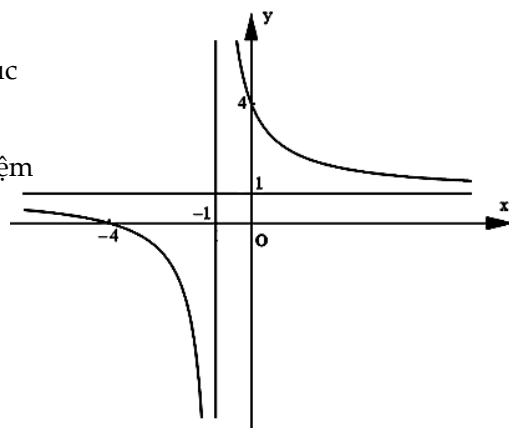
|      |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$      | $+\infty$ |
| $y'$ |           |           |           |
| $y$  | 1         | $+\infty$ | 1         |

▪ Đồ thị: (hình vẽ)

○  $y = 0 \Rightarrow x = -4; x = 0 \Rightarrow y = 4$ , tức là đồ thị của hàm số cắt trục

hoành tại điểm  $(-4; 0)$ , cắt trục tung tại  $(0; 4)$

○ Đồ thị của hàm số nhận giao điểm  $I(-1; 1)$  của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.



2. Với giá trị nào của  $m$  thì hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$

Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

$$y' = \frac{m^2 - 4}{(x+m)^2}$$

Yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (-\infty; 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ x = -m \notin (-\infty; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1.$$

Vậy giá trị cần tìm là:  $-2 < m \leq -1$ .

**Ví dụ 4.3.6** Cho hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-1}$ , gọi đồ thị của hàm số là  $(C)$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị  $(C)$  của hàm số;

2. Tìm  $m$  để đường thẳng  $(d): y = -x + m$  cắt  $(C)$  tại hai điểm phân biệt.

**Lời giải.**

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị

▪ Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

▪ Sự biến thiên:

○ Chiều biến thiên:  $y' = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in D$ .

Suy ra, hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng  $(-\infty; 1)$  và  $(1; +\infty)$ .

o Cực trị: Hàm số không có cực trị.

▪ Giới hạn:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$  và  $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$ .

Suy ra đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là đường thẳng  $x = 1$ , và một tiệm cận ngang là đường thẳng  $y = 2$ .

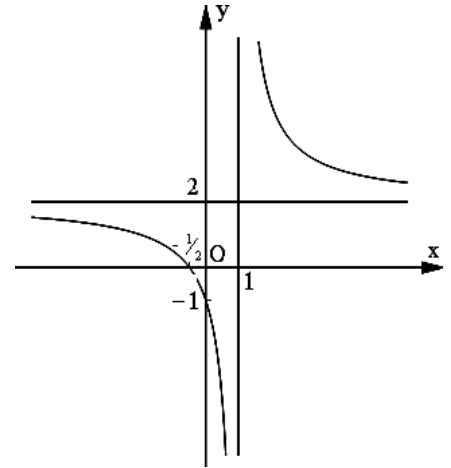
▪ Bảng biến thiên:

|    |           |           |           |
|----|-----------|-----------|-----------|
| x  | $-\infty$ | 1         | $+\infty$ |
| y' |           | -         | -         |
| y  | 2         | $-\infty$ | 2         |

▪ Đồ thị :

Đồ thị cắt trục tung tại  $A(0; -1)$ , cắt trục hoành tại  $B(-\frac{1}{2}; 0)$

Đồ thị nhận giao điểm của 2 đường tiệm cận  $I(1; 2)$  làm tâm đối xứng.



2. Đường thẳng (d):  $y = -x + m$  cắt (C) tại hai điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-1} = -x+m \text{ có hai nghiệm phân biệt}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (m-2)x + m+1 = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt khác 1.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-2)^2 - 4(m+1) > 0 \\ 1^2 - (m-2) \cdot 1 + m+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m > 0 \\ 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 8 \end{cases}$$

Vậy, với  $m < 0$  hoặc  $m > 8$  thì đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt.

**Ví dụ 5.3.6** Cho hàm số  $y = \frac{2x+1}{x+1}$ , gọi đồ thị của hàm số là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số;

2. Tìm k để đường thẳng  $y = kx + 2k + 1$  cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

**Lời giải.**

1. Xét hàm số  $y = \frac{2x+1}{x+1}$  (C)

- Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .
- Sự biến thiên:

o Chiều biến thiên:  $y' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$

Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(-1; +\infty)$

o Giới hạn và tiệm cận:

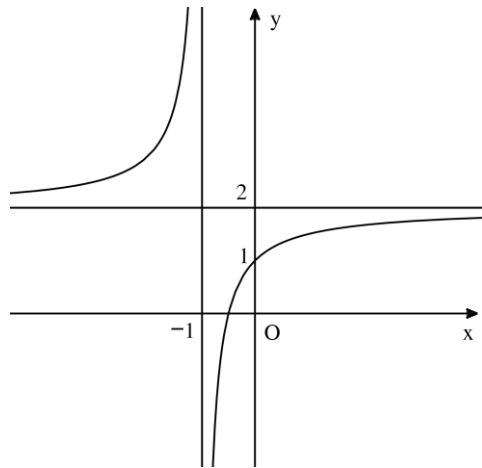
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2; \text{tiệm cận ngang: } y = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = -\infty; \text{tiệm cận đứng: } x = -1$$

• Bảng biến thiên:

|    |           |           |           |
|----|-----------|-----------|-----------|
| x  | $-\infty$ | -1        | $+\infty$ |
| y' |           | +         |           |
| y  | 2         | $+\infty$ | 2         |

- Đồ thị :



2. Gọi (d) là đường thẳng  $y = kx + 2k + 1$ . Khi đó hoành độ giao điểm của (d) và (C) là nghiệm của phương trình :  $kx + 2k + 1 = \frac{2x+1}{x+1}$

$$\Leftrightarrow (x+1)(kx+2k+1) = 2x+1 \quad (\text{do } x = -1 \text{ không là nghiệm})$$

$$\Leftrightarrow kx^2 + (3k-1)x + 2k = 0 \quad (1)$$

Để (d) và (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B thì (1) cần có hai nghiệm phân biệt. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ (3k-1)^2 - 8k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k^2 - (k+1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k < 3 - 2\sqrt{2} \vee k > 3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Khi k thỏa mãn (2) ta có:  $A(x_1; kx_1 + 2k + 1)$  và  $B(x_2; kx_2 + 2k + 1)$ , ở đây  $x_1, x_2$  là hai nghiệm phân biệt của (1).

$$\text{Ta có : } d(A, Ox) = d(B, Ox) \Leftrightarrow |kx_1 + 2k + 1| = |kx_2 + 2k + 1|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} kx_1 + 2k + 1 = kx_2 + 2k + 1 \\ kx_1 + 2k + 1 = -kx_2 - 2k - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k(x_1 - x_2) = 0 \\ k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \text{ (do } k \neq 0) \\ k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \quad (\text{do } x_1 \neq x_2)$$

Theo định lí Viet, ta có  $x_1 + x_2 = \frac{1-3k}{k}$ , từ đó ta có :

$$k \frac{1-3k}{k} + 4k + 2 = 0 \Leftrightarrow k + 3 = 0 \Leftrightarrow k = -3.$$

Rõ ràng  $k = -3$  thỏa mãn (2), nên là giá trị duy nhất cần tìm của tham số k.

**Ví dụ 7.3.6** Cho hàm số  $y = \frac{-x+1}{2x-1}$ , gọi đồ thị của hàm số là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số;

2. Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng  $y = x + m$  luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi  $k_1, k_2$  lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B. Tìm m để tổng  $k_1 + k_2$  đạt giá trị lớn nhất.

**Lời giải.**

1. Xét hàm số  $y = \frac{-x+1}{2x-1}$

- Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

- Sự biến thiên:

o Chiều biến thiên:  $y' = \frac{-1}{(2x-1)^2} < 0, \forall x \in D$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$  và  $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

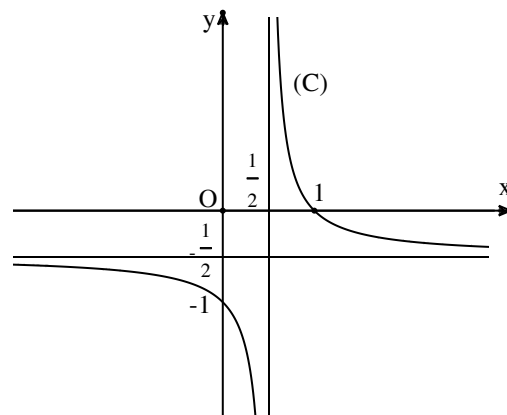
o Giới hạn và tiệm cận:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\frac{1}{2}$ ; tiệm cận ngang:  $y = -\frac{1}{2}$ .

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} y = +\infty, \quad \text{tiệm cận đứng: } x = \frac{1}{2}$$

• Bảng biến thiên:

|    |                |               |                |
|----|----------------|---------------|----------------|
| x  | $-\infty$      | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$      |
| y' |                |               |                |
| y  | $-\frac{1}{2}$ | $+\infty$     | $-\frac{1}{2}$ |

• Đồ thị:



2. Gọi d là đường thẳng  $y = x + m$

Hoành độ giao điểm của d với (C) là nghiệm của phương trình

$$x + m = \frac{-x + 1}{2x - 1} \quad (1)$$

Vì  $x = \frac{1}{2}$  không phải là nghiệm của  $-x + 1$ , nên

$$(1) \Leftrightarrow (x + m)(2x - 1) = -x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 2mx - m - 1 = 0 \quad (2)$$

Vì  $\Delta' = m^2 + 2m + 2 = (m + 1)^2 + 1 > 0 \forall m$ , nên (d) và (C) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi m.

Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm phân biệt của (2). Khi đó theo ý nghĩa hình học của đạo hàm, ta có:

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= -\frac{1}{(2x_1 - 1)^2} - \frac{1}{(2x_2 - 1)^2} \\ &= -\frac{4(x_1^2 + x_2^2) - 8x_1x_2 - 4(x_1 + x_2) + 2}{[4x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 1]^2} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{Theo định lí Viet, thì } x_1 + x_2 = \frac{-2m}{2} = -m; \quad x_1x_2 = -\frac{m+1}{2} \quad (4)$$

Thay (4) vào (3) và có:

$$k_1 + k_2 = -\frac{4m^2 + 4(m+1) + 4m + 2}{[-2(m+1) + 2m + 1]^2} = -4m^2 - 8m - 6 = -4(m+1)^2 - 2 \quad (5)$$

Từ (5) suy ra:  $k_1 + k_2$  lớn nhất  $\Leftrightarrow m = -1$ .

**Ví dụ 8.3.6** Cho hàm số  $y = \frac{2x}{x-1}$ , gọi đồ thị của hàm số là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số. Từ đó suy ra đồ thị của hàm số:  $y = \frac{2|x|}{|x|-1}$  ( $C_1$ )
2. Biện luận theo m số nghiệm  $x \in [-1; 2]$  của phương trình:  $(m-2)|x| - m = 0$

**Lời giải.**

1. + Bảng biến thiên :

|   |           |           |           |
|---|-----------|-----------|-----------|
| x | $-\infty$ | 1         | $+\infty$ |
| y |           | -         | -         |
| y | 2         | $+\infty$ | 2         |
|   |           | $-\infty$ |           |

+ Đồ thị (C)

\* Ta có : ( $C_1$ ):  $y = \frac{2|x|}{|x|-1} = \frac{2x}{x-1}$  khi  $x \geq 0$ .

Mặt khác  $y = \frac{2|x|}{|x|-1}$  là hàm số chẵn nên ( $C_1$ ) nhận Oy làm trục

đối xứng. Vậy đồ thị của hàm số  $y = \frac{2|x|}{|x|-1}$  ( $C_1$ ) gồm hai phần:

+ Phần 1: Phần của (C) khi  $x \geq 0$ .

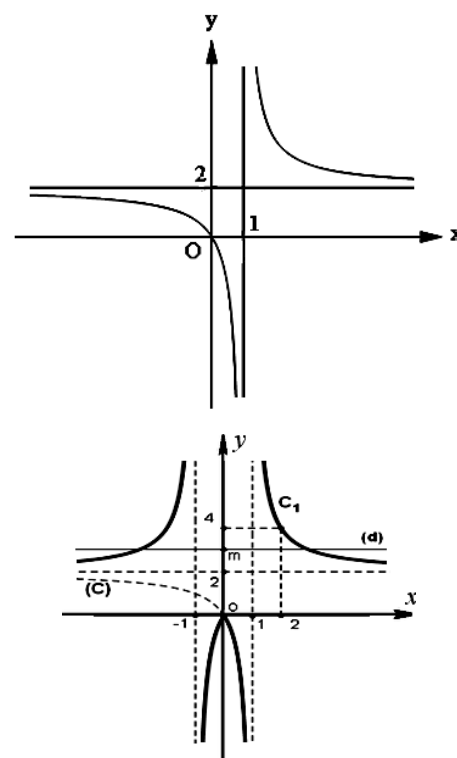
+ Phần 2: Đối xứng của phần 1 qua Oy.

2. Ta có :  $(m-2)|x| - m = 0 \Leftrightarrow \frac{2|x|}{|x|-1} = m$  (1).

Số nghiệm  $x \in [-1; 2]$  của (1) là số giao điểm của ( $C_1$ ) và (d):  $y = m$  trên đoạn  $[-1; 2]$ . Nhìn vào đồ thị ta thấy:

- Khi  $\begin{cases} m \geq 4 \\ m = 0 \end{cases}$  thì phương trình (1) có một nghiệm  $x \in [-1; 2]$ .
- Khi  $m < 0$  thì phương trình (1) có hai nghiệm  $x \in [-1; 2]$ .

Khi  $0 < m < 4$  thì phương trình (1) không có nghiệm



**Ví dụ 9.3.6** Cho hàm số  $y = \frac{-x^2 + x + 1}{x+1}$ , gọi đồ thị của hàm số là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số ;
2. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm  $M\left(0; \frac{5}{4}\right)$  và tiếp xúc với đồ thị.

**Lời giải.**

1. • Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

• Sự biến thiên:  $y' = \frac{-x^2 - 2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$ .

o Giới hạn và tiệm cận:  $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = -\infty$

$\Rightarrow x = -1$  là tiệm cận đứng.

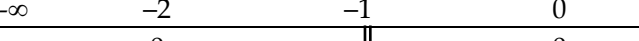
$$y = \frac{-x^2 + x + 1}{x+1} = -x + 2 - \frac{1}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y - (-x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} y - (-x + 2) = 0$$

$\Rightarrow y = -x + 2$  là tiệm cận xiên.

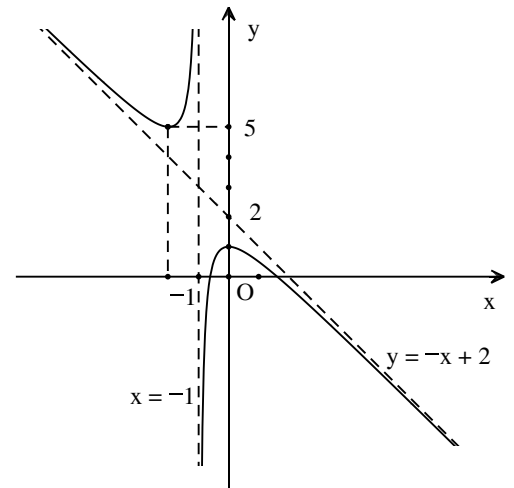
o Bảng biến thiên:

|    |           |    |   |    |  |   |   |           |
|----|-----------|----|---|----|--|---|---|-----------|
| x  | $-\infty$ | -2 |   | -1 |  | 0 |   | $+\infty$ |
| y' | -         | 0  | + |    |  | + | 0 | -         |
| y  | $+\infty$ |    |   |    |  |   | 1 | $-\infty$ |

  
Cực tiểu                      Cực đại

Đồ thị nhận điểm  $I(-1; 3)$  làm tâm đối xứng; cắt trục Oy tại

$(0,1)$ , cắt trục Ox tại  $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 0\right)$ .



2. Gọi (d) là đường thẳng  $y = kx + \frac{5}{4}$ .

Để (d) tiếp xúc với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ  $x_0$  khi hệ :

$$\begin{cases} \frac{-x_0^2 + x_0 + 1}{x_0 + 1} = kx_0 + \frac{5}{4} & (1) \\ \frac{-x_0^2 - 2x_0}{(x_0 + 1)^2} = k & (2) \end{cases} \quad \text{có nghiệm } x_0$$

$$\text{Thế } k \text{ từ (2) vào (1): } \frac{-x_0^2 + x_0 + 1}{x_0 + 1} = \frac{-x_0^2 - 2x_0}{(x_0 + 1)^2} \cdot x_0 + \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq -1 \\ (-x_0^2 + x_0 + 1)(x_0 + 1) = -x_0^2 - 2x_0^2 + \frac{5}{4}(x_0 + 1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq -1 \\ 3x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

- Tại  $x_0 = 1 \Rightarrow k = -\frac{3}{4}$ , có tiếp tuyến  $(T_1): y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ .
- Tại  $x_0 = -\frac{1}{3} \Rightarrow k = \frac{5}{4}$ , có tiếp tuyến  $(T_2): y = \frac{5}{4}x + \frac{5}{4}$ .

**Ví dụ 10.3.6** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1}$ , gọi đồ thị của hàm số là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số;

2. Dựa vào đồ thị của hàm số ở câu 1, vẽ đồ thị của hàm số  $y = \frac{x^2 + 2|x| - 1}{|x| + 1}$  và từ đồ thị của hàm số này, biện

luận về số nghiệm của phương trình  $\frac{x^2 + 2|x| - 1}{|x| + 1} = a$  theo các giá trị của tham số a.

**Lời giải.**

1.  $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1} = x + 1 - \frac{2}{x + 1}.$

• Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$

• Sự biến thiên:  $y' = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x + 1)^2} > 0$  với mọi  $x$  thuộc  $D$ : hàm số luôn luôn đồng biến trên  $D$ , không có cực đại và cực tiểu.

đại và cực tiểu.

o Giới hạn và tiệm cận:  $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow -1^+} y = -\infty$

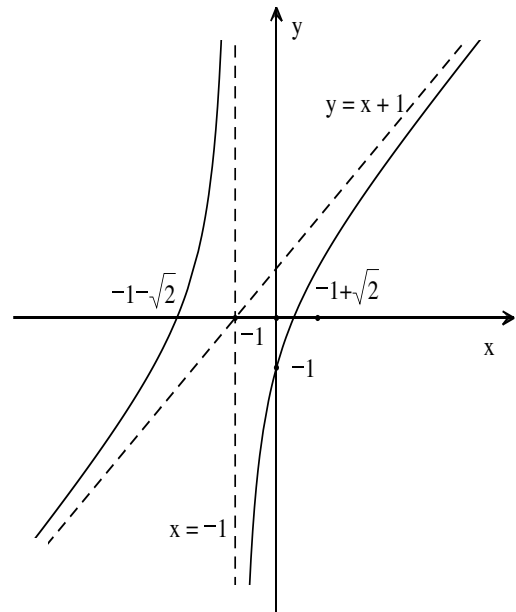
$\Rightarrow x = -1$  là tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} y - (x + 1) = 0 \Rightarrow y = x + 1$  là tiệm cận xiên.

o Bảng biến thiên:

|      |           |   |      |   |           |
|------|-----------|---|------|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ |   | $-1$ |   | $+\infty$ |
| $y'$ |           | + |      | + |           |
| $y$  |           |   |      |   |           |
|      | $-\infty$ |   |      |   | $+\infty$ |

Đồ thị nhận điểm  $I(-1; 0)$  làm tâm đối xứng; cắt trục Oy tại  $(0, -1)$ , cắt trục Ox tại  $(-1 - \sqrt{2}; 0)$ ,  $(-1 + \sqrt{2}; 0).$



2.  $y = \frac{x^2 + 2|x| - 1}{|x| + 1}$  là một hàm số chẵn (do  $f(-x) = f(x)$ ) nên đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng.

• Vẽ phần đồ thị của (1) ứng với  $x \geq 0$ .

• Lấy đối xứng của phần đồ thị trên qua trục Oy sẽ được đồ thị của hàm số

$$y = \frac{x^2 + 2|x| - 1}{|x| + 1} \text{ (hình bên).}$$

Số giao điểm của đường thẳng  $y = a$  và đồ thị này là số nghiệm của phương trình:

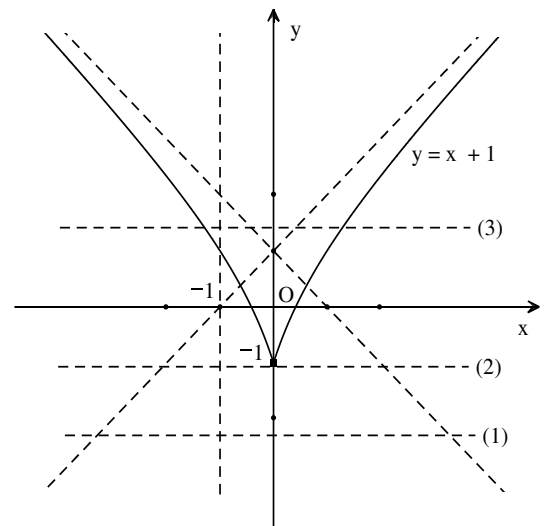
$$\frac{x^2 + 2|x| - 1}{|x| + 1} = a.$$

Xét qua 3 vị trí của đường thẳng  $y = a$ :

(1):  $a < -1$ : vô nghiệm;

(2):  $a = -1$ : một nghiệm  $x = 0$ ;

(3):  $a > -1$ : thỏa nghiệm.



**IV. Nội dung chuẩn bị:**

*HS cần xem kỹ lý thuyết SGK trước khi tham khảo phần lý thuyết tóm lược và bài tập.*

**V. Đáp án bài tập tự luyện:**

*Nếu có thắc mắc HS liên hệ GVBM để được hỗ trợ.*