

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP HCM
TRƯỜNG THPT HÙNG VƯƠNG

BỘ MÔN: TOÁN - KHỐI LỚP: 11

TUẦN: 3,4/HK1 (từ 20/9/2021 đến 02/10/2021)

PHIẾU HƯỚNG DẪN HỌC SINH TỰ HỌC

I. Nhiệm vụ tự học, nguồn tài liệu cần tham khảo:

Nội dung 1: **Hàm số $y = \sin x$ và hàm số $y = \cos x$.** (Đọc SGK bài 1 trang 4-14 và đề cương)

Nội dung 2: **Hàm số $y = \tan x$ và hàm số $y = \cot x$** (Đọc SGK bài 1 trang 4-14 và đề cương)

Nội dung 3: **Phương trình lượng giác cơ bản** (Đọc SGK bài 2 trang 16-28 và đề cương)

Tham khảo thêm clip bài giảng...: *đường link (nếu có)*

II. Kiến thức cần ghi nhớ:

1. Hàm số $y = \sin x$ và hàm số $y = \cos x$.

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với $\sin$ của góc lượng giác có số đo radian bằng x được gọi là hàm số $\sin$, kí hiệu là $y = \sin x$.

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với $\cos$ của góc lượng giác có số đo radian bằng x được gọi là hàm số $\cos$, kí hiệu là $y = \cos x$.

Tập xác định của các hàm số $y = \sin x; y = \cos x$ là $\mathbb{R}$.

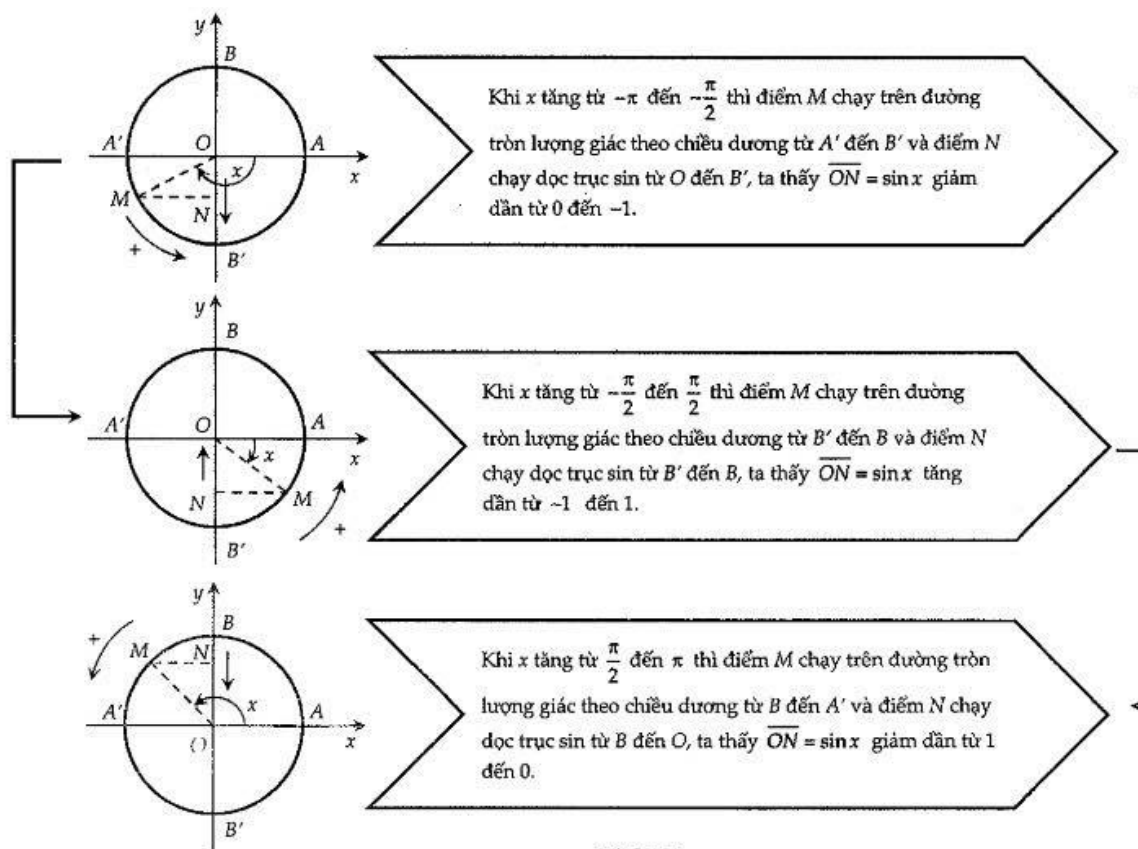
a) Hàm số $y = \sin x$

Nhận xét: Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ do hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$ là đối xứng và $-\sin x = \sin(-x)$.

Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kì 2π .

Sự biến thiên:

Sự biến thiên của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$ được biểu thị trong sơ đồ (hình 1.4) phía dưới:



Hình 1.4

Bảng biến thiên:

Từ đây ta có bảng biến thiên của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$ như sau:

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$y = \sin x$	0	-1	0	1	0

STUDY TIP

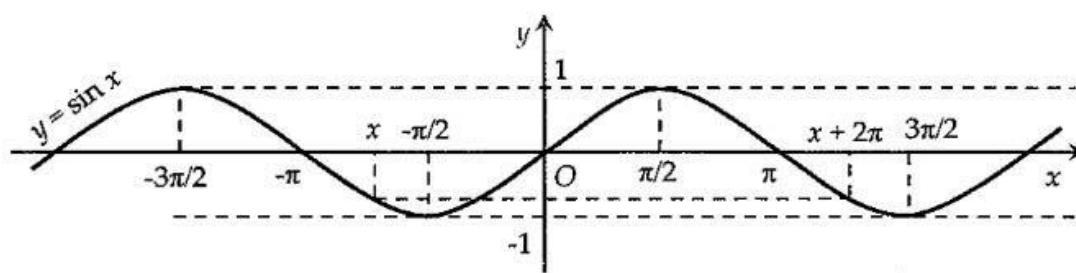
Khái niệm:

Hàm số $f(x)$ xác định trên D gọi là hàm tuần hoàn nếu tồn tại một số $T \neq 0$ sao cho với mọi x

thuộc D ta có $\begin{cases} x-T \in D; x+T \in D \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$.

Số dương T nhỏ nhất (nếu có) thỏa mãn tính chất trên gọi là chu kỳ của hàm tuần hoàn.

Đồ thị hàm số:



Hình 1.5

Nhận xét: Do hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kì 2π nên khi vẽ đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên $\mathbb{R}$ ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số trên đoạn $[0; \pi]$, sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc tọa độ O , ta được đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$, cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành ta được các đoạn có độ dài $2\pi; 4\pi, \dots$

STUDY TIP

Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Do tính chất tuần hoàn với chu kì 2π , hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

Tương tự ta suy ra được hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

GHI NHỚ

Hàm số $y = \sin x$:

- Có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- Có tập giá trị là $[-1; 1]$.
- Là hàm số lẻ.
- Đồ thị nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.
- Có đồ thị là một đường hình sin.
- Tuần hoàn với chu kì 2π .
- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.
- Nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

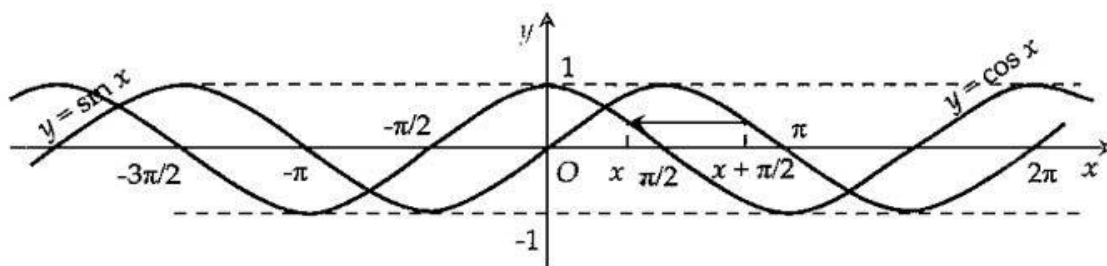
b) Hàm số $y = \cos x$

Ta thấy $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ nên bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = \sin x$ sang trái một đoạn có độ dài $\frac{\pi}{2}$, ta được đồ thị hàm số $y = \cos x$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = \cos x$ trên $[-\pi; \pi]$.

x	$-\pi$	0	π
$y = \cos x$	-1	1	-1

Đồ thị hàm số $y = \cos x$:



Hình 1.6

STUDY TIP

Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(-\pi; 0)$. Do tính chất tuần hoàn với chu kỳ 2π , hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Tương tự ta suy ra được hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.

GHI NHỚ

Hàm số $y = \cos x$:

- Có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- Là hàm số chẵn.
- Là một đường hình sin.
- Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.
- Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Đọc thêm

Hàm số $y = a \cdot \sin(\omega x + b) + c, (a, b, c, \omega \in \mathbb{R}, a\omega \neq 0)$ là một hàm tuần hoàn với chu kỳ cơ sở $\frac{2\pi}{|\omega|}$ vì:

$$a \cdot \sin(\omega(x + T) + b) + c = a \cdot \sin(\omega x + b) + c, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow a \cdot \sin(\omega x + b + \omega T) = a \cdot \sin(\omega x + b), \forall x \in \mathbb{R}$$

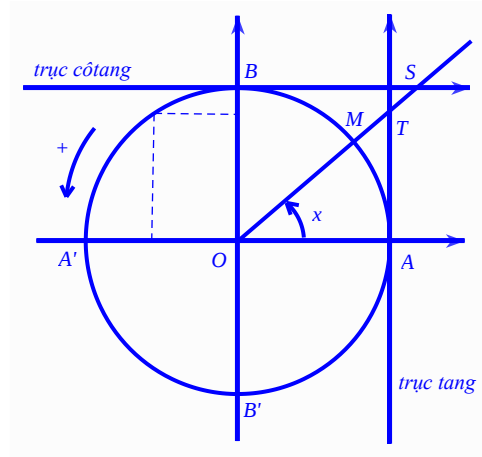
$$\Leftrightarrow \omega T = k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow T = k \frac{2\pi}{\omega}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Và đồ thị của nó cũng là một đường hình sin.

Tương tự hàm số $y = a \cdot \cos(\omega x + b) + c, (a, b, c, \omega \in \mathbb{R}, a\omega \neq 0)$ cũng là một hàm tuần hoàn với chu kỳ cơ sở $\frac{2\pi}{|\omega|}$ và đồ thị của nó cũng là một đường hình sin.

Ứng dụng thực tiễn: Dao động điều hòa trong môn Vật lý chương trình 12.

2. Hàm số $y = \tan x$ và hàm số $y = \cot x$



Hình 1.7

Với $D_1 = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, quy tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in D_1$ với số thực $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ được gọi là hàm số tang, kí hiệu là $y = \tan x$. Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định là D_1 .

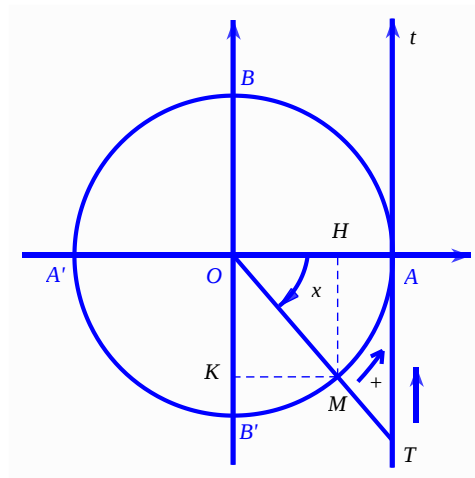
Với $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, quy tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in D_2$ với số thực $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ được gọi là hàm số

côtang, kí hiệu là $y = \cot x$. Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là D_2 .

Nhận xét: - Hai hàm số $y = \tan x$ và hàm số $y = \cot x$ là hai hàm số lẻ.

- Hai hàm số này là hai hàm số tuần hoàn với chu kì π .

a) Hàm số $y = \tan x$



Hình 1.8

Sự biến thiên: Khi cho $x = (\overline{OA}, \overline{OM})$ tăng từ $-\frac{\pi}{2}$ đến $\frac{\pi}{2}$ thì điểm M chạy trên đường tròn lượng giác theo

chiều dương từ B' đến B (không kể B' và B). Khi đó điểm T thuộc trục tang sao cho $\overline{AT} = \tan x$ chạy dọc theo At , nên $\tan x$ tăng từ $-\infty$ đến $+\infty$ (qua giá trị 0 khi $x = 0$).

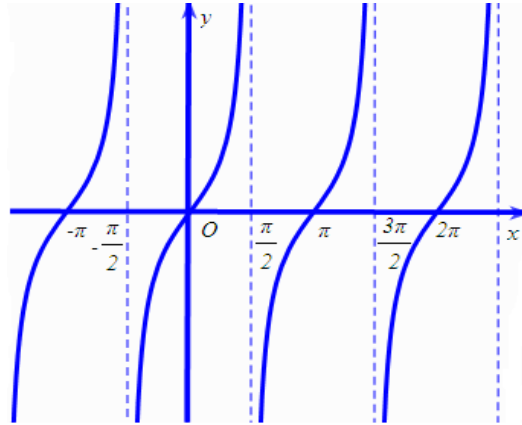
Giải thích: $\tan x = \overline{AT}$ vì $\tan x = \frac{\overline{MH}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AT}}{1} = \overline{AT}$

Nhận xét: Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$. Đồ thị hàm số $y = \tan x$

nhận mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận.

Đồ thị hàm số:

Nhận xét: Do hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ và tuần hoàn với chu kỳ π nên khi vẽ đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số trên $\left[0; \frac{\pi}{2} \right)$, sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc tọa độ O , ta được đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2} \right)$, cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành.



Hình 1.9

STUDY TIP

Hàm số $y = \tan x$ nhận mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận

GHI NHỚ

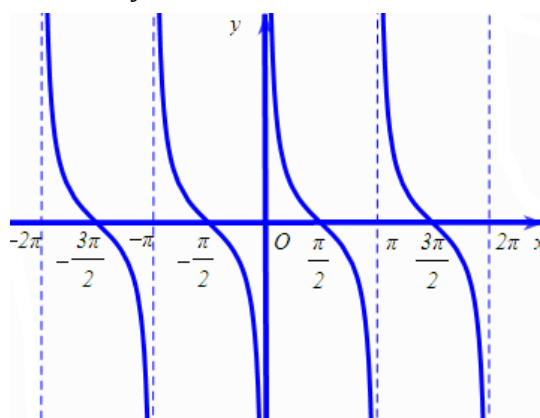
Hàm số $y = \tan x$:

- Có tập xác định $D_1 = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ - Là hàm số lẻ
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π - Có tập giá trị là $\mathbb{R}$
- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$
- Đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận

b) Hàm số $y = \cot x$

Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ π .

Tương tự khảo sát như đối với hàm số $y = \tan x$ ở trên thì ta có thể vẽ đồ thị hàm số $y = \cot x$ như sau:



Hình 1.10

GHI NHỚ

Hàm số $y = \cot x$:

- Có tập xác định: $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ - Là hàm số lẻ
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π - Có tập giá trị là $\mathbb{R}$
- Đồng biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
- Đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận.

III. BÀI TẬP:

Dạng 2: Xét Tính Chẵn Lẻ Của Hàm Số Lượng Giác.

Định Nghĩa.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

- a, Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số chẵn nếu với mọi x thuộc D , ta có $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.
- b, Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số lẻ nếu với mọi x thuộc D , ta có $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

STUDY TIP:

Để kết luận hàm số $y = f(x)$ không chẵn không lẻ thì ta chỉ cần chỉ ra điểm $x_0 \in D$ sao cho

$$\begin{cases} f(-x_0) \neq f(x_0) \\ f(-x_0) \neq -f(x_0) \end{cases} \text{ hoặc chỉ ra tập xác định của } f(x) \text{ không phải là tập đối xứng.}$$

Phương pháp chung:

Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số, khi đó

- * Nếu D là tập đối xứng (tức $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$), thì ta thực hiện tiếp bước 2.
- * Nếu D không phải tập đối xứng (tức là $\exists x \in D$ mà $-x \notin D$) thì ta kết luận hàm số không chẵn không lẻ.

Bước 2: Xác định $f(-x)$:

- * Nếu $f(-x) = f(x), \forall x \in D$ thì kết luận hàm số là hàm số chẵn.
- * Nếu $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$ thì kết luận hàm số là hàm số lẻ.
- * Nếu không thỏa mãn một trong hai điều kiện trên thì kết luận hàm số không chẵn không lẻ.

Các kiến thức đã học về hàm lượng giác cơ bản:

- 1, Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ trên $D = \mathbb{R}$.
- 2, Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn trên $D = \mathbb{R}$.
- 3, Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ trên $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- 4, Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ trên $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Ví dụ 1. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

- A.** $y = -2\cos x$. **B.** $y = -2\sin x$. **C.** $y = 2\sin(-x)$. **D.** $y = \sin x - \cos x$.

Lời giải

Chọn A.

Cách 1: Với các kiến thức về tính chẵn lẻ của hàm lượng giác cơ bản ta có thể chọn luôn A.

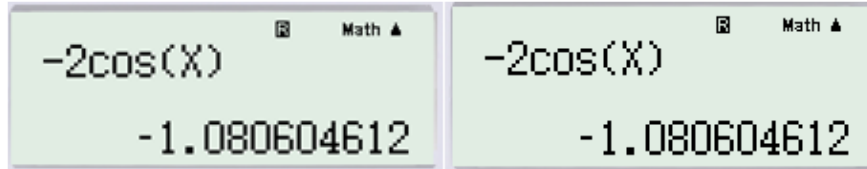
Xét A: Do tập xác định $D = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f(-x) = -2\cos(-x) = -2\cos x = f(x)$. Vậy hàm số $y = -2\cos x$ là hàm số chẵn.

Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay.

Ta có thể thử từng phương án bằng máy tính cầm tay, sử dụng CALC để thử trường hợp x và $-x$.

Với A: Nhập vào màn hình hàm số sử dụng CALC với trường hợp $x=1$ (hình bên trái) và trường hợp $x=-1$ (hình bên phải) đều đưa kết quả giống nhau. Vì $f(x) = -f(x) \Rightarrow$ ta chọn luôn **A**.



STUDY TIP:

Khi sử dụng máy tính cầm tay ta nên chú ý cả tập xác định của hàm số xem có phải là tập đối xứng không.

Ví dụ 2. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = \frac{\sin 2x}{2\cos x - 3}$ thì $y = f(x)$ là

A. Hàm số chẵn.

B. Hàm số lẻ.

C. Không chẵn không lẻ.

D. Vừa chẵn vừa lẻ.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

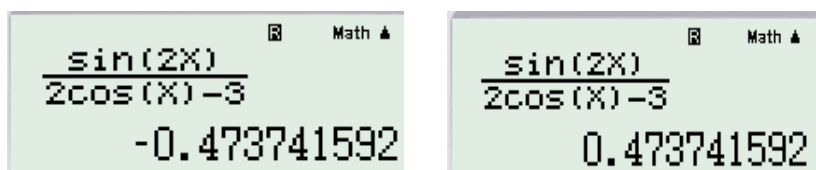
Ta có $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$f(-x) = \frac{\sin(-2x)}{2\cos(-x)-3} = \frac{-\sin 2x}{2\cos x-3} = -f(x). \text{ Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.}$$

Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay.

Ta có thể thử từng phương án bằng máy tính cầm tay, sử dụng CALC để thử trường hợp x và $-x$.

Với **A**: Nhập biểu thức của hàm số vào màn hình sử dụng CALC với trường hợp $x=1$ (hình bên trái) và trường hợp $x=-1$ (hình bên phải), ta thấy $f(1) = -f(-1) \Rightarrow$ hàm số đã cho là hàm số lẻ.



STUDY TIP:

Trong bài toán này, tập xác định $D = \mathbb{R}$ bởi $2\cos x - 3 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 3. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, ta được $y = f(x)$ là:

A. Hàm số chẵn.

B. Hàm số lẻ.

C. Không chẵn không lẻ.

D. Vừa chẵn vừa lẻ.

Lời giải

Chọn D.

Cách 1:

Ta có $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 2x - \sin 2x) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin 2x - \cos 2x) = 0$.

Ta có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Hàm số $y = 0$ vừa thỏa mãn tính chất của hàm số chẵn, vừa thỏa mãn tính chất của hàm số lẻ, nên đây là hàm số vừa chẵn vừa lẻ.

Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay.

Tương tự các bài toán trên ta nhập hàm số và sử dụng CALC để thử thì thấy cả hai trường hợp đều ra kết quả là 0. Mà $y = 0$ vừa là hàm số chẵn, vừa là hàm số lẻ vừa là hàm hằng nên ta chọn **D**.

$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$	X?	$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$
	-5	0
X?		$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$
5		0

STUDY TIP:

Hàm số $y = 0$ vừa là hàm số chẵn, vừa là hàm số lẻ vừa là hàm hằng.

Ví dụ 4. Cho hai hàm số $f(x) = \frac{1}{x-3} + 3\sin^2 x$ và $g(x) = \sin \sqrt{1-x}$. Kết luận nào sau đây đúng về tính chẵn lẻ của hai hàm số này?

- A. Hai hàm số $f(x); g(x)$ là hai hàm số lẻ.
- B. Hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn; hàm số $g(x)$ là hàm số lẻ.
- C. Hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ; hàm số $g(x)$ là hàm số không chẵn không lẻ.
- D. Cả hai hàm số $f(x); g(x)$ đều là hàm số không chẵn không lẻ.**

Lời giải

Chọn D.

a, Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x-3} + 3\sin^2 x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Ta có $x = -3 \in D$ nhưng $-x = 3 \notin D$ nên D không có tính đối xứng. Do đó ta có kết luận hàm số $f(x)$ không chẵn không lẻ.

b, Xét hàm số $g(x) = \sin \sqrt{1-x}$ có tập xác định là $D_2 = [1; +\infty)$. Dễ thấy D_2 không phải là tập đối xứng nên ta kết luận hàm số $g(x)$ không chẵn không lẻ.

Vậy chọn **D**.

STUDY TIP:

Khi xét tính chẵn lẻ của hàm số ta cần chú ý xét tập xác định đầu tiên để giải quyết bài toán một cách chính xác.

Ví dụ 5. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \sin^{2007} x + \cos nx$, với $n \in \mathbb{Z}$. Hàm số $y = f(x)$ là:

- A. Hàm số chẵn.
- B. Hàm số lẻ.
- C. Không chẵn không lẻ.**
- D. Vừa chẵn vừa lẻ.

Lời giải

Chọn C.

Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f(-x) = \sin^{2007}(-x) + \cos(-nx) = -\sin^{2007}x + \cos nx \neq \pm f(x)$.

Vậy hàm số đã cho không chẵn không lẻ.

Ví dụ 6. Cho hàm số $f(x) = \frac{\sin^{2004n}x + 2004}{\cos x}$, với $n \in \mathbb{Z}$. Xét các biểu thức sau:

- 1, Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R}$.
- 2, Đồ thị hàm số đã cho có trục đối xứng.
- 3, Hàm số đã cho là hàm số chẵn.
- 4, Đồ thị hàm số đã cho có tâm đối xứng.
- 5, Hàm số đã cho là hàm số lẻ.
- 6, Hàm số đã cho là hàm số không chẵn không lẻ.

Số phát biểu đúng trong sáu phát biểu trên là

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B.

Hàm số đã xác định khi $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vậy phát biểu 1 sai.

Ở đây ta cần chú ý: các phát biểu 2; 3; 4; 5; 6 để xác định tính đúng sai ta chỉ cần đi xét tính chẵn lẻ của hàm số đã cho.

Ta có tập xác định của hàm số trên là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ là tập đối xứng.

$$f(-x) = \frac{\sin^{2004n}(-x) + 2004}{\cos(-x)} = \frac{\sin^{2004n}x + 2004}{\cos x} = f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn. Suy ra đồ thị hàm số đối xứng qua trục Oy. Vậy chỉ có phát biểu 2 và 3 là phát biểu đúng. Từ đây ta chọn **B**.

STUDY TIP

Đồ thị hàm số lẻ thì đối xứng qua tâm O.

Đồ thị hàm số chẵn thì đối xứng qua trục Oy.

Ví dụ 7. Cho hàm số $f(x) = |x|\sin x$. Phát biểu nào sau đây là đúng về hàm số đã cho?

- A.** Hàm số đã cho có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- B.** Đồ thị hàm số đã cho có tâm đối xứng.
- C.** Đồ thị hàm số đã cho có trục đối xứng.
- D.** Hàm số có tập giá trị là $[-1; 1]$.

Lời giải

Chọn B.

Hàm số đã cho xác định trên tập $D = \mathbb{R}$ nên ta loại A.

Tiếp theo để xét tính đối xứng của đồ thị hàm số ta xét tính chẵn lẻ của hàm số đã cho.

$$f(-x) = |-x|\sin(-x) = -|x|\sin x = -f(x). \text{ Vậy đồ thị hàm số đối xứng qua gốc tọa độ O. Vậy ta chọn đáp án}$$

B.

STUDY TIP

Với bài toán này ta nên xét B và C trước thay vì xét lần lượt A, B, C, D.

Ví dụ 8. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(x) = 3m \sin 4x + \cos 2x$ là hàm chẵn.

A. $m > 0$.

B. $m < -1$.

C. $m = 0$.

D. $m = 2$.

Lời giải

Chọn C.

Cách 1:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $f(-x) = 3m \sin 4(-x) + \cos 2(-x) = -3m \sin 4x + \cos 2x$.

Để hàm số đã cho là hàm chẵn thì

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(x), \forall x \in D \Leftrightarrow -3m \sin 4x + \cos 2x = 3m \sin 4x + \cos 2x, \forall x \in D \\ &\Leftrightarrow 4m \sin 4x = 0, \forall x \in D \Leftrightarrow m = 0. \end{aligned}$$

Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay.

Với bài toán này ta có thể sử dụng máy tính cầm tay để thử các giá trị. Với A và C, ta thử một trường hợp để loại hai đáp án còn lại, tương tự với B và D. Ở đây ta sử dụng CALC để thử tại giá trị x và $-x$.

Ví dụ: Nhập vào màn hình như hình bên.

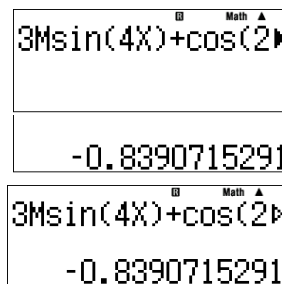
Ấn CALC để gán các giá trị cho m . Ta thử với $m = 0$ thì ấn

0

=

Chọn x bất kì, sau đó làm lại lần nữa và gán x cho $-x$ ban đầu và so sánh (ở đây ta thử với $x = 5$ và tại -5).

Ta thấy $f(-x) = f(x)$. Vậy C đúng. Ta chọn luôn C và loại các phương án còn lại.



DẠNG 3. Xét tính đơn điệu của hàm số lượng giác

Phương pháp chung:

Ở phần lý thuyết, với các hàm số lượng giác cơ bản, ta đã biết rằng:

1. Hàm số $y = \sin x$:

* Đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

* Nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

2. Hàm số $y = \cos x$:

* Đồng biến trên các khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.

* Nghịch biến trên các khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.

3. Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

4. Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên các khoảng $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Với các hàm số lượng giác phức tạp, để xét tính đơn điệu của nó ta sử dụng định nghĩa.

Ví dụ 1. Xét hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; 0]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$; đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Lời giải

Chọn A.

Cách 1: Từ lý thuyết về các hàm số lượng giác cơ bản ở trên ta có hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay.

Do ở đề bài, các phương án A, B, C, D chỉ xuất hiện hai khoảng là $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ nên ta sẽ dùng máy tính cầm tay chức năng MODE 7: TABLE để giải bài toán.

Ấn



Máy hiện $f(X) =$ thì ta nhập $\sin X$. START? Nhập $-\pi$; END? Nhập 0 . STEP? Nhập $\frac{\pi}{10}$.

X	F(X)
1	-3.141592654
2	-2.827
3	-2.513

X	F(X)
4	-2.199
5	-1.884
6	-1.569

X	F(X)
7	-1.256
8	-0.942
9	-0.628

X	F(X)
10	-0.314
11	0
12	0.314

Lúc này từ bảng giá trị của hàm số ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Ví dụ 2. Xét hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\pi; 0)$ và $(0; \pi)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\pi; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; \pi)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\pi; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$.
- D. Hàm số luôn đồng biến trên các khoảng $(-\pi; 0)$ và $(0; \pi)$.

Lời giải

Chọn B.

Theo lý thuyết ta có hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi), k \in \mathbb{Z}$ và nghịch biến trên khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$. Từ đây ta có với $k = 0$ hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(-\pi; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; \pi)$.

Tiếp theo ta đến với hàm số $y = \tan nx; (n \in \mathbb{Z}), \dots$ Ta có ví dụ 3.

Ví dụ 3. Xét sự biến thiên của hàm số $y = \tan 2x$ trên một chu kì tuần hoàn. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- C. Hàm số đã cho luôn đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
- D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Hàm số $y = \tan 2x$ tuần hoàn với chu kỳ $\frac{\pi}{2}$, dựa vào các phương án A; B; C; D thì ta sẽ xét tính đơn điệu của hàm số trên $\left(0; \frac{\pi}{2} \right) \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} \right\}$.

Dựa theo kết quả khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = \tan x$ ở phần lý thuyết ta có thể suy ra với hàm số $y = \tan 2x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4} \right)$ và $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right)$.

STUDY TIP

Ở đây ta không chọn C vì hàm số không liên tục trên $\left(0; \frac{\pi}{2} \right)$, hàm số bị gián đoạn tại $x = \frac{\pi}{4}$ (tức là hàm số không xác định tại $x = \frac{\pi}{4}$).

Ví dụ 4. Xét sự biến thiên của hàm số $y = 1 - \sin x$ trên một chu kỳ tuần hoàn của nó. Trong các kết luận sau, kết luận nào sai?

- A.** Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0 \right)$.
- B.** Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2} \right)$.
- C.** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi \right)$.
- D.** Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right)$.

Lời giải**Chọn D.**

Hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ 2π và kết hợp với các phương án đề bài thì ta sẽ xét sự biến thiên của hàm số trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$.

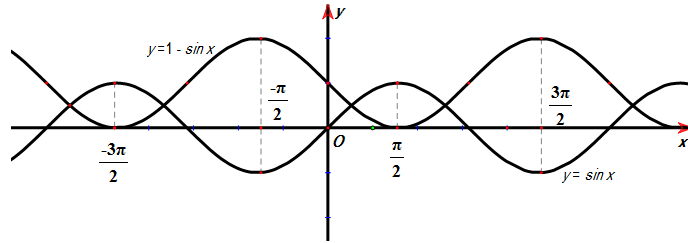
Ta có hàm số $y = \sin x$:

- * Đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$.
- * Nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right)$.

Từ đây suy ra hàm số $y = 1 - \sin x$:

- * Nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$.
- * Đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right)$. Từ đây ta chọn D.

Dưới đây là đồ thị của hàm số $y = 1 - \sin x$ và hàm số $y = \sin x$ trên $\mathbb{R}$.



Ví dụ 5. Xét sự biến thiên của hàm số $y = \sin x - \cos x$. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.
- B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$.
- C. Hàm số đã cho có tập giá trị là $[-1; 1]$.
- D. Hàm số đã cho luôn nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1:

Ta có $y = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Từ đây ta có thể loại đáp án C, do tập giá trị của hàm số là $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ 2π do vậy ta xét sự biến thiên của hàm số trên đoạn

$$\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right].$$

Ta có:

* Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

* Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$. Từ đây ta chọn A.

Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay

Tương tự như ở ví dụ 1, ta sẽ sử dụng máy tính cầm tay chức năng MODE 7: TABLE để giải bài toán.

Ấn



Máy hiện $f(X) =$ thì ta nhập $\sin X - \cos X$. Chọn STAR; TEND; STEP

phù hợp ta sẽ có kết quả như hình dưới:

X	F(X)
1	-1.013
2	-1
3	-0.986
4	-0.7853981634

X	F(X)
4	-0.972
5	-0.958
6	-0.943
7	3.141592654

X	F(X)
7	-0.929
8	-0.914
9	-0.899
10	5.497787144

Từ bảng giá trị của hàm số $f(x)$ trên ta thấy khi x chạy từ $-\frac{\pi}{4} \approx -0,785$ đến $\frac{3\pi}{4} \approx 2,3561$ thì

giá trị của hàm số tăng dần, tức là hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

Phân tích thêm: Khi x chạy từ $\frac{3\pi}{4}$ đến $\frac{7\pi}{4} \approx 5,49778$ thì giá trị của hàm số giảm dần, tức là hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$.

STUDY TIP

Ta chú ý ở đây có $-\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$ nên ta có thể suy ra STEP phù hợp. Trong bài gán STEP $= \frac{\pi}{4}$.

Ví dụ 6.

Chọn câu đúng?

- A. Hàm số $y = \tan x$ luôn luôn tăng.
- B. Hàm số $y = \tan x$ luôn luôn tăng trên từng khoảng xác định.
- C. Hàm số $y = \tan x$ tăng trong các khoảng $(\pi + k2\pi; 2\pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.
- D. Hàm số $y = \tan x$ tăng trong các khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.

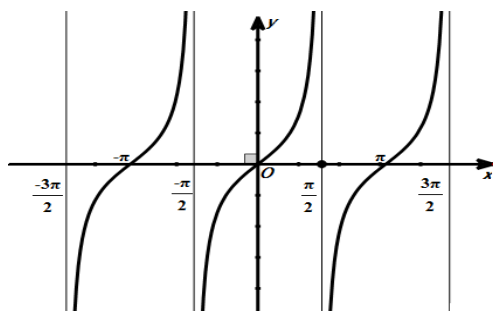
Lời giải

Chọn B.

Với A ta thấy hàm số $y = \tan x$ không xác định tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$ nên tồn tại các điểm làm cho hàm số bị gián đoạn nên hàm số không thể luôn tăng.

Với B ta thấy B đúng vì hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

Từ đây loại C và D.



Ví dụ 7.

Xét hai mệnh đề sau:

(I) $\forall x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$: Hàm số

(II) $\forall x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$: Hàm số $y = \frac{1}{\cos x}$ giảm.

Mệnh đề đúng trong hai mệnh đề trên là:

- A. Chỉ (I) đúng .
- B. Chỉ (II) đúng .
- C. Cả 2 sai .
- D. Cả 2 đúng .

Lời giải

Chọn B.

Cách 1:

Như bài toán xét xem hàm số tăng hay giảm. Ta lấy $x_1 < x_2 \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$

Lúc này ta có $f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{\sin x_2} - \frac{1}{\sin x_1} = \frac{\sin x_1 - \sin x_2}{\sin x_1 \sin x_2}$

Ta thấy $x_1 < x_2 \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ thì $\sin x_1 > \sin x_2 \Rightarrow \sin x_1 - \sin x_2 > 0$

$0 > \sin x_1 > \sin x_2 \Rightarrow \frac{\sin x_1 - \sin x_2}{\sin x_1 \sin x_2} > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Vậy $y = \frac{1}{\sin x}$ là hàm tăng.

Tương tự ta có $y = \frac{1}{\cos x}$ là hàm giảm. Vậy I sai, II đúng.

Cách 2:

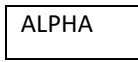
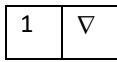
Sử dụng lệnh TABLE để xét xem hàm số tăng hay giảm trên máy tính.

Với hàm $\frac{1}{\sin x}$ ta nhập MODE 7: TABLE ()

MODE

7

Nhập hàm $f(x)$ như hình bên:



START? π ; END? $\frac{3\pi}{2}$. STEP? $\frac{\pi}{10}$.

Của hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ như hình bên. Ta thấy giá trị của hàm số tăng dần khi x chạy từ π đến $\frac{3\pi}{2}$. Nên ta kết

luận trên $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ tăng.

Tương tự với II và kết luận.

Ví dụ 8. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. $y = |\tan x|$ đồng biến trong $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

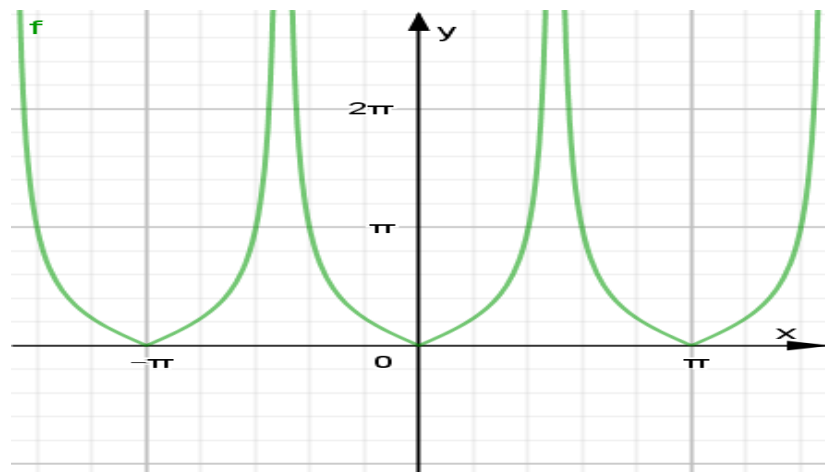
B. $y = |\tan x|$ là hàm số chẵn trên $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $y = |\tan x|$ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

D. $y = |\tan x|$ luôn nghịch biến trong $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B.



Ta được đồ thị như hình vẽ trên. Ta thấy hàm số $y = |\tan x|$ nghịch biến trên $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ và đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

. Nên ta loại A và D.

Với B ta có $f(-x) = |\tan(-x)| = |\tan x| = f(x) \Rightarrow$ hàm số $y = |\tan x|$ là hàm số chẵn.

Với C ta thấy đồ thị hàm số đã cho không đối xứng qua gốc tọa độ, từ đây ta chọn B.

STUDY TIP

Ta suy diễn đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ từ đó suy ra khoảng đơn điệu của hàm số $y = |f(x)|$.

- Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm phía trên trục Ox .
- Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ phía dưới trục Ox qua Ox .
- Hợp hai phần trên ta được đồ thị hàm số $y = |f(x)|$.

STUDY TIP

Với bài toán này ta có thể không suy diễn đồ thị mà làm theo hướng tư duy sau:

- Với A: $y = |\tan x|$ không xác định tại $x = \pm \frac{\pi}{2}$ nên không thể đồng biến trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- Từ B suy ra C; D sai.

DẠNG 4. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số lượng giác.

*Các kiến thức về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}$.

- Số thực M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu $\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M \end{cases}$
- Số thực N được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu $\begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$

Một số kiến thức ta sử dụng trong các bài toán này:

- Tính bị chặn của hàm số lượng giác.
- Điều kiện có nghiệm của phương trình bậc nhất giữa $\sin$ và $\cos$.
- Bảng biến thiên của hàm số lượng giác.
- Kỹ thuật sử dụng máy tính cầm tay.

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = 2017 \cos\left(8x + \frac{10\pi}{2017}\right) + 2016$.

A. $\min y = 1; \max y = 4033$.

B. $\min y = -1; \max y = 4033$.

C. $\min y = 1; \max y = 4022$.

D. $\min y = -1; \max y = 4022$.

Phân tích

Ta có các bước để giải quyết bài toán như sau:

Bước 1: Chỉ ra $f(x) \leq M, \forall x \in D$.

Bước 2 : Chỉ ra $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

Kết luận : $\max_D f(x) = M$

Tương tự với tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $-1 \leq \cos\left(8x + \frac{10\pi}{2017}\right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow -2017 \leq 2017 \cos\left(8x + \frac{10\pi}{2017}\right) + 2016 \leq 4033, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq 2017 \cos\left(8x + \frac{10\pi}{2017}\right) + 2016 \leq 4033, \forall x \in \mathbb{R}$$

Ta có $y = -1$ khi $\cos\left(8x + \frac{10\pi}{2017}\right) = -1$; $y = 4033$ khi $\cos\left(8x + \frac{10\pi}{2017}\right) = 1$.

Vậy $\min y = -1$; $\max y = 4033$.

Cách 2: sử dụng máy tính cầm tay.

Trong bốn phương án chỉ có hai giá trị $\max$ là 4022; 4033.

Chỉ có hai giá trị $\min$ là 1; -1.

Lúc này ta sử dụng chức năng SHIFT CALC để thử giá trị:

Ví dụ ta nhập vào màn hình $2017 \cos\left(8x + \frac{10\pi}{2017}\right) + 2016 = 4033$ ta thấy phương trình có nghiệm.

Tương tự nhập $2017 \cos\left(8x + \frac{10\pi}{2017}\right) + 2016 = -1$ ta thấy phương trình có nghiệm.

Từ đây ta chọn **B**.

STUDY TIP

Trong bài toán ta chọn thử hai giá trị trên vì 4033 là giá trị lớn hơn và -1 là giá trị nhỏ hơn nên ta thử trước. Nếu phương trình không có nghiệm thì sẽ là trường hợp còn lại.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = 2 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 1$

A. $\min y = 0$; $\max y = 4$

B. $\min y = 1 - \sqrt{3}$; $\max y = 3 + \sqrt{3}$.

C. $\min y = -4$; $\max y = 0$.

D. $\min y = -1 + \sqrt{3}$; $\max y = 3 + \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Để sử dụng tính bị chặn của hàm số ở trong STUDY TIP ta đưa ra ở trên, ta sẽ đưa

$y = 2 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 1$ về theo $\sin u(x)$ hoặc $\cos u(x)$.

Ta có $y = 2 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 1 = 2 \cos^2 x - 1 - \sqrt{3} \sin 2x + 2 = \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x + 2 (*)$
 $= 2 \left(\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x \right) + 2 = 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + 2$

Mặt khác $-1 \leq 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + 2 \leq 4, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 4, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có bài toán tổng quát:

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = a \sin u + b \cos u$ trên $\mathbb{R}$. Với

$a, b \in \mathbb{R}; a^2 + b^2 > 0$.

Lời giải tổng quát

$y = a \sin u + b \cos u \Rightarrow y = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin u + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos u \right) \sqrt{a^2 + b^2}$

Vì $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1 \Rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ và $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\Rightarrow y = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin u \cos \alpha + \cos u \sin \alpha) \Rightarrow y = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(u + \alpha)$

Vì $-1 \leq \sin(u + \alpha) \leq 1 \Rightarrow -\sqrt{a^2 + b^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 + b^2}$

Ngoài ra ta có thể mở rộng bài toán như sau:

$y = a \sin[f(x)] + b \cos[f(x)] + c$. Ta có $-\sqrt{a^2 + b^2} + c \leq y \leq \sqrt{a^2 + b^2} + c$

Từ bài toán tổng quát trên ta có thể giải quyết nhanh bài toán ví dụ 2 từ dòng (*) như sau: Ta có $-\sqrt{1+3} + 2 \leq y \leq \sqrt{1+3} + 2 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 4$.

STUDY TIP

Ngoài cách nhớ công thức ở bài toán tổng quát phía bên phải ta có thể nhớ theo điều kiện có nghiệm của phương trình bậc nhất theo $\sin$ và $\cos$ như sau:

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = a \sin[f(x)] + b \cos[f(x)] + c$
 $a \sin[f(x)] + b \cos[f(x)] + c - y = 0$ điều kiện có nghiệm $a^2 + b^2 \geq (c - y)^2$. Từ đây ta tìm được min, max của y.

Ví dụ 3. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 3}{2 + \cos x}$

A. min $y = -\frac{2}{3}$; max $y = 2$.

B. min $y = \frac{2}{3}$; max $y = 2$

B. min $y = \frac{1}{2}$; max $y = \frac{3}{2}$

D. min $y = -\frac{1}{2}$; max $y = \frac{3}{2}$

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: Ta có $\cos x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 3}{2 + \cos x} \Leftrightarrow \sin x + 2 \cos x + 3 = 2y + y \cos x \Leftrightarrow \sin x + (2 - y) \cos x + 3 - 2y = 0$$

Ta sử dụng điều kiện ở STUDY TIP trong bài tổng quát trên.

$$\text{Ta có } 1^2 + (2 - y)^2 \geq (3 - 2y)^2 \Leftrightarrow 4y^2 - 12y + 9 - y^2 + 4y - 4 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 8y + 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq y \leq 2$$

Cách 2 : sử dụng máy tính cầm tay

Tương tự như ở ví dụ 1 thì ta có thể sử dụng SHIFT SOLVE: $\frac{\sin x + 2 \cos x + 3}{2 + \cos x} = 2$ thì phương

trình có nghiệm. Do 2 là số lớn nhất trong các phương án A;B;C;D nên ta không cần thử trường hợp max $= \frac{3}{2}$.

Lúc này chỉ còn A và B. Thử với min $y = -\frac{2}{3}$ thì không có nghiệm.

Từ đây chọn B.

STUDY TIP

Nếu hàm số có dạng $y = \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2}$ ta tìm miền xác định của hàm số rồi quy đồng mẫu số, đưa về dạng phương trình trong STUDY TIP ở phía trên và tiếp tục lời giải.

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt[4]{\sin x} - \sqrt{\cos x}$.

A. min $y = -1$; max $y = 1$.

B. min $y = 0$; max $y = 1$

C. min $y = -1$; max $y = 0$.

D. min $y = -1$; max không tồn tại.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Cách 1 : Ta có } \begin{cases} 0 \leq \sqrt[4]{\sin x} \leq 1 \\ 0 \leq \sqrt{\cos x} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \sqrt[4]{\sin x} \leq 1 \\ -1 \leq -\sqrt{\cos x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1.$$

$$\text{Vậy khi } \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = k2\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Cách 2 : sử dụng máy tính cầm tay

STUDY TIP

Nhiều độc giả không lưu ý đổi dấu của bpt thứ hai của hệ khi nhân các vế với -1 dẫn đến chọn đáp án sai.

- Ví dụ 5.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \cot^4 a + \cot^4 b + 2 \tan^2 a \cdot \tan^2 b + 2$
- A. $\min y = 2$. B. $\min y = 6$.
 C. $\min y = 4$. D. Không tồn tại GTLN.

Lời giải

Chọn B.

$$\begin{aligned} P &= (\cot^2 a - \cot^2 b)^2 + 2 \cot^2 a \cdot \cot^2 b + 2 \tan^2 a \cdot \tan^2 b + 2 \\ &= (\cot^2 a - \cot^2 b)^2 + 2(\cot^2 a \cdot \cot^2 b + \tan^2 a \cdot \tan^2 b - 2) + 6 \\ &= (\cot^2 a - \cot^2 b)^2 + 2(\cot^2 a \cdot \cot^2 b + \tan^2 a \cdot \tan^2 b - 2 \cot a \cdot \cot b \cdot \tan a \cdot \tan b) + 6 \\ &= (\cot^2 a - \cot^2 b)^2 + 2(\cot a \cdot \cot b - \tan a \cdot \tan b)^2 + 6 \geq 6 \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} \cot^2 a = \cot^2 b \\ \cot a \cdot \cot b = \tan a \cdot \tan b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cot^2 a = 1 \\ \cot^2 b = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = b = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

STUDY TIP:

Với các bài toán tìm GTLN – GTNN của hàm lượng giác ta có thể đưa về dạng $y = A^2(x) + B \geq B$. Nhưng cần lưu ý xem dấu bằng có xảy ra hay không.

Tiếp theo ta có ví dụ 6 là một câu hỏi khác cho ví dụ 2 như sau

- Ví dụ 6.** Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cdot \cos x + 1$ trên đoạn $\left[0, \frac{7\pi}{12}\right]$ lần lượt là
- A. $\min y = 2; \max y = 3$. B. $\min y = 0; \max y = 2$.
 $\left[0, \frac{7\pi}{12}\right]$ $\left[0, \frac{7\pi}{12}\right]$
 C. $\min y = 0; \max y = 4$. D. $\min y = 0; \max y = 3$.
 $\left[0, \frac{7\pi}{12}\right]$ $\left[0, \frac{7\pi}{12}\right]$

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Từ ví dụ 2 ta có } y = 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + 2. \text{ Đặt } u = 2x + \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Từ đề bài ta xét } x \in \left[0; \frac{7\pi}{12} \right] \Rightarrow u \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2} \right]$$

$$\text{Ta lập BBT của hàm số } y = 2 \cos u + 2 \text{ trên } \left[\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2} \right].$$

u	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$2 \cos u + 2$	3	0	2

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min_{\left[\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2} \right]} f(u) = 0$ khi $u = \pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$

$$\max_{\left[\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right]} f(u) = 3 \text{ khi } u = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Hay } \min_{\left[0; \frac{7\pi}{12}\right]} y = 0; \max_{\left[0; \frac{7\pi}{12}\right]} y = 3.$$

STUDY TIP:

Với các bài toán tìm min, max của hàm số lượng giác trên một đoạn ta thường phải xét nhanh BBT để giải quyết bài toán. Ở chương trình 11 ta chưa học đạo hàm nên chưa giải quyết được bài toán tìm GTLN – GTNN của hàm số sử dụng đạo hàm. Sau khi học xong đạo hàm ta sẽ giải quyết bài toán này nhanh chóng hơn.

Ví dụ 7. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin^2 x - \sin x + 2$.

A. $\min y = \frac{7}{4}; \max y = 4$.

B. $\min y = \frac{7}{4}; \max y = 2$.

C. $\min y = -1; \max y = 1$. **D.** $\min y = \frac{1}{2}; \max y = 2$.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $\sin x = u; u \in [-1; 1]$

Xét hàm số: $y = u^2 - u + 2$ trên $[-1; 1]$.

Ta có: $\frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \in [-1; 1]$. Từ đây có bảng biến thiên

u	-1	$\frac{1}{2}$	1
y	4	$\frac{7}{4}$	2

Ta kết luận: $\min_{[-1; 1]} f(u) = \frac{7}{4}$ và $\max_{[-1; 1]} y = 4 \Leftrightarrow u = -1$.

Hay $\min y = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ và $\max y = 4 \Leftrightarrow \sin x = -1$.

Ngoài các phương pháp giải các bài toán tìm GTLN – GTNN của hàm số lượng giác ta rút ra từ các ví dụ trên ta còn phương pháp sử dụng bất đẳng thức cơ bản. Phương pháp này được coi là một phương pháp khó vì đòi hỏi tính sáng tạo và kỹ thuật trong việc sử dụng bất đẳng thức.

Một số bất đẳng thức ta thường dùng:

1. Bất đẳng thức AM – GM.

a. Với hai số:

Cho hai số thực a, b là hai số dương, ta có $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ dấu bằng xảy ra khi $a = b$.

b. Với n số:

Cho hai số thực $x_1; x_2; x_3; \dots; x_n$ là các số dương $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n}$ dấu bằng

xảy ra khi $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$.

2. Bất đẳng thức Bunyakovsky

a. Bất đẳng thức Bunyakovsky dạng thông thường.

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$. Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

b. Bất đẳng thức Bunyakovsky cho bộ hai số

Với hai bộ số $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ và $(b_1; b_2; \dots; b_n)$ ta có

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

STUDY TIP

Ta có thể sử dụng tính chất của tam thức bậc hai để giải các bài toán tìm min max hàm lượng giác như sau:

Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$

+ Nếu $a < 0$ thì $ax^2 + bx + c \leq \frac{-\Delta}{4a}$ dấu bằng xảy ra khi $x = -\frac{b}{2a}$.

+ Nếu $a > 0$ thì $ax^2 + bx + c \geq \frac{-\Delta}{4a}$ dấu bằng xảy ra khi $x = -\frac{b}{2a}$.

+ Nếu hàm số đã cho là hàm bậc hai mà điều kiện không phải là $\forall x \in R$ thì ta phải lập BBT để tìm min max

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ với quy ước nếu một số b_i nào đó

($i = 1, 2, 3, \dots$) bằng 0 thì a_i tương đương bằng 0.

c. Hệ quả của bất đẳng thức Bunyakovsky ta có $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq 4abcd$

Ví dụ 8. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2 x} + \frac{1}{2}\sqrt{5 + 2\sin^2 x}$

A. $1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{22}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{11}}{2}$.

D. $1 + \sqrt{5}$.

Đáp án B

Lời giải

Chọn B.

Ta có $y = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2 x} + \frac{1}{2}\sqrt{5 + 2\sin^2 x} \Leftrightarrow y = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2 x} + \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin^2 x}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho 4 số: 1; 1; $\sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2 x}$; $\sqrt{\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin^2 x}$ ta có:

$$1 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2 x} + 1 \cdot \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin^2 x} \leq \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin^2 x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{22}}{2}$$

Hay $y \leq \frac{\sqrt{22}}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $1 + \frac{1}{2}\cos^2 x = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin^2 x \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

STUDY TIP

Trong bài toán ta có thể nhanh chóng nhận ra sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky bởi ở trong căn lần lượt có $\sin^2 x$ và $\cos^2 x$. Ta cân bằng hệ số của $\sin^2 x$ và $\cos^2 x$ để áp dụng tính chất $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Áp dụng Bunyakovsky thì vế phải sẽ là hằng số, từ đó giải quyết được bài toán.

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = \frac{1}{2 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x}$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $\min y = \frac{4}{3}$ khi $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

B. $\min y = \frac{2}{3}$ khi $x = \frac{\pi}{3}$
 $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

C. $\min y = \frac{2}{3}$ khi $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
 $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

D. $\min y = \frac{4}{3}$ khi $x = \frac{\pi}{3}$.
 $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Lời giải

Chọn D.

Cách 1: Ta thấy $2 - \cos x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $1 + \cos x > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Suy ra $\frac{1}{2 - \cos x}$ và $\frac{1}{1 + \cos x}$ là hai số dương. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương ta có

$$\frac{1}{2 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x} \geq \frac{2}{\sqrt{(2 - \cos x)(1 + \cos x)}}$$

Mặt khác tiếp tục áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\sqrt{(2 - \cos x)(1 + \cos x)} \leq \frac{2 - \cos x + 1 + \cos x}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y \geq \frac{2}{\sqrt{(2 - \cos x)(1 + \cos x)}} \geq \frac{4}{3}$$

STUDY TIP

Trong bài toán ta có thể nhanh chóng nhận ra sử dụng bất đẳng thức AM-GM bởi vì ta thấy mẫu số của hai phân thức cộng lại sẽ ra hằng số, nên ở đây ta có thể sử dụng bất đẳng thức AM-GM.

Ta có thể giải quyết bài toán theo hướng khác đó là sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu.

Với x, y là hai số thực dương ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ dấu bằng xảy ra khi $x = y$

Vậy $\min y = \frac{4}{3}$, dấu bằng xảy ra khi $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$ vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Cách 2: Đề ý đề bài hỏi tìm GTLN, GTNN của hàm số trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Trên đây là hai ví dụ sử dụng bất đẳng thức tìm GTLN, GTNN của hàm số lượng giác mà không có liên hệ cho trước. Ví dụ 10 dưới đây là một ví dụ khó hơn về sử dụng bất đẳng thức kết hợp với lượng giác để giải quyết.

Ví dụ 10. Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z = \frac{\pi}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$y = \sqrt{1 + \tan x \cdot \tan y} + \sqrt{1 + \tan y \cdot \tan z} + \sqrt{1 + \tan z \cdot \tan x}$$

A. $y_{\max} = 1 + 2\sqrt{2}$.

B. $y_{\max} = 3\sqrt{3}$.

C. $y_{\max} = \sqrt{4}$.

D. $y_{\max} = 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } x + y + z = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x + y = \frac{\pi}{2} - z \Rightarrow \tan(x + y) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \Leftrightarrow \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} = \frac{1}{\tan z}$$

$$\Leftrightarrow \tan x \cdot \tan z + \tan y \cdot \tan z = 1 - \tan x \cdot \tan y \Leftrightarrow \tan x \cdot \tan z + \tan y \cdot \tan z + \tan x \cdot \tan y = 1$$

Ta thấy $\tan x \cdot \tan z$; $\tan y \cdot \tan z$; $\tan x \cdot \tan y$ lần lượt xuất hiện trong hàm số đề cho dưới căn thức, tương tự như ví dụ 8, áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho 6 số ta có:

$$1 \cdot \sqrt{1 + \tan x \cdot \tan y} + 1 \cdot \sqrt{1 + \tan y \cdot \tan z} + 1 \cdot \sqrt{1 + \tan z \cdot \tan x} \leq$$

$$\leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1 \cdot \tan x \cdot \tan z + 1 \cdot \tan y \cdot \tan z + 1 \cdot \tan x \cdot \tan y} =$$

$$= \sqrt{3} \sqrt{3 + (\tan x \cdot \tan z + \tan y \cdot \tan z + \tan x \cdot \tan y)} = 2\sqrt{3}$$

Vậy $y_{\max} = 2\sqrt{3}$

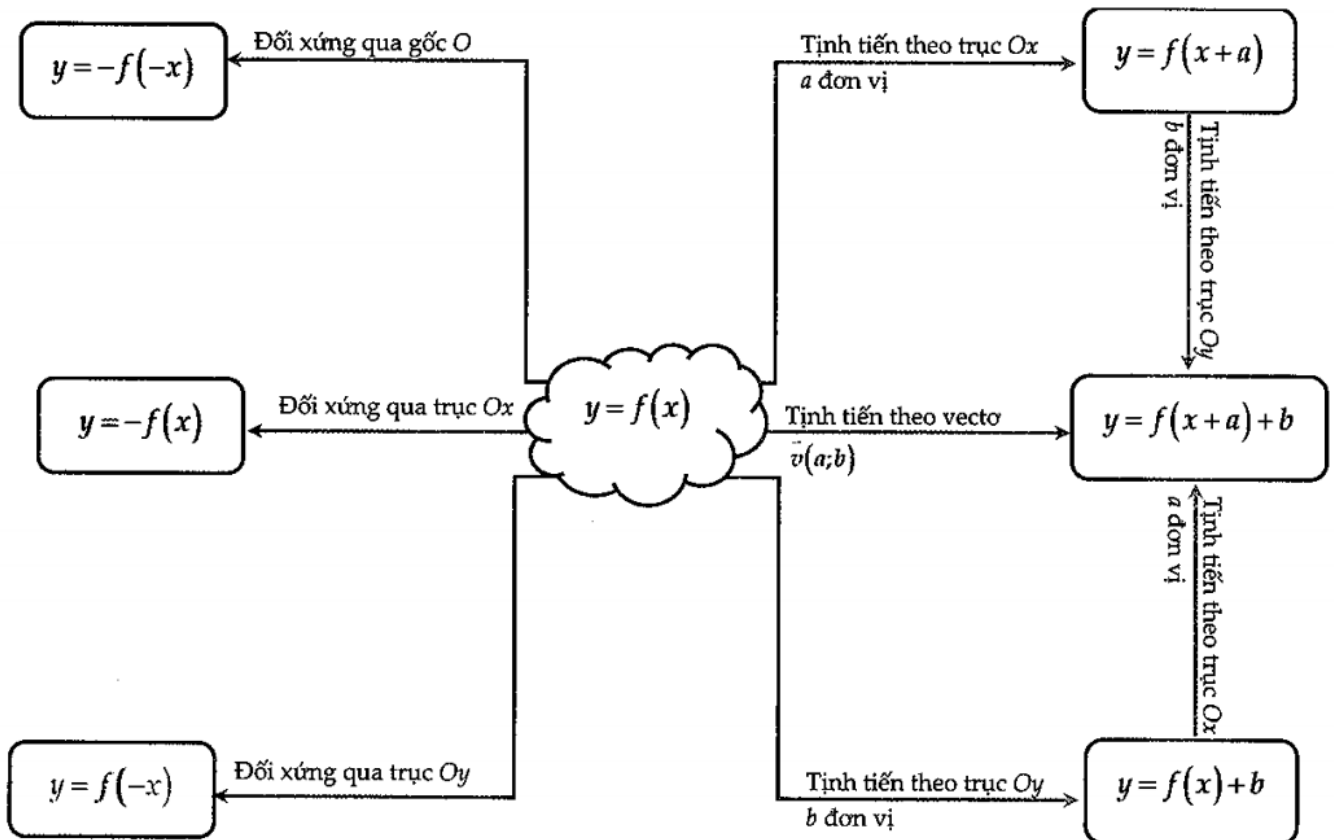
❖* Đọc thêm

DẠNG 5: Dạng đồ thị của hàm số lượng giác

Các kiến thức cơ bản về dạng của hàm số lượng giác được đưa ra ở phần 1:

Lý thuyết cơ bản: Sau đây ta bổ sung một số kiến thức lý thuyết để giải quyết bài toán nhận dạng đồ thị hàm số lượng giác một cách hiệu quả.

Sơ đồ biến đổi đồ thị hàm số cơ bản:



Các kiến thức liên quan đến suy diễn đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối:

Đồ thị hàm số $y = f(x) $ gồm	*Phần từ trục hoành trở lên của đồ thị $y = f(x)$. *Đổi xứng phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ phía dưới trục hoành qua trục hoành.
Đồ thị hàm số $y = f(x)$ gồm	*Phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ nằm bên phải trục Oy. *Đổi xứng phần đồ thị trên qua trục Oy.
Đồ thị hàm số $y = u(x) \cdot v(x)$ với $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ gồm	*Phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên miền thỏa mãn $u(x) \geq 0$.

	*Đối xứng phần đồ thị $y = f(x)$ trên miền $u(x) < 0$ qua trục hoành.
--	---

Cho hàm số
 $y = f(x)$

. Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy diễn:

Ở phần lý thuyết có đưa ra phần đọc thêm về hàm số $y = a \sin(\omega x + b) + c$ với $a; b; c; \omega \in \mathbb{R}; a\omega \neq 0$.

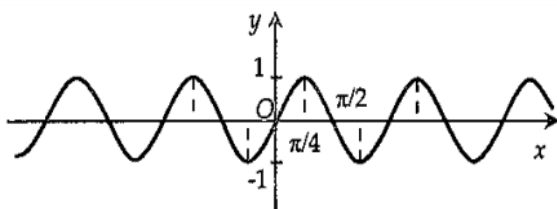
Hàm số $y = a \sin(\omega x + b) + c, (a, b, c, \omega \in \mathbb{R}, a\omega \neq 0)$ cũng là một hàm tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{|\omega|}$ và đồ thị của nó cũng là một đường hình sin.

Tương tự hàm số $y = a \cos(\omega x + b), (a, b, c, \omega \in \mathbb{R}, a\omega \neq 0)$ cũng là một hàm tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{|\omega|}$ và đồ thị của nó cũng là một đường hình sin.

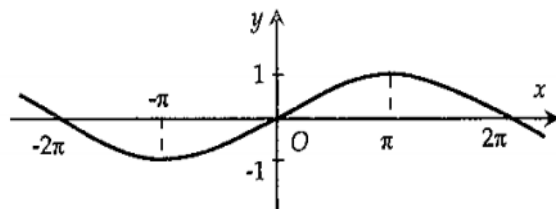
Ta có ví dụ sau:

Ví dụ 11. Hình nào dưới đây biểu diễn đồ thị hàm số $y = f(x) = 2 \sin 2x$?

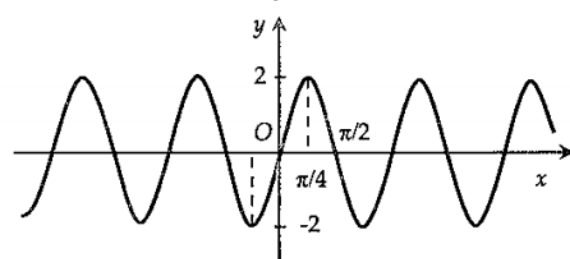
A.



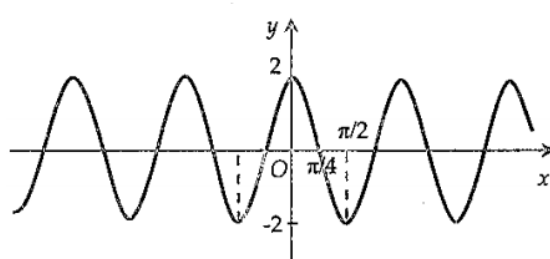
B.



C.



D.



Lời giải

Chọn C.

Ta thấy $-2 \leq 2 \sin 2x \leq 2$ nên ta có loại A và B.

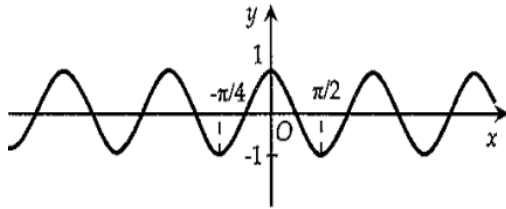
Tiếp theo với C và D ta có:

Từ phần lý thuyết ở trên ta có hàm số tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{|2|} = \pi$.

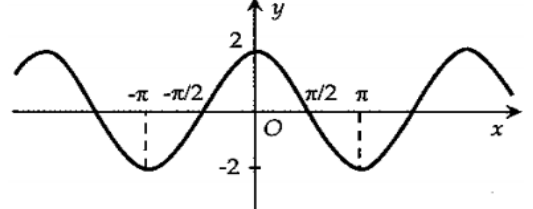
Ta thấy với $x = 0$ thì $y = 0$ nên đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ. Từ đây ta chọn đáp án C.

Ví dụ 1. Hình vẽ nào sau đây biểu diễn đồ thị hàm số $y = \cos \frac{x}{2}$?

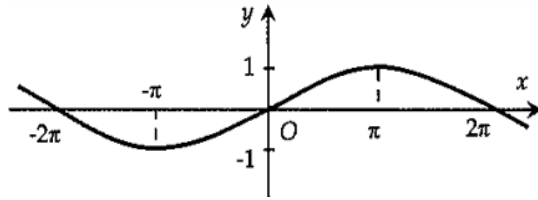
A.



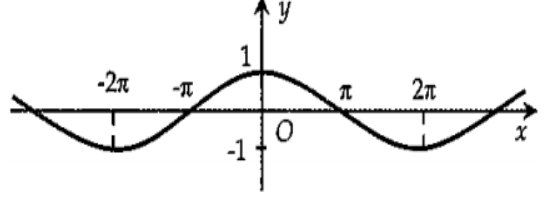
B.



C.



D.



Lời giải

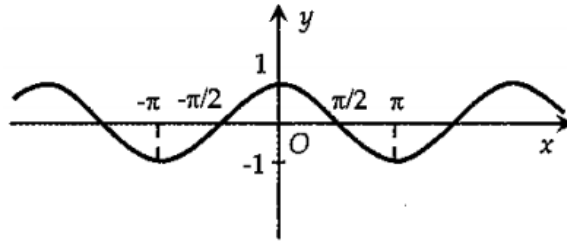
Chọn D

Ta thấy $-1 \leq \cos \frac{x}{2} \leq 1$ nên ta loại B.

Tiếp theo ta có hàm số $y = \cos \frac{x}{2}$ có chu kì tuần hoàn là $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

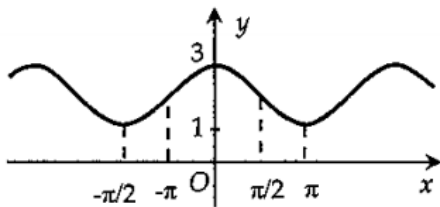
Ta thấy với $x = 0$ thì $y = \cos \frac{x}{2} = \cos 0 = 1$ nên ta chọn D.

Ví dụ 2. Cho đồ thị hàm số $y = \cos x$ như hình vẽ :

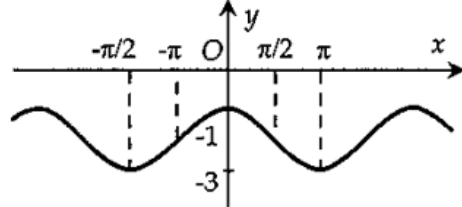


Hình vẽ nào sau đây là đồ thị hàm số $y = \cos x + 2$?

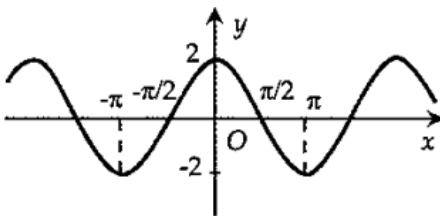
A.



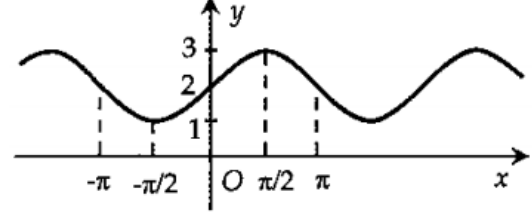
B.



C.



D.

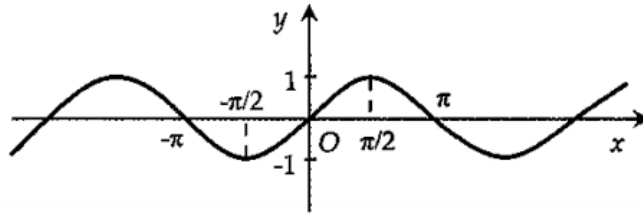


Lời giải

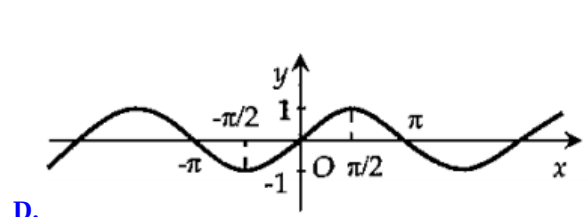
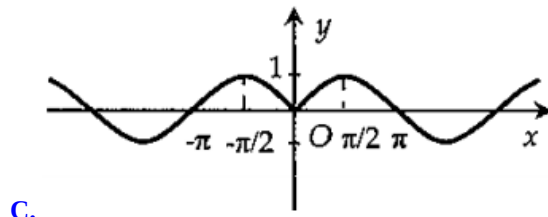
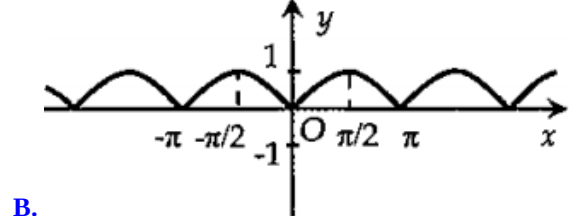
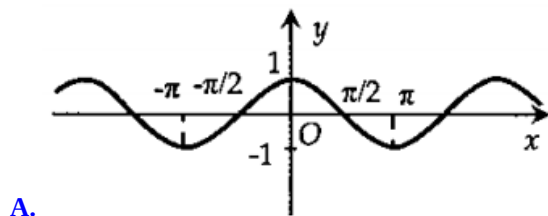
Chọn A

Ta thực hiện phép tịnh tiến đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên trục Oy lên trên 2 đơn vị (xem lại sơ đồ biến đổi đồ thị cơ bản ở bên trên).

Ví dụ 3. Cho đồ thị hàm số $y = \sin x$ như hình vẽ:



Hình nào sau đây là đồ thị hàm số $y = \sin|x|$?



Lời giải

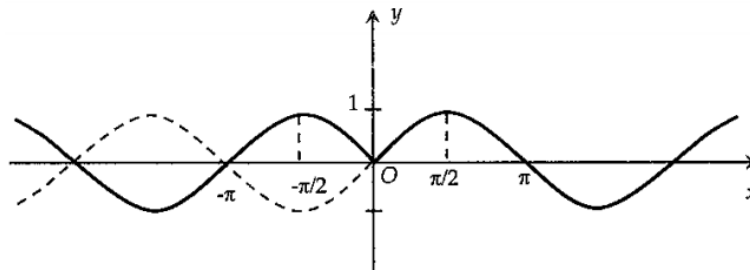
Chọn C

Suy diễn đồ thị hàm số $y = \sin|x|$ từ đồ thị hàm số $y = \sin x$:

Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = \sin x$ nằm bên phải trục Oy .

Lấy đối xứng phần đồ thị trên qua trục Oy .

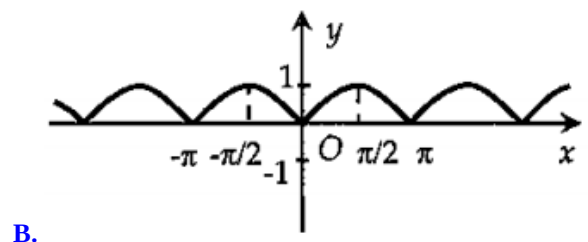
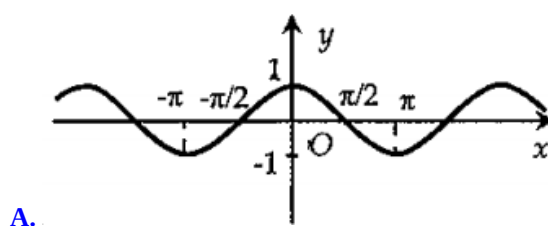
Dưới đây là đồ thị ta thu được sau khi thực hiện các bước suy diễn ở trên. Phần đồ thị nét đứt là phần bỏ đi của đồ thị hàm số $y = \sin x$.

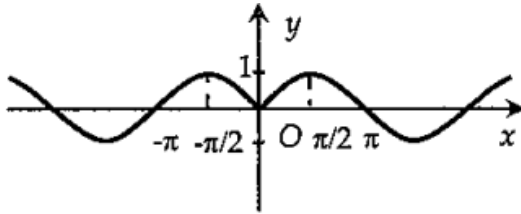


STUDY TIP

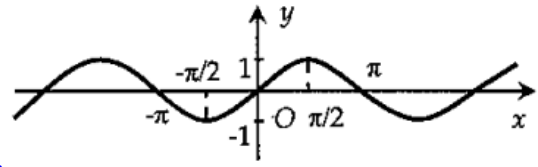
Ngoài ra ở bài toán này, ta có thể áp dụng tính chất hàm chẵn lẻ mà tôi đã cung cấp ở phần xét tính chẵn lẻ của hàm số phía trước. Hàm số $y = \sin|x|$ là hàm số chẵn có đồ thị đối xứng qua trục Oy . Nhìn các phương án A, B, C, D chỉ có phương án D là không có đồ thị đối xứng qua trục Oy . Tiếp theo ta tìm giá trị của một số điểm đặc biệt và chọn được C.

Ví dụ 4. Hình nào sau đây là đồ thị hàm số $y = |\sin x|$?





C.



D.

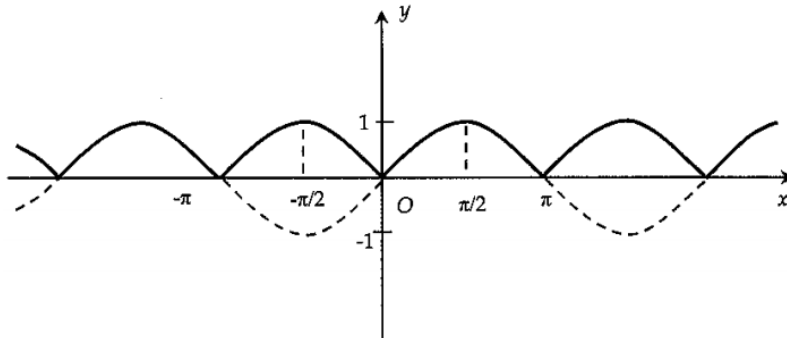
Lời giải

Chọn B.

Cách 1: Suy diễn đồ thị hàm số $y = |\sin x|$ từ đồ thị hàm số $y = \sin x$:

Giữ nguyên phần từ trục hoành trở lên của đồ thị $y = \sin x$.

Lấy đối xứng phần đồ thị của hàm số $y = \sin x$ phía dưới trục hoành qua trục hoành.



Cách 2: Ta thấy $|\sin x| \geq 0, \forall x$ nên đồ thị hàm số $y = |\sin x|$ hoàn toàn nằm trên trục Ox .

Từ đây ta chọn B.

I. CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

$$\text{a) } \sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{b) } \cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{c) } \tan f(x) = \tan g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{d) } \cot f(x) = \cot g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

Không được dùng đồng thời 2 đơn vị độ và radian cho một công thức về nghiệm phương trình lượng giác.

Ví dụ 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào nhận $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ làm nghiệm

A. $\sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$.

B. $\cos x = \sin 2x$.

C. $\cos 4x = -\cos 6x$.

D. $\tan 2x = -\tan \frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{A. } \sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} - 2x + k2\pi \\ 3x = \pi - (\frac{\pi}{4} - 2x) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + k\frac{2\pi}{5} \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{B. } \cos x = \sin 2x &\Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ x = -\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} - k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

STUDY TIP

$$\begin{aligned} (-\sin f(x)) &= \sin(-f(x)) & (-\tan f(x)) &= \tan(-f(x)) \\ (-\cos f(x)) &= \cos(\pi - f(x)) & (-\cot f(x)) &= \cot(-f(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C. } \cos 4x = -\cos 6x &\Leftrightarrow \cos 4x = \cos(\pi - 6x) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \pi - 6x + k2\pi \\ 4x = -(\pi - 6x) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5} \\ x = \frac{\pi}{2} - k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

$$\text{D. } \tan 2x = -\tan \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \tan 2x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

So sánh ta được đáp án là B.

LƯU Ý: Bạn có thể biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác rồi dùng máy tính để thử nghiệm và kết luận. Phần này sẽ được trình bày kỹ hơn trong cuốn công phá kỹ thuật giải toán CASIO.

Ví dụ 2. Phương trình $\sin 2x = -\sin \frac{\pi}{3}$ có nghiệm dạng $x = \alpha + k\pi$ và $x = \beta + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), $\left(-\frac{\pi}{4} \leq \alpha; \beta \leq \frac{3\pi}{4}\right)$.

Khi đó tích $\alpha \cdot \beta$ bằng:

A. $-\frac{\pi^2}{9}$.

B. $-\frac{\pi}{9}$.

C. $-\frac{4\pi^2}{9}$.

D. $\frac{\pi^2}{9}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin 2x = -\sin \frac{\pi}{3} &\Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases} \Rightarrow \alpha \cdot \beta = -\frac{\pi^2}{9}. \end{aligned}$$

IV. Nội dung chuẩn bị:

HS cần xem kỹ lý thuyết SGK trước khi tham khảo phần lý thuyết tóm lược và bài tập.

V. Đáp án bài tập tự luyện:

Nếu có thắc mắc HS liên hệ GVBM để được hỗ trợ.